

## Tâche complexe « Le champ de Jean »

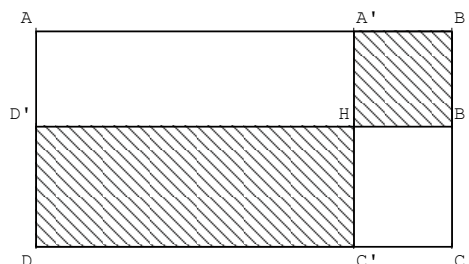
### a. Énoncé.

Jean possède un champ rectangulaire qu'il souhaite diviser en 4 parcelles dont une parcelle carrée. Ainsi, il entreprendra des cultures diverses sur deux des parcelles et laissera les deux autres parcelles (dont la parcelle carrée) en jachère.

Jean schématise la situation ci-dessous et hachure les deux parcelles qui seront en jachère.

Le champ est un rectangle  $ABCD$  tel que  $AB = 50$  m et  $AD = 26$  m.

Sur le schéma, les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  appartiennent respectivement aux segments  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$ , de telle sorte que  $A'BB'H$  soit un carré et  $DC'HD'$  soit un rectangle.



Jean peut-il placer le point  $H$  tel que l'aire de la surface en jachère soit égale à  $578$  m<sup>2</sup> ?

### b. Contexte.

Cette tâche complexe est réalisée en 3<sup>ème</sup> en classe entière.

Les élèves ont à leur disposition leurs cahiers, leurs manuels, un dictionnaire, leurs calculatrices personnelles ainsi que 3 ordinateurs sur lesquels sont notamment installés un logiciel de tableur, le logiciel de calcul formel WxMaxima ainsi que le logiciel de géométrie dynamique Geoplan-Geospace.

Les dimensions du champ peuvent sembler très restreintes (surface totale de  $1300$  m<sup>2</sup>), on pourra donc remplacer l'unité de longueur utilisée par le décamètre. Le choix ici fait tient compte des élèves tous issus d'un milieu urbain afin qu'ils puissent visualiser la situation.

### c. Ce qui a été fait auparavant – Prérequis.

Cette tâche complexe s'intègre dans une **progression spiralée** où le calcul littéral est travaillé tout au long de l'année (voir scénario 1 pour davantage de détails).

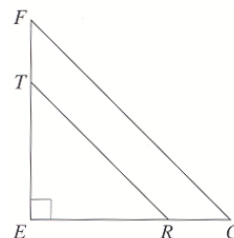
Cette tâche complexe (troisième de la série) est placée plusieurs semaines après les leçons consacrées à la factorisation d'expressions littérales grâce aux identités remarquables et à la résolution des équations-produits.

Quelques jours avant la tâche complexe, une utilisation de Geoplan a été réalisée suite au compte-rendu d'un exercice faisant partie d'un devoir maison :

#### Exercice 4 (Objectif Calcul littéral et géométrie)

On considère la figure ci-contre dans laquelle les triangles  $TER$  et  $GEF$  sont des triangles rectangles isocèles en  $E$ .

$ER = ET = x$  cm (avec  $x > 0$ ) ;  $RG = TF = 5$  cm. On souhaite déterminer  $x$  afin que l'aire du triangle  $TER$  soit égale au quart de l'aire du triangle  $GEF$ .



- 1) Exprimer, en fonction de  $x$ , les aires des triangles  $TER$  et  $GEF$ .
- 2) Montrer que le problème revient à résoudre l'équation :  $4x^2 - (x+5)^2 = 0$ .
- 3) Résoudre cette équation et conclure.

Le logiciel a été utilisé pour conjecturer la solution du problème. L'utilisation de Geoplan est assez régulière en classe, mais il s'agissait lors de cette utilisation en plénière (à l'aide du TBI, les élèves envoyés au tableau étant guidés éventuellement), de s'assurer que chaque élève connaisse certaines fonctionnalités du logiciel utilisées peu souvent (« calculs géométriques »). Les limites d'utilisation du logiciel ont ainsi été exposées : le logiciel ne permet que d'émettre des conjectures à l'aide de valeurs approchées des solutions.

