Tâche complexe « Petits calculs mais grande réflexion ! »

a. Enoncé.

Choisis deux nombres dont la différence est 40.
Calcule le produit de ces deux nombres.

Considérant tes deux nombres choisis, soustrais 2 au plus grand des deux, ajoute 2 au plus petit des deux.
Calcule le produit des deux nouveaux nombres obtenus.

De combien ce produit a-t-il augmenté par rapport au produit initial ? Est-ce toujours le cas ?

b. Contexte.

Cette tâche complexe est réalisée en 3ème en classe entière .
Les élèves ont à leur disposition leurs cahiers, leurs manuels, un dictionnaire, leurs calculatrices personnelles ainsi que 3 ordinateurs sur lesquels sont notamment installés un logiciel de tableur ainsi que le logiciel de calcul formel WxMaxima.

c. Ce qui a été fait auparavant – Prérequis.

Cette tâche complexe s'intègre dans une **progression spiralée** où le calcul littéral est travaillé tout au long de l'année.
Durant la première période (rentrée d'août à début octobre), le calcul littéral de niveau 4^{e} a régulièrement été réinvesti notamment en devoir à la maison. Une semaine complète a également été consacrée aux équations et notamment à la mise en équations de problèmes.
Des exercices relatifs aux programmes de calcul ont été travaillés en classe, à la maison (dont l'un sous forme de narration de recherche) et ont aussi été évalués en devoirs surveillés.
Durant la deuxième période (mi-octobre à mi-décembre), deux temps bien distincts ont été consacrés au calcul littéral, l'un sur le développement d'expressions littérales à l'aide des identités remarquables, l'autre sur la factorisation avec facteurs communs.
Durant la troisième période (fin janvier à début mars) et avant la passation de cette tâche complexe, deux temps bien distincts ont été consacrés au calcul littéral, l'un sur les factorisations avec identités remarquables, l'autre sur les équations-produits.

Des connaissances de 3^{e} ne sont pas nécessaires pour la résolution de cette tâche complexe, cependant une bonne expérience semble nécessaire, c'est pour cela qu'il a été choisi de la placer à ce moment de l'année, où bon nombre de notions relatives au calcul littéral de 3^{e} ont déjà été étudiées.

d. Objectifs et analyse a priori.

Objectifs :

- Analyser et comprendre un texte, émettre une conjecture.
- Production d'expressions littérales dans le but de démontrer une conjecture.
- Être capable de développer une expression littérale (simple et double distributivité).

Analyse a priori :

Le premier objectif ici est la **compréhension du programme de calcul proposé**.
On peut supposer que les élèves sont suffisamment familiarisés avec la gestion de tels programmes. Au travers de plusieurs calculs qui vont entretenir **la pratique du calcul mental, du calcul à la main et l'utilisation raisonnée des calculatrices**, les élèves devraient

rapidement être en mesure d'émettre la **conjecture** suivante : « le produit des deux nouveaux nombres augmente de 76 par rapport au produit initial ».
Certains voudront sans doute s'assurer de la solidité de leur conjecture en utilisant un logiciel de **tableur**. L'utilisation du tableur constitue également par le biais des formules créées en une aide dans la formalisation qui interviendra par la suite (d'où amélioration des compétences de calcul grâce aux TIC).
La conjecture établie, les élèves devront ensuite s'engager dans une phase de **démonstration**. Celle-ci est hors socle.
La première capacité visée est d'abord une **traduction du problème en deux expressions littérales** du type $I = x(x+40)$ et $F = (x+2)(x+38)$. Les élèves devront ensuite être capables de les **développer** (simple distributivité et double distributivité figurant respectivement aux programmes de 5$^{\text{ème}}$ et de 4$^{\text{ème}}$).
Les élèves pourront aussi, suivant leur manière d'aborder les calculs, être confrontés à un calcul littéral nécessitant une **suppression de parenthèses précédées du signe moins** (cas de l'étude de l'expression littérale $(x+2)(x+38) - x(x+40)$.
En fonction de leurs difficultés ou dans un souci de vérification, des élèves pourront émettre le souhait d'utiliser le logiciel de **calcul formel** WxMaxima.

