Tâche complexe « Des calculs surprenants »

a. Enoncé.

Sylvain et Stéphanie sont des passionnés de mathématiques.
Sylvain aime avant tout les nombres carrés ; Stéphanie, quant à elle, cherche à percer les mystères des nombres premiers.
Jérémy, souhaitant leur faire plaisir, leur propose une série de calculs :

$1\times2\times3\times4+1=25$

$2\times3\times4\times5+1=121$

$3\times4\times5\times6+1=361$

Quelles conjectures peuvent émettre les deux passionnés ?
Démontrer si celles-ci sont vraies ou fausses.

N.B.
Cette tâche complexe a été inspirée par la lecture de la brochure n°154 de l'APMEP : Pour un enseignement problématisé des mathématiques au lycée, tome 2 (Pages 161-162).

b. Contexte.

Cette tâche complexe est réalisée en $3^{ème}$ en classe entière .
Les élèves ont à leur disposition leurs cahiers, leurs manuels, un dictionnaire, leurs calculatrices personnelles ainsi que 3 ordinateurs sur lesquels sont notamment installés un logiciel de tableur ainsi que le logiciel de calcul formel WxMaxima.

c. Ce qui a été fait auparavant – Prérequis.

Cette tâche complexe s'intègre dans une **progression spiralée** où le calcul littéral est travaillé tout au long de l'année (voir scénario 1 pour davantage de détails).
La notion de nombre premier est généralement connue des élèves (mais non exigée).
Cette tâche complexe intervient une semaine après la tâche complexe « Petits calculs mais grande réflexion ! », le compte-rendu de la première tâche complexe a donc mis en lumière l'utilité que peuvent avoir les ordinateurs mis à disposition.

d. Objectifs et analyse a priori.

Objectifs :

- Analyser et comprendre un texte, émettre des conjectures.
- Production d'expressions littérales dans le but de démontrer une conjecture.
- Être capable d'infirmer une conjecture à l'aide d'un contre-exemple (utilisation d'une calculatrice ou d'un tableur).
- Être capable de factoriser une expression littérale au moyen d'un logiciel de calcul formel.
- Être capable de développer une expression littérale.

Analyse a priori :

Dans un premier temps, la lecture de l'énoncé devrait permettre aux élèves de **conjecturer** que les résultats obtenus sont des carrés de nombres premiers.
On peut penser qu'ils utiliseront également la **calculatrice pour tester** quelques exemples supplémentaires.
Les calculs étant répétitifs, on peut penser qu'ils vont vouloir recourir à **l'utilisation du tableur**.
Les premiers exemples leur montreront qu'une partie de la conjecture (celle relative aux nombres premiers) est fausse et leur montrera **l'utilité de l'outil informatique pour infirmer une conjecture.**
Lors de la phase de conjecture, on peut aussi s'attendre à ce que des élèves fassent des observations supplémentaires comme celles que le nombre élevé au carré s'obtient en multipliant les deux entiers consécutifs situés au centre de la série des quatre entiers consécutifs et en soustrayant 1.

(Variante : le nombre élevé au carré s'obtient en multipliant le plus petit des quatre entiers consécutifs par le plus grand et en ajoutant 1.)

Dans un second temps, lorsque les élèves seront convaincus du fait que les résultats sont des carrés des nombres entiers, ils entreront dans une **phase de preuve**. Le contexte des activités précédentes les amènera très probablement au **calcul littéral** et ils devraient arriver à une expression littérale du type $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$. Devant la complexité du calcul à mener, les élèves devraient manifester la volonté de **factoriser l'expression** obtenue à l'aide de WxMaxima. Grâce à la fonction « factor », ils trouveront une expression littérale du type $(n^2+3n+1)^2$. Les élèves les plus à l'aise pourront alors développer à la main les expressions $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ et $(n^2+3n+1)^2$ en vue de vérifier les calculs (**différenciation du travail**).

Les élèves ayant précisé dans leur conjecture comment s'obtient le nombre élevé au carré à partir des quatre entiers consécutifs pourront alors pour terminer effectuer le développement de $(n+1)(n+2)-1$ ou de $n(n+3)+1$ et ainsi vérifier qu'ils obtiennent bien n^2+3n+1.