#### **d. Objectifs et analyse a priori.**

##### Objectifs :

- Analyser et comprendre un texte.
- Conjecturer éventuellement la solution à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou d'un tableur.
- Mettre en équation le problème.
- Être capable de développer une expression littérale (double distributivité).
- Être capable de factoriser une expression littérale (à l'aide d'une identité remarquable).
- Être capable de résoudre une équation-produit.

##### Analyse a priori :

Il est possible que dans un premier temps, certains élèves aient recours à un **logiciel de géométrie dynamique** pour **conjecturer** la solution du problème.

A ce moment de l'année, il est ensuite très probable que les élèves aient la volonté de recourir au calcul littéral.

Après avoir choisi comme inconnue  $A'B = x$ , les élèves devraient mettre en application leurs connaissances sur **l'aire d'un rectangle** et **l'aire d'un carré** pour **mettre en équation** le problème et ainsi obtenir l'équation suivante :  $x^2 + (50 - x)(26 - x) = 578$ .

A ce stade, certains élèves auront peut-être à cœur de **tester cette égalité à l'aide d'un tableur** pour conjecturer la solution.

Mais on peut surtout penser qu'un certain nombre d'élèves utiliseront alors le logiciel WxMaxima pour **résoudre l'équation** ou alors pour vérifier leurs calculs lors du **développement** du membre de gauche de l'équation. Une fois obtenu une équation du type  $2x^2 - 76x + 1300 = 578$ , on peut penser que suite à l'expérience déjà acquise, les élèves penseront à la transformer en l'équation  $2x^2 - 76x + 722 = 0$ , voire l'équation  $x^2 - 38x + 361 = 0$ . Les élèves chercheront alors **factoriser** le membre de gauche (peut-être s'aideront-ils de WxMaxima) pour trouver une équation du type  $2(x - 19)^2 = 0$  ou  $(x - 19)^2 = 0$  et enfin conclure, à la vue de cette **équation-produit particulière**.

De manière générale, cette tâche complexe a pour but de faire travailler les élèves dans le cadre du **socle commun (compétences 1, 3, 4, 6 et 7)**.

Ceci est porté à la connaissance des élèves à l'aide de la grille d'évaluation simplifiée suivante :

SOCLE COMMUN	Auto-évaluation	Degré d'acquisition
C1 : Analyser l'information.		DA EA PA A
C2 : Calculer, réaliser, appliquer des consignes.		DA EA PA A
C3 : Reasonner, déduire.		DA EA PA A
C4 : Communiquer son résultat.		DA EA PA A
D2 : Nombres et calculs		DA EA PA A
D3 : Géométrie		DA EA PA A
D4 : Grandeurs et mesures		DA EA PA A
TIC : Utilisation de calculatrices, de logiciels. Préciser lesquels :		DA EA PA A
-		
-		
-		DA EA PA A
I : Investissement		

(DA : début d'acquisition, EA : en cours d'acquisition, PA : presque acquis, A : acquis.)