De manière générale, cette tâche complexe a pour but de faire travailler les élèves dans le cadre du **socle commun (compétences 1, 3, 4, 6 et 7)**.
Ceci est porté à la connaissance des élèves à l'aide de la grille d'évaluation simplifiée suivante :

SOCLE COMMUN	Auto-évaluation	Degré d'acquisition
C1 : Analyser l'information.		DA EA PA A
C2 : Calculer, réaliser, appliquer des consignes.		DA EA PA A
C3 : Raisonner, déduire.		DA EA PA A
C4 : Communiquer son résultat.		DA EA PA A
D2 : Nombres et calculs		DA EA PA A
TIC : Utilisation de calculatrices, de logiciels. Préciser lesquels : - - -		DA EA PA A
I : Investissement		DA EA PA A

(DA : début d'acquisition, EA : en cours d'acquisition, PA : presque acquis, A : acquis.)

e. Différentes phases du déroulement en classe.

Durée approximative : 1h30 + 15 min

Phases	***Rôle du professeur***	***Rôles de l'élève***
Phase 1 : 5 min ***Lancement de la tâche complexe***	*Présenter les différentes phases aux élèves, leur préciser qu'ils ont le droit à différents supports (papier, calculatrice, informatique…).* *Lire l'énoncé aux élèves.* *S'assurer qu'aucun mot ne fait obstacle.* *Présenter la grille d'évaluation (voir plus loin).*	*Prendre connaissance du problème et du contexte de travail.* *Poser des questions concernant la compréhension du sujet.*
Phase 2 : 10 min ***Recherche individuelle***	*Observer les réponses d'élèves.* *Inciter les élèves à laisser traces de tous leurs essais mais ne pas intervenir pour une quelconque aide.*	*Débuter la résolution du problème éventuellement sous forme d'une narration de recherche.*
Phase 3 : 1h/1h05 ***Travail de groupe*** ***(groupes de 3 à 4 élèves)***	*Observer les différentes stratégies adoptées dans chaque groupe.* *Proposer des aides (voir ci-dessous) si les élèves bloquent et avec parcimonie.* *Amener les groupes à s'exprimer sur l'avancée de leurs recherches.*	*Echanger, discuter des diverses solution, stratégies.* *Utiliser éventuellement les logiciels mis à disposition.* *Rédiger individuellement une solution suite aux divers échanges.* *S'auto-évaluer.*
Phase 4 : 10/15 min ***Mise en commun des productions – Débat***	*Scanner des productions d'élèves et les projeter.* *Orchestrer le débat en agençant dans un ordre précis les diverses productions.* *Bien demander aux élèves quels outils ils ont utilisés (manuel, instrumentés…) et pourquoi ?*	*S'organiser pour un compte-rendu oral aidé des productions projetées.* *Pour les élèves qui écoutent le compte-rendu d'un groupe, intervenir en cas de sollicitation pour compléter ce qui a été présenté, faire des remarques.*
Phase 5 : 15 min ***Synthèse – Solution*** ***(la séquence suivante)***	*Projeter quelques exemples supplémentaires.* *Présenter une solution « experte » totalement rédigée.*	*Poser des questions.*

f. Blocage et aides éventuelles.

Les aides doivent être formulées sous forme de questions, en permettant toujours une réflexion de la part de l'élève. Elles doivent **être différenciées suivant l'interlocuteur** et délivrées avec parcimonie en essayant le plus possible de ne pas induire la démarche de résolution et favoriser ainsi la réflexion, l'autonomie et l'initiative.

Certaines sont prévues à l'avance et sont données sous forme de bandelettes aux élèves concernés.
En voici ici des exemples :
Aide 1 : Peux-tu souligner et expliquer les mots importants ?
Aide 2 : As-tu pensé à faire plusieurs exemples ?
Aide 3 : Quelles leçons peuvent t'aider à justifier le résultat en général ?
Aide 4 : Quels logiciels utiles pour t'aider à accomplir cette tâche complexe connais-tu ?

g. Proposition d'une grille d'évaluation détaillée.