Cette activité a priori très (trop même) technique en 3^{e} montrera aux élèves l'intérêt de divers logiciels (tableur, calcul formel) dans le but de résoudre des problèmes de mathématiques. Cette tâche complexe préparera la transition avec le lycée avec la montée des exigences en 2nde puis en 1ère.

De manière générale, cette tâche complexe a pour but de faire travailler les élèves dans le cadre du **socle commun (compétences 1, 3, 4, 6 et 7)**.

Ceci est porté à la connaissance des élèves à l'aide de la grille d'évaluation simplifiée suivante :

SOCLE COMMUN	Auto-évaluation	Degré d'acquisition
C1 : Analyser l'information.		DA EA PA A
C2 : Calculer, réaliser, appliquer des consignes.		DA EA PA A
C3 : Raisonner, déduire.		DA EA PA A
C4 : Communiquer son résultat.		DA EA PA A
D2 : Nombres et calculs		DA EA PA A
TIC : Utilisation de calculatrices, de logiciels. Préciser lesquels : - - -		DA EA PA A
I : Investissement		DA EA PA A

(DA : début d'acquisition, EA : en cours d'acquisition, PA : presque acquis, A : acquis.)

e. Différentes phases du déroulement en classe.

Durée approximative : 1h30 + 15 min

Phases	*Rôle du professeur*	*Rôles de l'élève*
Phase 1 : 5 min ***Lancement de la tâche complexe***	*Présenter les différentes phases aux élèves, leur préciser qu'ils ont le droit à différents supports (papier, calculatrice, informatique…).* *Lire l'énoncé aux élèves.* *S'assurer qu'aucun mot ne fait obstacle.* *Présenter la grille d'évaluation (voir plus loin).*	*Prendre connaissance du problème et du contexte de travail.* *Poser des questions concernant la compréhension du sujet.*
Phase 2 : 10 min ***Recherche individuelle***	*Observer les réponses d'élèves.* *Inciter les élèves à laisser traces de tous leurs essais mais ne pas intervenir pour une quelconque aide.*	*Débuter la résolution du problème éventuellement sous forme d'une narration de recherche.*
Phase 3 : 1h/1h05 ***Travail de groupe*** ***(groupes de 3 à 4 élèves)***	*Observer les différentes stratégies adoptées dans chaque groupe.* *Proposer des aides (voir ci-dessous) si les élèves bloquent et avec parcimonie.* *Amener les groupes à s'exprimer sur l'avancée de leurs recherches.*	*Echanger, discuter des diverses solution, stratégies.* *Utiliser éventuellement les logiciels mis à disposition.* *Rédiger individuellement une solution suite aux divers échanges.* *S'auto-évaluer.*
Phase 4 : 10/15 min ***Mise en commun des productions – Débat***	*Scanner des productions d'élèves et les projeter.* *Orchestrer le débat en agençant dans un ordre précis les diverses productions.* *Bien demander aux élèves quels outils ils ont utilisés (manuel, instrumentés…) et pourquoi ?*	*S'organiser pour un compte-rendu oral aidé des productions projetées.* *Pour les élèves qui écoutent le compte-rendu d'un groupe, intervenir en cas de sollicitation pour compléter ce qui a été présenté, faire des remarques.*
Phase 5 : 15 min ***Synthèse – Solution*** ***(la séquence suivante)***	*Projeter quelques exemples supplémentaires.* *Présenter une solution « experte » totalement rédigée.*	*Poser des questions.*

f. Blocage et aides éventuelles.

Les aides doivent être formulées sous forme de questions, en permettant toujours une réflexion de la part de l'élève. Elles doivent **être différenciées suivant l'interlocuteur** et délivrées avec parcimonie en essayant le plus possible de ne pas induire la démarche de résolution et favoriser ainsi la réflexion, l'autonomie et l'initiative.