## e. Différentes phases du déroulement en classe.

Durée approximative : 1h30 + 15 min

<i>Phases</i>	<i>Rôle du professeur</i>	<i>Rôles de l'élève</i>
<i>Phase 1 : 5 min Lancement de la tâche complexe</i>	<i>Présenter les différentes phases aux élèves, leur préciser qu'ils ont le droit à différents supports (papier, calculatrice, informatique...).</i> <i>Lire l'énoncé aux élèves.</i> <i>S'assurer qu'aucun mot ne fait obstacle.</i> <i>Présenter la grille d'évaluation (voir plus loin).</i>	<i>Prendre connaissance du problème et du contexte de travail.</i> <i>Poser des questions concernant la compréhension du sujet.</i>
<i>Phase 2 : 10 min Recherche individuelle</i>	<i>Observer les réponses d'élèves.</i> <i>Inciter les élèves à laisser traces de tous leurs essais mais ne pas intervenir pour une quelconque aide.</i>	<i>Débuter la résolution du problème éventuellement sous forme d'une narration de recherche.</i>
<i>Phase 3 : 1h/1h05 Travail de groupe (groupes de 3 à 4 élèves)</i>	<i>Observer les différentes stratégies adoptées dans chaque groupe.</i> <i>Proposer des aides (voir ci-dessous) si les élèves bloquent et avec parcimonie.</i> <i>Amener les groupes à s'exprimer sur l'avancée de leurs recherches.</i>	<i>Echanger, discuter des diverses solutions, stratégies.</i> <i>Utiliser éventuellement les logiciels mis à disposition.</i> <i>Rédiger individuellement une solution suite aux divers échanges.</i> <i>S'auto-évaluer.</i>
<i>Phase 4 : 10/15 min Mise en commun des productions – Débat</i>	<i>Scanner des productions d'élèves et les projeter.</i> <i>Orchestrer le débat en agencant dans un ordre précis les diverses productions.</i> <i>Bien demander aux élèves quels outils ils ont utilisés (manuel, instrumentés...) et pourquoi ?</i>	<i>S'organiser pour un compte-rendu oral aidé des productions projetées.</i> <i>Pour les élèves qui écoutent le compte-rendu d'un groupe, intervenir en cas de sollicitation pour compléter ce qui a été présenté, faire des remarques.</i>
<i>Phase 5 : 15 min Synthèse – Solution (la séquence suivante)</i>	<i>Projeter quelques exemples supplémentaires.</i> <i>Présenter une solution « experte » totalement rédigée.</i>	<i>Poser des questions.</i>

## f. Blocage et aides éventuelles.

Les aides doivent être formulées sous forme de questions, en permettant toujours une réflexion de la part de l'élève. Elles doivent être **différenciées suivant l'interlocuteur** et délivrées avec parcimonie en essayant le plus possible de ne pas induire la démarche de résolution et favoriser ainsi la réflexion, l'autonomie et l'initiative.

Certaines sont prévues à l'avance et sont données sous forme de bandelettes aux élèves concernés.



## h. Analyse a posteriori.

Cette tâche complexe a été testée le 6/04/2012 dans deux classes de 3<sup>ème</sup> comportant chacune 26 élèves. Ces deux classes du Collège Jean Le Toullec au Port (classé ECLAIR) sont plutôt de bon niveau mais demeurent hétérogènes. 49 élèves étaient présents au moment de l'expérimentation.

Après une phase individuelle de 10 minutes, les élèves ont travaillé en groupes de 3 ou 4 élèves en rédigeant individuellement leurs réponses.

La séquence a duré en tout 1h30 permettant en fin de séquence la restitution du travail d'un groupe dans l'une des classes (dans l'autre classe, la restitution a été reportée au cours suivant afin que les élèves puissent finaliser dans de bonnes conditions leurs productions écrites). Un compte-rendu plus général des productions ainsi que des éléments de correction ont été réalisés le cours suivant.

### Petit bilan de l'utilisation des TIC

Parmi les 49 élèves présents, tous ont utilisé une calculatrice et 42 élèves ont utilisé un des logiciels mis à disposition : 16 élèves ont utilisé un logiciel de géométrie dynamique (Geoplan), aucun n'a utilisé de tableur, 26 ont utilisé un logiciel de calcul formel (WxMaxima), aucun élève n'a utilisé plus d'un logiciel.

Tous les élèves ayant utilisé Geoplan ont eu des difficultés d'utilisation et ne sont pas parvenus à émettre de conjectures à l'aide du logiciel. Ils se sont ensuite remis au travail sur papier, mais ayant perdu du temps, soit n'ont pas abouti dans leur calculs littéraux, soit n'ont même pas pensé à utiliser le calcul littéral (et se sont lancés dans des calculs divers : calcul de l'aire de  $ABCD$ , calcul de  $BD$  à l'aide du théorème de Pythagore...).

Concernant le logiciel de calcul formel, 22 élèves (sur 26) ont utilisé l'outil avec efficacité, trouvant la solution du problème suite à leur mise en équation.

Parmi les 7 élèves n'ayant utilisé aucun logiciel, un groupe de 4 élèves a complètement résolu le problème à la main tandis qu'un groupe de 3 élèves a pris beaucoup de temps pour se mettre d'accord sur la mise en équation du problème et n'a donc pas pu utiliser de logiciel.

