Atelier « épreuve pratique » de l'IREM de la Réunion
Année 2007-2008

TP 3 : 2-CYCLES D'UN TRINÔME

1. FICHE RÉSUMÉ

Titre : 2-cycles d'un trinôme

Niveau : Première S ; en présence du professeur

Domaine : algèbre et géométrie ; résolution graphique des équations

Durée : 2 ou 3 heures selon le niveau de maîtrise des logiciels

Matériel : poste informatique équipé d'un logiciel tel que GeoGebra et d'un logiciel de calcul formel

2. FICHE PROFESSEUR

2.1. Analyse mathématique

Résolution graphique et algébrique de $\begin{cases} P(\alpha) = \beta \\ P(\beta) = \alpha \end{cases}$ où P est un trinôme.

2.2. Niveau du TP

Pré-requis : Étude des trinômes et paraboles ; techniques d'algèbre (dont familiarisation avec la factorisation des polynômes par $(x - \alpha)$ pour α racine – résultat hors programme) ; composition des fonctions

Prérequis informatiques :

- GeoGebra : fonctions, courbes, points sur objet, transformations géométriques
- Calcul formel : factorisation d'un polynôme

Le TP est prévu pour être étudié en première S à l'issue du cours sur les trinômes, mais peut trouver sa place en terminale S à titre de révision de début d'année. Il est divisé en deux parties :

I/ Dégager une conjecture sur l'existence et le nombre de solutions de $\begin{cases} P(\alpha) = \beta \\ P(\beta) = \alpha \end{cases}$ où P est un trinôme, et déterminer des valeurs approchées des solutions.

II/ La détermination du nombre de solutions et les valeurs exactes grâce au calcul formel.

Articulation avec le cours :

Après le cours sur les trinômes et les paraboles, sur lesquelles on aura pratiqué auparavant l'application des transformations usuelles : translations, mais aussi la réflexion d'axe $y = x$ (dont on aura dégagé la définition analytique).

En algèbre, la pratique aura permis de dégager l'idée de la factorisation des polynômes pour la résolution des équations et des inéquations.

2.3. Objectifs

Mettre en œuvre une vision graphique et algébrique de la résolution d'une équation polynomiale ainsi que les nouveaux savoir-faire en algèbre.

Favoriser la reconnaissance et l'introduction de la réflexion d'axe $y = x$ dans un problème algébrique grâce à la reconnaissance de sa traduction analytique.

Mettre en œuvre les idées des méthodes algébriques en étant libéré des tâches techniques grâce au logiciel de calcul formel.

2.4. Scénario d'usage

Travail en autonomie en présence du professeur sur poste informatique pendant l'heure de groupe.

3. Fiche élève

On considère $P(x) = x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$ et sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

Le but du TP est de déterminer les réels α, β vérifiant le système $\begin{cases} P(\alpha) = \beta \\ P(\beta) = \alpha \end{cases}$ (*).

I. Existence et valeurs approchées avec GeoGebra

A. Point de vue analytique

Soit α un réel quelconque. Construire sur l'axe des abscisses un point A d'abscisse α, puis D d'abscisse $P(\alpha)$, enfin G d'abscisse $P(P(\alpha))$. Que doit-on observer lorsque (α, β) est solution de (*) ? Réciproque ? Conjecturer le nombre de solutions et des valeurs approchées grâce au logiciel.

B. Point de vue géométrique

Donner une interprétation géométrique de l'égalité $P(x) = x$ pour x réel. Déterminer les solutions de l'équation $P(x) = x$ (les réels solutions d'une telle équation sont appelés points fixes de P).

Donner une interprétation géométrique de : $[P(\alpha) = \beta$ et $P(\beta) = \alpha]$ en utilisant une transformation plane bien connue. En déduire le nombre de couples (α, β) de réels vérifiant (*) et retrouver les résultats obtenus précédemment.

Autre point de vue : retrouver les résultats précédents en utilisant les points fixes de $P \circ P$.

II. Valeurs exactes des solutions

A. Étude de l'exemple précédent

Montrer que $\begin{cases} P(\alpha) = \beta \\ P(\beta) = \alpha \end{cases}$ se ramène à la résolution d'une équation de degré 4. Utiliser les informations obtenues grâce à GeoGebra pour traiter l'équation.

B. Généralisation : on prend $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

On a remarqué que les solutions α, β de (*) sont les solutions de $P(P(x)) = x$ (s'il en existe), *i. e.* les points fixes de la fonction $P \circ P$.

Grâce au logiciel de calcul formel déterminer le polynôme $P(P(x)) - x$. Factoriser ce polynôme.

Vérifier que ce polynôme est ainsi factorisé sous la forme $[P(x) - x]\, Q(x)$ et en déduire que Q donne les solutions de (*) autres que les points fixes de P lorsqu'ils existent. Reprendre l'exemple étudié.

Remarque : le logiciel permet de faire glisser les courbes ; en « saisissant » la courbe de l'exemple étudié, visualiser dans GeoGebra des situations où tantôt il y aura existence de solutions, tantôt au contraire il n'y aura aucune solution.