Certaines sont prévues à l'avance et sont données sous forme de bandelettes aux élèves concernés.
En voici ici des exemples :

Aide 1 : Peux-tu souligner et expliquer les mots importants ?
Aide 2 : As-tu pensé à faire plusieurs exemples ?
Aide 3 : Quelles leçons peuvent t'aider à justifier le résultat en général ?
Aide 4 : Quels logiciels utiles pour t'aider à accomplir cette tâche complexe connais-tu ?
Aide 5 : Un nombre premier est un nombre entier positif qui n'admet que deux diviseurs : 1 et lui-même. Peux-tu étoffer ta conjecture ?

g. Proposition d'une grille d'évaluation détaillée.

C1 : Analyser l'information. /3	Compréhension de la consigne (recherche manifeste d'au moins une conjecture). Compréhension de la consigne (souhait manifeste de démontrer, idée d'introduire du calcul littéral).	/1 /2 (1+1)
C2 : Calculer, réaliser, appliquer des consignes. /3 L'évaluation ci-contre dépasse les 3pts (possibilité de bonus).	Mener avec succès une ou des séries de calculs supplémentaires. Développer une expression littérale (dans un souci de vérification de la factorisation réalisée avec WxMaxima, factorisation qui est ici évaluée dans la partie TIC). Développer une expression littérale (cas de la conjecture approfondie).	/2 /3 (1,5 point par expression littérale) /1
C3 : Raisonner, déduire. /5 L'évaluation ci-contre dépasse les 5 pts (possibilité de bonus).	Emettre une conjecture correcte (conjecture du type « on obtient le carré d'un nombre »). Conjectures supplémentaires Infirmer une conjecture à l'aide d'un contre-exemple. Production d'une expression littérale correcte correspondant à la série de calculs et relative à la conjecture supplémentaire.	/2 1 point par conjecture correcte. /1 /3 (2+1)
C4 : Communiquer son résultat. /2	Rédaction correcte des calculs. Rédaction des explications et conclusions.	/1 /1
D2 : Nombres et calculs.	L'élève connaît-il le vocabulaire de base (carré d'un nombre, notion de nombre premier) ? A-t-il des connaissances de base en calcul littéral ?	2 pts au maximum peuvent être attribués ici dans le cas où l'élève ne maîtrise que très partiellement C2/C3.
TIC /4 4 points au maximum seront attribués pour les compétences TIC.	Utiliser une calculatrice. Utiliser un logiciel de tableur pour émettre une conjecture (et éventuellement l'infirmer). Utiliser efficacement un logiciel de calcul formel (pour factoriser une expression, vérifier les calculs ou pour s'aider dans les calculs).	/1 /3 /3
I : Investissement /3	Respecter les règles de la vie collective et respecter tous les autres, notamment durant les travaux de groupes et la phase de restitution. (écoute de chacun, respect des différentes phases) Être persévérant lors de la phase individuelle de recherche. (traces de la recherche initiale, efforts remarqués) S'impliquer dans un projet collectif. (échange des idées, bonne organisation du groupe, initiatives, qualité de la restitution) Savoir s'autoévaluer.	/0,5 /1 /1 (Bonus éventuel de 1 pt pour la restitution) /0,5

h. Analyse a posteriori.

Cette tâche complexe a été testée le 2/03/2012 dans deux classes de 3ème comportant chacune 26 élèves.
Ces deux classes du Collège Jean Le Toullec au Port (classé ECLAIR) sont plutôt de bon niveau mais demeurent hétérogènes. 42 élèves étaient présents au moment de l'expérimentation.
Après une phase individuelle de 10 minutes, les élèves ont travaillé en groupes de 3 ou 4 élèves en rédigeant individuellement leurs réponses.
La séquence a duré en tout 1h30 permettant en fin de séquence la restitution du travail d'au moins un groupe. Un compte-rendu plus général des productions ainsi que des éléments de correction ont été réalisés le cours suivant.