### Petit bilan de l'activité

40 élèves ont eu l'idée de mettre en équation le problème. Ceux n'ayant pas eu cette idée font partie des élèves qui ont passé beaucoup de temps à utiliser Geoplan (sans succès).

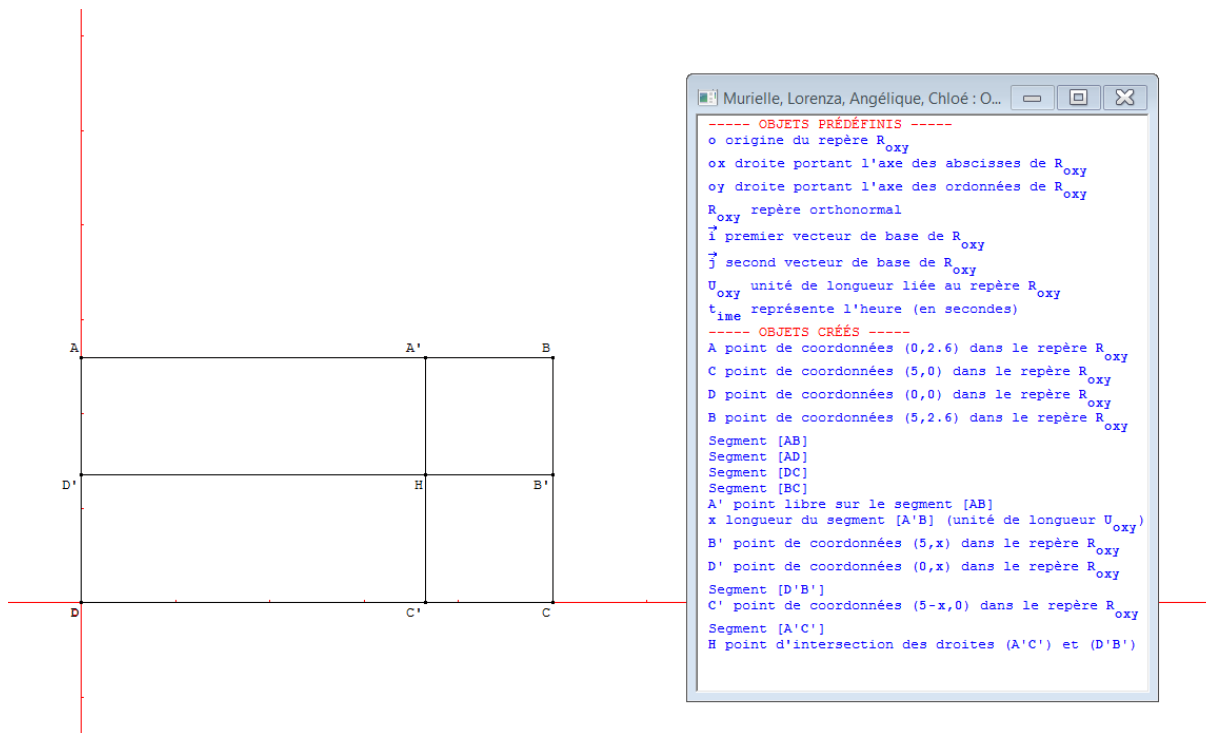
31 élèves ont mis correctement le problème en équation.

Parmi ceux-ci, 19 sont ensuite parvenus à déterminer la solution du problème uniquement à l'aide du logiciel WxMaxima. 3 élèves ont réussi les calculs à la main (mais après avoir utilisé WxMaxima dans un premier temps), 4 élèves ont su résoudre l'équation sans aucun logiciel.

## Un exemple d'utilisation de Geoplan

On construit la figure en plaçant les points  $A, B, C$  et  $D$  fixe en respectant ces longueurs

Puis on place des points libres  $A', B', C'$  et  $D'$  qui seront des points sur le rectangle  $ABCD$  qui pourront se déplacer



Les élèves ayant eu recours au logiciel Geoplan n'ont pas réussi à construire correctement une figure dynamique. Voici un exemple où les élèves ont mal défini le point  $B'$  après pourtant un bon début.