4. COMPTE RENDU D'EXPÉRIMENTATION

GeoGebra est bien adapté à ce TP, mais il est souhaitable d'avoir déjà pratiqué ce logiciel auparavant.

Ce TP a été expérimenté en début d'année de première S avec des élèves qui venaient de découvrir la première S, les TP et GeoGebra. Ajouté aux difficultés non négligeables du sujet traité, cela faisait beaucoup… et il a fallu du temps pour arriver au bout, même si certains élèves ont remarquablement traité le sujet.

Partie I A/ : Les élèves ont souvent besoin d'un coup de pouce pour commencer la construction (une remarque du type « que ferais-tu à la main ? » suffit souvent à débloquer la situation… comme si la machine rendait la tâche plus nébuleuse. Ils pensent souvent pouvoir définir un α inconnu (général) et $A(\alpha, 0)$, et ne perçoivent pas le fait que prendre A sur Ox équivaut à définir un α quelconque : la notion de point sur objet (pouvant varier) n'était pas opérationnelle. On peut aussi indiquer à ces élèves la possibilité de gérer α grâce à un curseur ou encore de piloter le point A au clavier avec un pas assez fin pour observer une coïncidence plus fine des points (**voir figure 1 GeoGebra**).

Les élèves pas assez familiarisés avec les points sur objet font souvent des figures fausses.

Cette première étape n'est pas facile pour nombre d'élèves. Une mise au point peut être nécessaire avant de continuer.

Partie I B/ : Les difficultés rencontrées viennent de la compréhension du problème posé. Le fait que les points fixes de P sont solutions est relativement bien compris, mais après indications pour certains.

L'introduction spontanée de la réflexion d'axe $y = x$ est réservée aux meilleurs élèves (3 ou 4). Avec des élèves qui ont déjà entendu parler de la transformation, la situation se débloque finalement avec aide en évoquant la permutation des coordonnées (testée lors d'un stage réservé aux professeurs, la question a été jugée difficile…) (**voir figure 2 GeoGebra**).

L'introduction des points fixes de $P \circ P$ n'était pas à cet endroit dans la version testée, mais en fin de TP. Elle n'a été explorée que par deux élèves dans le compte rendu à rédiger à la maison (**voir figure 3 GeoGebra**).

II/ Aspect algébrique

Pour le calcul formel , Dérive convient (donc aussi les TI 89 ou tout autre logiciel de calcul formel).

Cette partie n'a pas posé de problème particulier : les idées de la factorisation, récemment étudiées, étant bien présentes.

Le logiciel de calcul formel s'avère être une aide précieuse autorisant d'aborder des situations techniquement à la limite du programme, voire hors programme, et permettant par là même de s'intéresser aux idées à mettre en œuvre sans buter sur les tâches techniques.

Il faut noter qu'avec la TI89 on obtient les résultats, dans le cas général, après un temps raisonnable ; avec Dérive et Mathematica c'est instantané.

$P(x) := x^2 - 12\cdot x + 36$

$P(P(x))$
$x^4 - 24\cdot x^3 + 204\cdot x^2 - 720\cdot x + 900$

$P(P(x)) - x$
$x^4 - 24\cdot x^3 + 204\cdot x^2 - 721\cdot x + 900$

$(x - 4)\cdot(x - 9)\cdot(x^2 - 11\cdot x + 25)$

$Q(x) := x^2 - 11\cdot x + 25$

NSOLVE($Q(x) := x^2 - 11\cdot x + 25$, x, Real)
$x = 3.208712152$; $x = 7.791287847$

$P(x) := a\cdot x^2 + b\cdot x + c$

$P(P(x))$

$a^3 \cdot x^4 + 2\cdot a^2 \cdot b\cdot x^3 + a\cdot x^2 \cdot(2\cdot a\cdot c + b^2 + b) + b\cdot x\cdot(2\cdot a\cdot c + b) + c\cdot(a\cdot c + b + 1)$

$P(P(x)) - x$

$a^3 \cdot x^4 + 2\cdot a^2 \cdot b\cdot x^3 + a\cdot x^2 \cdot(2\cdot a\cdot c + b^2 + b) + x\cdot(2\cdot a\cdot b\cdot c + b^2 - 1) + c\cdot(a\cdot c + b + 1)$

$P(P(x)) - x$

$(a\cdot x^2 + x\cdot(b - 1) + c)\cdot(a^2 \cdot x^2 + a\cdot x\cdot(b + 1) + a\cdot c + b + 1)$

$P(x) - x$

$a\cdot x^2 + x\cdot(b - 1) + c$

Intérêt annexe du TP : Outre la mise en œuvre des savoirs et savoir faire usuels liés au cours, les élèves ont pris conscience, en ce début d'année, de certains points de rigueur nécessaires à la bonne réalisation des figures (points sur objet, etc.), mais aussi liés à la syntaxe propre aux logiciels.