Petit bilan de l'utilisation des TIC
Parmi les 42 élèves présents, tous ont utilisé une calculatrice et 39 élèves ont utilisé un des logiciels mis à disposition : 8 élèves ont utilisé un tableur, 31 ont utilisé un logiciel de calcul formel (WxMaxima), aucun élève n'a utilisé plus d'un logiciel.
Tous les élèves ayant utilisé le tableur l'ont fait avec succès mais sont restés dans leurs productions écrites au niveau de conjectures plus ou moins poussées (4 de ces élèves ne font d'ailleurs aucune référence au calcul littéral). Les élèves ayant utilisé le tableur cette fois-ci ne l'avaient pas fait lors de la première tâche complexe.

Concernant le logiciel de calcul formel, 27 élèves ont utilisé l'outil avec efficacité, pour factoriser l'expression $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ (ou une expression analogue du type $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1$) et ainsi vérifier que leur conjecture était correcte. Ces 27 élèves ont constaté ainsi la puissance de l'outil mis à disposition sans lequel ils n'auraient pu avancer.
Les 3 élèves qui n'ont utilisé aucun logiciel, ont passé beaucoup de temps sur la phase de conjecture et ont tenté sans succès de développer $n(n+1)(n+2)(n+3)$. Le compte-rendu réalisé en classe devrait les motiver la prochaine fois.

Petit bilan de l'activité
Tous les élèves (42) ont établi une conjecture correcte et 38 élèves ont pensé à utiliser le calcul littéral : sur les 25 élèves ayant vérifié avec succès leurs conjectures à l'aide de WxMaxima, 7 élèves plus avancés ont ensuite entrepris avec succès les calculs à la main en développant séparément $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ et $(n^2+3n+1)^2$, utilisant pour la plupart WxMaxima pour vérifier certains calculs intermédiaires. 4 élèves n'ont eu le temps que de développer avec succès $(n^2+3n+1)^2$.
Aucun élève ne s'est interrogé si les carrés obtenus étaient ceux de nombres premiers comme pouvaient le laisser penser les premiers exemples. Un seul élève a demandé des précisions concernant les nombres premiers. D'autres ont confondu tout simplement « nombres premiers » et « premiers nombres entiers naturels » comme cela peut se voir sur l'une des productions réalisées au tableur. Le compte-rendu en classe sera l'occasion de se pencher sur l'étude de cette conjecture et de rechercher un contre-exemple.

Aperçu de la variété des recherches et de la formulation des conjectures
Extrait de production n°1

J'ai trouvé cette conjecture : Si on multiplie 4 nombres entiers consécutifs et qu'on ajoute 1, alors le résultat est égal à un carré.

Extrait de production n°2

1ère étape : Rechercher.

$1\times2\times3\times4+1=25$ $\quad \sqrt{25}=5$ $\quad +6$ $\quad +2$

$2\times3\times4\times5+1=121$ $\quad \sqrt{121}=11$ $\quad +8$ $\quad +2$

$3\times4\times5\times6+1=361$ $\quad \sqrt{361}=19$ $\quad +10$ $\quad +2$

$4\times5\times6\times7+1=841$ $\quad \sqrt{841}=29$ $\quad +12$ $\quad +2$

$5\times6\times7\times8+1=1681$ $\quad \sqrt{1681}=41$ $\quad +14$ $\quad +2$

$6\times7\times8\times9+1=3025$ $\quad \sqrt{3025}=55$ $\quad +16$ $\quad +2$

$7\times8\times9\times10+1=5041$ $\quad \sqrt{5041}=71$ $\quad +18$ $\quad +2$

$8\times9\times10\times11+1=7921$ $\quad \sqrt{7921}=89$ $\quad +20$ $\quad +2$

$9\times10\times11\times12+1=11881$ $\quad \sqrt{11881}=109$

Extrait de production n°3

En enlevant la première et la quatrième colonne, puis en remplaçant +1 par −1 on trouve la racine carré de la somme trouvé.

* $2\times3-1=5$ $\qquad$ * $\sqrt{25}=5$
* $3\times4-1=11$ $\qquad$ * $\sqrt{121}=11$
* $4\times5-1=19$ $\qquad$ * $\sqrt{361}=19$

Extrait de production n°4

* En conclusion, les conjectures sont vraies, le produit de 4 nombres consécutifs ajouté de 1 donne un nombre carré et ce carré est égal à la somme du carré du premier des quatres nombres, du triple de ce même nombre et de 1.