## Deux exemples de copies d'écran de WxMaxima

```
(%i1) solve(578=2*x^2+1300-76*x);  
(%o1) [x=19]
```

Cet exemple est le plus fréquemment obtenu, les élèves ayant en général mené les développements à la main, mais ne sachant plus que faire à la vue de l'équation  $2x^2 - 76x + 1300 = 578$ .

```
(%i1) expand((50-x)*(26-x)+x^2);  
(%o1) 2 x^2 - 76 x + 1300  
  
(%i2) solve([578=(50-x)*(26-x)+x^2], [x]);  
(%o2) [x=19]
```

Un groupe de trois élèves s'est complètement affranchi de calculs littéraux à la main, en utilisant WxMaxima dès le début de la mise en équation.

## Un exemple de traces de recherche lors de la phase individuelle

\* S'ai commencé par calculer l'aire du grand rectangle  
ABCD  
 $A = L \times P$   
 $A = 50 \times 26$   
 $A = 1300 \text{ m}^2$   
L'aire du rectangle est donc  $1300 \text{ m}^2$ .  
  
\* Puis j'ai calculer l'aire des parcelles cultivable :  
 $A = A - 578$   
 $A = 1300 - 578$   
 $A = 722 \text{ m}^2$   
L'aire des partie cultivable est  $722 \text{ m}^2$ .  
Après avoir chercher je me suis rendu compte que l'aire des parcelles cultivable ne me servirais pas.

## Un exemple d'aide apportée lors de la phase de travail en groupes

Aide 3 : Quelles leçons peuvent t'aider à résoudre le problème ?

Grâce à l'aide on n'a su quelle leçon utilisé et c'était  
une équation.  
ce c'est l'inconnu du côté du carré A'B H B'



Un exemple de recherche où l'élève (puis son groupe) explore différentes pistes avant d'utiliser WxMaxima pour mener les calculs littéraux.

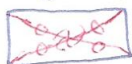
Pour commencer j'ai calculé l'aire du grand rectangle ABCD  
 $A_{ABCD} = p \times l$   
 $= 26 \times 50$   
 $= 1300$

Donc l'aire faisait 1300 m<sup>2</sup>. Puis pour trouver les terres non

jachère en faisant une soustraction :  $1300 - 578 = 722$

Terre non jachère = 722 m<sup>2</sup>

Puis j'ai utilisé Pythagore pour trouver les longueurs des diagonales :



$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$BD^2 = 50^2 + 26^2$$

$$BD^2 = 2500 + 676$$

$$BD^2 = 3176$$

$$BD = \sqrt{3176}$$

$$BD \approx 56,35 \approx AC$$

Donc c'est environ 56,35

Puis j'ai cherché des inconnues, les voici :

$$A'B = AD' = A'H = BB' = H'B = CC'$$

$$D'D = HC' = BC'$$

$$AA' = D'H = DC'$$

Puis j'ai essayé de faire des "liens" :

$$50 - A'B = AA' = x$$

$$26 - AD' = DD' = y$$

$$50 - AA' = A'B = y$$

Puis j'ai fait du calcul littéral :

$$578 = x^2 + (26-x)(50-x)$$

$$x = 19$$

Donc l'aire du carré est :

$$c \times c$$

$$19 \times 19$$

$$361 \text{ m}^2$$

Ma démarche c'est arrêtée à là.

Un exemple de production intégrale d'élève illustrant ce qui s'est le plus souvent passé, à savoir l'utilisation de Wxmaxima pour résoudre l'équation  $2x^2 - 76x + 1300 = 578$

$$A_1 = L \times l$$
$$A_1 = 50 \times 26$$
$$A_1 = 1300 \text{ m}^2$$

- Puis je vais nommer  $x$  la longueur  $[A'B]$ . Comme  $[A'B]$  est un carré donc  $A'B = HB' = C'C = A'H = B'B = x$
- Je vais ensuite calculer l'aire des surfaces en j'achère.

$$A_2 = c \times c$$

$$A_2 = x \times x$$
$$A_2 = x^2 \quad \text{L'aire du carré } A'BHB' \text{ est } x^2 \text{ m}^2$$