C1 : Analyser l'information. /3	Compréhension de la première question (tentative de test du programme de calcul). Compréhension de la deuxième question (tentative d'un autre test, idée d'introduire du calcul littéral).	/1 /2 (1+1)
C2 : Calculer, réaliser, appliquer des consignes. /4	Application correcte du programme de calcul. Développement correct de $x(x+40)$. Développement correct de $(x+2)(x+38)$.	/2 /1 /1
C3 : Raisonner, déduire. /5	Emettre une conjecture correcte. Production d'expressions littérales correctes. Déduction finale suite au calcul littéral.	/2 /2 /1
C4 : Communiquer son résultat. /2	Rédaction correcte des calculs. Rédaction des explications et conclusions.	/1 /1
D2 : Nombres et calculs.	L'élève connaît-il le vocabulaire de base (différence, produit) ? Sait-il développer une expression littérale ?	2 pts au maximum peuvent être attribués ici dans le cas où l'élève ne maîtrise que très partiellement C2.
TIC /3 3 points au maximum seront attribués pour les compétences TIC. (Attribuer les 3 points aux élèves ayant mené avec succès la tâche complexe sans aucun logiciel.)	Utiliser une calculatrice. Utiliser un logiciel de tableur pour émettre une conjecture. Utiliser efficacement un logiciel de calcul formel (pour vérifier les calculs ou pour s'aider dans les calculs).	/1 /3 /2
I : Investissement /3	Respecter les règles de la vie collective et respecter tous les autres, notamment durant les travaux de groupes et la phase de restitution. (écoute de chacun, respect des différentes phases) Être persévérant lors de la phase individuelle de recherche. (traces de la recherche initiale, efforts remarqués) S'impliquer dans un projet collectif. (échange des idées, bonne organisation du groupe, initiatives, qualité de la restitution) Savoir s'autoévaluer.	/0,5 /1 /1 (Bonus éventuel de 1 pt pour la restitution) /0,5

h. Analyse a posteriori.

Cette tâche complexe a été testée le 24/02/2012 dans deux classes de 3ème comportant chacune 26 élèves.
Ces deux classes du Collège Jean Le Toullec au Port (classé ECLAIR) sont plutôt de bon niveau mais demeurent hétérogènes. 47 élèves étaient présents au moment de l'expérimentation.
Après une phase individuelle de 10 minutes, les élèves ont travaillé en groupes de 3 ou 4 élèves en rédigeant individuellement leurs réponses.
La séquence a duré en tout 1h30 permettant en fin de séquence la restitution du travail d'au moins un groupe. Un compte-rendu plus général des productions ainsi que des éléments de correction ont été réalisés le cours suivant.

Petit bilan de l'utilisation des TIC

Parmi les 47 élèves présents, tous ont utilisé une calculatrice et 30 élèves ont utilisé un des logiciels mis à disposition : 11 élèves ont utilisé un tableur, 19 ont utilisé un logiciel de calcul formel (WxMaxima), aucun élève n'a utilisé plus d'un logiciel.
Tous les élèves ayant utilisé le tableur l'ont fait avec succès.
Concernant le logiciel de calcul formel, 11 élèves seulement ont réellement utilisé l'outil avec efficacité, principalement pour vérifier leurs résultats, ou pour devancer des calculs qu'ils ont été capables de faire sans problème ensuite à la main.

Petit bilan de l'activité

Tous les élèves ont établi une conjecture correcte et 43 élèves ont pensé à utiliser le calcul littéral : 24 ont démontré parfaitement la conjecture, 8 n'étaient pas très loin de la solution (petites erreurs de calcul littéral), 11 élèves ont éprouvé davantage de difficultés parmi lesquels 7 élèves ayant utilisé le tableur (et dont certains ont par la suite manqué de temps).
4 élèves, multipliant les exemples, n'ont pas du tout engagé l'idée même d'une preuve au moyen du calcul littéral, concluant par exemple ainsi :

Après ces plusieur exemple, je comfirme que c'est toujours le cas.

Extrait d'une production d'un élève ayant utilisé le tableur

*Ensuite on a décider de confirmer nos résultats sur le tableur.
On est passé plusieurs temps sur l'ordinateur pour en approfondir nos recherche on a essayer avec 40 différence de 40 et pour les tous les résultats on a trouvé 76.