N.B. Le dernier exemple a été affiné suite à l'utilisation de WxMaxima.

Deux copies d'écran de tableurs

	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	25	5
2	2	3	4	5	121	11
3	3	4	5	6	361	19
4	4	5	6	7	841	29
5	5	6	7	8	1681	41
6	6	7	8	9	3025	55
7	7	8	9	10	5041	71
8	8	9	10	11	7921	89
9	9	10	11	12	11881	109
10	10	11	12	13	17161	131
11	11	12	13	14	24025	155
12	12	13	14	15	32761	181
13	13	14	15	16	43681	209
14	14	15	16	17	57121	239
15	15	16	17	18	73441	271
16	16	17	18	19	93025	305
17	17	18	19	20	116281	341
18	18	19	20	21	143641	379
19	19	20	21	22	175561	419

Dans la cellule E1, les élèves ont saisi « =A1*B1*C1*D1+1 » avant d'étendre la formule au reste de la colonne.
Dans la cellule F1, les élèves ont saisi « =RACINE(E1) » avant d'étendre la formule au reste de la colonne.

	A	B	C	D
1	nombres premiers	nombres carrés	rcne cré ds rsltt	
2	1	25	5	
3	2	121	11	6
4	3	361	19	8
5	4	841	29	10
6	5	1681	41	12
7	6	3025	55	14
8	7	5041	71	16
9	8	7921	89	18
10	9	11881	109	20
11	10	17161	131	22
12	11	24025	155	24
13	12	32761	181	26
14	13	43681	209	28
15	14	57121	239	30
16	15	73441	271	32
17	16	93025	305	34
18	17	116281	341	36
19	18	143641	379	38
20	19	175561	419	40
21	20	212521	461	42

Dans la cellule B2, les élèves ont saisi « =A2*A3*A4*A5+1 » avant d'étendre la formule au reste de la colonne.
Dans la cellule C2, les élèves ont saisi « =RACINE(B2) » avant d'étendre la formule au reste de la colonne.
Dans la cellule D3, les élèves ont saisi « =C3-C2 » avant d'étendre la formule au reste de la colonne.

Quatre exemples de copies d'écran de WxMaxima

```
(%i1) 1*(1+1)*(1+2)*(1+3)+1;
(%o1) 25
(%i2) factor(1*(1+1)*(1+2)*(1+3)+1 );
(%o2) 5^2
(%i3) n*(n+1)*(n+2)*(n+3)+1;
(%o3) n(n+1)(n+2)(n+3)+1
(%i4) factor(%);
(%o4) (n^2+3 n+1)^2
```

```
(%i1) expand((n+1)*(n+2)*(n+3)*(n+4)+1);
(%o1) n^4+10 n^3+35 n^2+50 n+25
(%i2) factor(n^4+10*n^3+35*n^2+50*n+25);
(%o2) (n^2+5 n+5)^2
```

```
(%i1) expand((n+1)*((n+1)+1)- 1);
(%o1) n^2+3 n+1
(%i2) expand((n^2+3*n+1)^2);
(%o2) n^4+6 n^3+11 n^2+6 n+1
(%i3) expand(n*(n+1)*((n+1)+1)*(((n+1)+1)+1)+1);
(%o3) n^4+6 n^3+11 n^2+6 n+1
```

N.B. Cet exemple fait suite à la conjecture présentée plus haut (production n°3).

```
(%i1) n^2*3*n;
(%o1) 3 n^3
(%i2) n^2*n^2;
(%o2) n^4
(%i3) n^2*1;
(%o3) n^2
(%i4) 3*n*n^2;
(%o4) 3 n^3
(%i5) 3*n*3*n;
(%o5) 9 n^2
```

N.B. Dans cet exemple, l'élève s'aide du logiciel pour développer pas à pas l'expression $\left(n^2+3n+1\right)^2$.

Production brute intégrale d'un élève

* Avant les 10 minutes, on a cherché chacun de son côté pour trouver la conjecture.