- Maintenant je calcule l'aire du rectangle  $DCHD'$

$$A_3 = L \times l$$

$$A_3 = (50 - x)(26 - x)$$

$$A_3 = 50 \times 26 - 50 \times x - x \times 26 - x \times (-x)$$

$$A_3 = 1300 - 50x - 26x + x^2$$

$$A_3 = 1300 - 76x + x^2 \text{ m}^2$$

- Pour avoir l'aire de la surface en j'achère :

$$A_4 = (1300 - 76x + x^2) + x^2$$

$$A_4 = 1300 - 76x + x^2 + x^2$$

$$A_4 = 1300 - 76x + 2x^2 \text{ m}^2$$

- Equation pour trouver la valeur de  $x$  lorsque la partie hachurée est égale à  $578 \text{ m}^2$  à l'aide du logiciel wxMaxima :

$$578 = 1300 - 76x + 2x^2$$

Grâce au logiciel wxMaxima nous avons pu trouver la solution au problème.

Ceci nous a donné donc  $x = 19$

- Conclusion :

Jean peut placer le point  $H$ , tel que l'aire de la surface hachurée en j'achère égale à  $578 \text{ m}^2$

Un exemple de production intégrale d'élève menant à bien le problème sans l'aide d'aucun logiciel (les fois précédentes, cet élève avait besoin de WxMaxima pour s'aider, mais ses compétences de calcul ont maintenant beaucoup progressé).

Alors, j'ai commencé la recherche dans mon coin:  
- J'ai calculer l'aire du champ:  $A = 50 \times 26$   
 $A = 1300$

Ensuite, j'ai mis la situation en équation:

Soit  $x$ , la longueur du côté du carré;  $A_H$ : l'aire de la partie hachurée:

$$A_H = c \times c + L \times l$$

$$578 = x^2 + (50-x) \times (26-x)$$

$$578 = x^2 + 1300 - 76x + x^2$$

$$578 = 2x^2 - 76x + 1300$$

$$578 - 1300 = 2x^2 - 76x$$

$$\frac{-722}{2} = x^2 - 38x$$

$$-361 = x^2 - 38x$$

$$0 = x^2 - 38x + 361$$

$$0 = x^2 - 2 \times x \times 19 + 19^2$$

$$0 = (x - 19)^2$$

$$x - 19 = 0$$

$$x = 19 \text{ m}$$

Donc, tel que  $HB' = 19 \text{ m}$ , sur la droite  $D'B'$ , l'aire de la surface en hachure est égale à  $578 \text{ m}^2$ .

Vérification:

$$A_H = c \times c + L \times l$$

$$A_H = 19^2 + (50-19) \times (26-19)$$

$$A_H = 361 + 31 \times 7$$

$$A_H = 361 + 217$$

$$A_H = 578 \text{ m}^2$$

Donc  $\therefore$  peut placer le point H.  
Jean

## **ANNEXE**

On trouvera en annexe :

- Le document « élève ».
- Le document présenté à l'issue de la tâche complexe aux élèves et présentant une méthode experte de résolution. Ce document synthétique sert de bilan et de référence aux élèves et est collé dans le cahier d'exercices. Il peut être utilisé à l'occasion pour de futures activités.

## Tâche complexe : Le champ de Jean.

Nom :

Prénom :

Classe :

Noms des autres élèves qui ont collaboré pendant la phase de recherche :

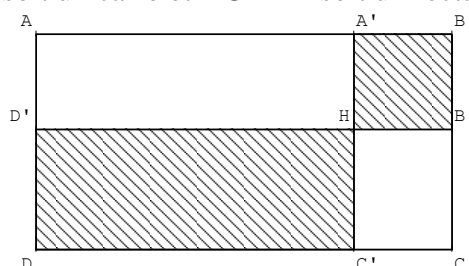
### Énoncé

Jean possède un champ rectangulaire qu'il souhaite diviser en 4 parcelles dont une parcelle carrée. Ainsi, il entreprendra des cultures diverses sur deux des parcelles et laissera les deux autres parcelles (dont la parcelle carrée) en jachère.

Jean schématise la situation ci-dessous et hachure les deux parcelles qui seront en jachère.

Le champ est un rectangle  $ABCD$  tel que  $AB = 50$  m et  $AD = 26$  m.