Individuellement j'ai trouvé : $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25$
$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121$
$3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 361$
$4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841$
$5 \times 6 \times 7 \times 8 + 1 = 1681$

Puis j'étaut en trin de reflechir sur les resultats si il y avait quelque chose en commun.

* Aprés les 10 minutes passées, on a rassemblé nos idée.

On a conjecturé que $4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841$.
On a remarqué que $\sqrt{841} = 29$ donc le carré de 29 est égal à 841.
Pour finir la conjecture on a fait avec des lettres, pour conclure la conjecture voici les calcule :

$$A = \underbrace{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1 = y^2}$$

On est parti sur Wx maxima pour conjecturé si tous ce calcul et égale a un carré.

on a démontré avec le logiciel ce calcul :
expand ((n+1)*(n+2)*(n+3)*(n+4)+1);
$n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 25$

factor (n^4+10*n^3+35*n^2+50*n+25);
$(n^2+5n+5)^2$

Donc ceci confirme que ce calcul est bien le carré d'un nombre et ce carré vaux: $(n^2+5n+5)^2$

Production brute intégrale d'une autre élève

Pendant les dix minutes de recherche j'ai commencé par analyser les calculs de l'énoncé. Je remarque que le calcul se compose de quatre nombres successifs plus 1. Comme le premier calcul de l'énoncé :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25$$

Puis j'ai eu l'idée de prendre quatre nombres successifs positif et de faire le calcul, cela donne :

$$4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841$$

J'ai constaté que l'on trouve le carré de 841 qui est 29.

Les dix minutes terminé nous avons mis nos travaux en commun.

Nous avons décidé de faire le calcul littéral suivant :

Soit n le plus petit des quatre nombres positifs successifs

$$n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3) + 1$$
$$(n^2 + 1n)(n^2 + 3n + 2n + 6) + 1$$
$$(n^2 + 1n)(n^2 + 5n + 6) + 1$$
$$n^4 + 5n^3 + 6n^2 + 1n^3 + 5n^2 + 6n + 1$$
$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$$

Mais avant de trouver la réponse nous sommes partis sur le logiciel Wx Maxima qui nous a donné la réponse : $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$

Puis nous avons dévellopé tout à la main et nous avons pu comparer avec la réponse de Wx Maxima pour voir si notre résultat est bon.

Grâce au logiciel Wx Maxima nous avons factorisé l'expression : $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$ ce qui donne : $(n^2 + 3n + 1)^2$

Je dévellope $(n^2 + 3n + 1)^2$ pour trouver l'expression $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$:

$$(n^2 + 3n + 1)^2$$
$$(n^2 + 3n + 1)(n^2 + 3n + 1)$$
$$n^4 + 3n^3 + 1n^2 + 3n^3 + 9n^2 + 3n + 1n^2 + 3n + 1$$
$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$$

Donc en conclusion nous avons :

$$n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

Grâce à la conclusion nous pouvons dire que lorsqu'on fait le produit de quatre nombres successifs positifs plus un on trouve un carré.

ANNEXE

On trouvera en annexe :

- Le document « élève ».
- Le document présenté à l'issue de la tâche complexe aux élèves et présentant une méthode experte de résolution. Ce document synthétique sert de bilan et de référence aux élèves et est collé dans le cahier d'exercices. Il peut être utilisé à l'occasion pour de futures activités.

Tâche complexe : Des calculs surprenants.

Nom : Prénom : Classe :

Noms des autres élèves qui ont collaboré pendant la phase de recherche :

Enoncé

Sylvain et Stéphanie sont des passionnés de mathématiques.
Sylvain aime avant tout les nombres carrés ; Stéphanie, quant à elle, cherche à percer les mystères des nombres premiers.
Jérémy, souhaitant leur faire plaisir, leur propose une série de calculs :

$$1\times2\times3\times4+1=25$$

$$2\times3\times4\times5+1=121$$

$$3\times4\times5\times6+1=361$$

Quelles conjectures peuvent émettre les deux passionnés ?
Démontrer si celles-ci sont vraies ou fausses.