Sur le schéma, les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  appartiennent respectivement aux segments  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$ , de telle sorte que  $A'BB'H$  soit un carré et  $DC'HD'$  soit un rectangle.



Jean peut-il placer le point  $H$  tel que l'aire de la surface en jachère soit égale à  $578 \text{ m}^2$  ?

SOCLE COMMUN	Auto-évaluation	Degré d'acquisition
C1 : Analyser l'information.		DA EA PA A
C2 : Calculer, réaliser, appliquer des consignes.		DA EA PA A
C3 : Reasonner, déduire.		DA EA PA A
C4 : Communiquer son résultat.		DA EA PA A
D2 : Nombres et calculs		DA EA PA A
D3 : Géométrie		DA EA PA A
D4 : Grandeurs et mesures		DA EA PA A
TIC : Utilisation de calculatrices, de logiciels. Préciser lesquels :		DA EA PA A
-		
-		
-		
I : Investissement		DA EA PA A

Rédaction individuelle de la solution :

## Tâche complexe : Le champ de Jean.

### Énoncé

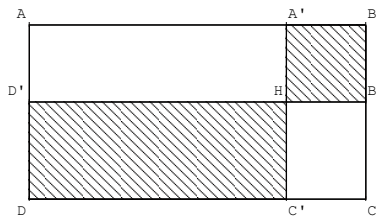
Jean possède un champ rectangulaire qu'il souhaite diviser en 4 parcelles dont une parcelle carrée.

Ainsi, il entreprendra des cultures diverses sur deux des parcelles et laissera les deux autres parcelles (dont la parcelle carrée) en jachère.

Jean schématise la situation ci-dessous et hachure les deux parcelles qui seront en jachère.

Le champ est un rectangle  $ABCD$  tel que  $AB = 50$  m et  $AD = 26$  m.

Sur le schéma, les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  appartiennent respectivement aux segments  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$ , de telle sorte que  $A'BB'H$  soit un carré et  $DC'HD'$  soit un rectangle.



Jean peut-il placer le point  $H$  tel que l'aire de la surface en jachère soit égale à  $578 \text{ m}^2$  ?

### Solution et commentaires

*Première étape : mise en équation du problème*

Soit  $x$  la longueur du côté du carré  $A'BB'H$ .

$$A_{A'BB'H} = x \times x$$

$$A_{DC'HD'} = L \times l$$

On a :  $A_{A'BB'H} = A'B \times A'B$  et

$$A_{DC'HD'} = D'H \times D'D$$

$$A_{A'BB'H} = x^2$$

$$A_{DC'HD'} = (50 - x)(26 - x)$$

On obtient l'équation suivante :

$$x^2 + (50 - x)(26 - x) = 578.$$

*Deuxième étape : résolution de l'équation*

On développe le membre de gauche de l'équation et on obtient :

$$x^2 + 50 \times 26 + 50 \times (-x) - x \times 26 - x \times (-x) = 578$$

$$x^2 + 1300 - 50x - 26x + x^2 = 578$$

$$2x^2 - 76x + 1300 - 578 = 0$$

$$2x^2 - 76x + 722 = 0$$

$$\frac{2x^2 - 76x + 722}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 - 38x + 361 = 0$$

$$(x - 19)^2 = 0$$

$$x - 19 = 0$$

$$x = 19$$

*Troisième étape : conclusion*

Pour disposer d'une surface en jachère de  $578 \text{ m}^2$ , Jean doit placer le point  $H$  de telle sorte que le carré  $A'BB'H$  ait 19 cm de côté.

*Remarques :*

Le logiciel Geoplan permet de conjecturer une solution.

Une fois le problème mis en équation, le tableur peut permettre de tester l'égalité  $x^2 + (50 - x)(26 - x) = 578$  pour trouver une solution.

Le logiciel WxMaxima peut aider à la résolution, soit directement en utilisant la fonction *solve*, soit pour des calculs intermédiaires avec les fonctions *expand* ou *factor*.

```
(%i4) solve(x^2+(50-x)*(26-x)=578);
(%o4) [x=19]

(%i5) expand((50-x)*(26-x));
(%o5) x^2-76x+1300

(%i6) factor(2*x^2-76*x+722);
(%o6) 2(x-19)^2
```