SOCLE COMMUN	Auto-évaluation	Degré d'acquisition
C1 : Analyser l'information.		DA EA PA A
C2 : Calculer, réaliser, appliquer des consignes.		DA EA PA A
C3 : Raisonner, déduire.		DA EA PA A
C4 : Communiquer son résultat.		DA EA PA A
D2 : Nombres et calculs		DA EA PA A
TIC : Utilisation de calculatrices, de logiciels. Préciser lesquels : - - -		DA EA PA A
I : Investissement		DA EA PA A

Rédaction **individuelle** de la solution :

Tâche complexe : Des calculs surprenants.

Enoncé
Sylvain et Stéphanie sont des passionnés de mathématiques.
Sylvain aime avant tout les nombres carrés ; Stéphanie, quant à elle, cherche à percer les mystères des nombres premiers.
Jérémy, souhaitant leur faire plaisir, leur propose une série de calculs :

$$1\times2\times3\times4+1=25$$
$$2\times3\times4\times5+1=121$$
$$3\times4\times5\times6+1=361$$

Quelles conjectures peuvent émettre les deux passionnés ?
Démontrer si celles-ci sont vraies ou fausses.

Solution et commentaires

Première étape : phase de conjecture
On remarque que 25, 121 et 361 sont les carrés des nombres 5, 11 et 19.
En étudiant un calcul similaire, on obtient :
$4\times5\times6\times7+1=841$ et on remarque que $841=29^2$.
Une première conjecture serait donc « lorsqu'on multiplie quatre entiers consécutifs et qu'on ajoute 1, on obtient le carré d'un nombre ».
A la lecture des premiers calculs, on peut affiner la conjecture de deux manières différentes :
- Le nombre dont on obtient le carré s'obtient en multipliant les deux entiers consécutifs situés au centre de la série des quatre entiers consécutifs et en soustrayant 1.
- Il semble que l'on obtienne le carré de nombres premiers.

L'utilisation du tableur permet l'étude rapide d'un grand nombre d'exemples et permet ainsi de conforter ou pas les conjectures.
Le tableur permet en l'occurrence d'exhiber un **contre-exemple** qui montre que les carrés obtenus ne sont pas de manière générale les carrés nombres premiers.
En effet : $6\times7\times8\times9+1=3025=55^2$ mais 55 n'est pas un nombre premier car il admet 4 diviseurs : 1, 5, 11 et 55.

Seconde étape : démonstration à l'aide du calcul littéral
Soit *n* le plus petit des quatre entiers consécutifs.
Il s'agit donc maintenant de démontrer que l'expression littérale $E=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ est le carré d'un nombre. Il suffirait donc de factoriser cette expression.
L'utilisation de WxMaxima est impérative ici, vu la difficulté du calcul.
Grâce à la fonction *factor*, on obtient :

```
(%i2) factor(n*(n+1)*(n+2)*(n+3)+1);
(%o2) (n^2+3 n+1)^2
```

Le logiciel nous montre donc bien que lorsqu'on multiplie quatre entiers consécutifs et qu'on ajoute 1, on obtient le carré d'un nombre.
A la main, on peut vérifier les calculs en développant séparément $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ et en trouvant la même forme développée, à savoir $n^4+6n^3+11n^2+6n+1$.

$$E=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$
$$E=(n^2+n)(n^2+3n+2n+6)+1$$
$$E=(n^2+n)(n^2+5n+6)+1$$
$$E=n^4+5n^3+6n^2+n^3+5n^2+6n+1$$
$$E=n^4+6n^3+11n^2+6n+1$$

$$F=(n^2+3n+1)^2$$
$$F=(n^2+3n+1)(n^2+3n+1)$$
$$F=n^4+3n^3+n^2+3n^3+9n^2+3n+n^2+3n+1$$
$$F=n^4+6n^3+11n^2+6n+1$$

Enfin, on vérifie la dernière partie de la conjecture en développant :
$$A=(n+1)(n+2)-1$$
$$A=n^2+2n+n+2-1$$
$$A=n^2+3n+1$$
Le nombre qui est élevé au carré s'obtient donc bien en multipliant les deux entiers consécutifs centraux et en soustrayant 1.