	A	B	C	D	E	F	G
1	premier nombre	Deuxieme nombre	Produit des 2 nombre	ajout de 2 pour le plus petit nombre	soustrais de 2 pour le grand nombre	Multiplication des deux nombres obtenu	Augmentation de :
2	80	40	3200	42	78	3276	76
3	79	39	3081	41	77	3157	76
4	78	38	2964	40	76	3040	76
5	77	37	2849	39	75	2925	76
6	76	36	2736	38	74	2812	76
7	75	35	2625	37	73	2701	76
8	74	34	2516	36	72	2592	76
9	73	33	2409	35	71	2485	76
10	72	32	2304	34	70	2380	76
11	71	31	2201	33	69	2277	76
12	70	30	2100	32	68	2176	76
13	69	29	2001	31	67	2077	76
14	68	28	1904	30	66	1980	76
15	67	27	1809	29	65	1885	76
16	66	26	1716	28	64	1792	76
17	65	25	1625	27	63	1701	76
18	64	24	1536	26	62	1612	76
19	63	23	1449	25	61	1525	76
20	62	22	1364	24	60	1440	76
21	61	21	1281	23	59	1357	76
22	60	20	1200	22	58	1276	76

Mais l'élève en question ne parvient pas à démontrer le résultat :

* Ensuite on a essayer de savoir si c'était une solution général en ... ... démontrant avec un calcul littéral avec des lettre inconnues.

mais comme on a pas trouvé on ne sait pas si c'est le cas pour tous les nombres.

N.B. Parmi les élèves ayant utilisé le tableur, plus de la moitié ont considéré sur le coup que l'ordinateur était suffisant pour démontrer la conjecture observée (voir vidéos). Il a fallu revenir sur ce point lors du cours suivant lors du compte-rendu général.

<u>Extrait d'une production faisant référence à WxMaxima</u>

Ensuite, notre groupe est allé sur l'ordinateur et on a utilisé le logiciel Wxmaxima, pour vérifier si notre calcul était bon, donc on a cliqué sur "développer une expression" et la fonction "expand" est apparue. Après cela on a écrit le calcul : (((2+n)×((n+40)-2))); dans les parenthèses et pour calculer l'expression on a cliqué sur "évaluer l'entrée", et nous avons obtenu : $n^2+40n+76$ ce qui confirme notre calcul. Enfin, comme "n" peut être n'importe quel nombre, et que $n^2+40n+76$ est en fait le premier produit des deux nombres qu'on a choisi au début c'est-à-dire : $n\times(n+40)=n^2+40n$ plus le 76, donc 76 est la différence dans tous les cas.

```
(%i1) expand(((n+2)*((n+40)-2)));
(%o1) n^2+40 n+76
```

Production intégrale d'un élève

J'ai commencé à choisir 2 nombres dont la différence est 40 :

$80 - 40 = 40$

$80 \times 40 = 3200$

$80 - 2 = 78$ et $40 + 2 = 42$

$78 \times 42 = 3276$

$160 - 120 = 40$

$160 \times 120 = 19200$

$160 - 2 = 158$ et $120 + 2 = 122$

$158 \times 122 = 19276$

Le produit a augmenté de 76.

Soit x le plus grand nombre choisi et y la différence des produits.

J'ai fais cette équation :

$$(x-2)(x-40+2) = x(x-40)+y$$

$$(x-2)(x-38) = x^2 - 40x + y$$

$$x^2 - 38x - 2x + 76 = x^2 - 40x + y$$

$$x^2 - 40x + 76 = x^2 - 40x + y$$

$$-40x + 76 = -40x + y$$

$$y = 76$$

En conclusion :

Le produit a augmenté de 76 par rapport au produit initiale.

Oui c'est toujours le cas.

N.B. Dans le groupe de cet élève, tous ont opté pour une mise en équation du problème et ont cherché à déterminer la valeur de l'inconnue *y*. C'est ce qui les a gênés dans l'utilisation de WxMaxima, ils sont du coup revenus à un calcul à la main, réalisé avec succès.

```
(%i6) solve((x-2)*(x-40+2)=x*(x-40)+y);
solve: more unknowns than equations.
Unknowns given :
[y,x]
```

En effet, en classe, la fonction *solve* n'avait été utilisée préalablement que dans des équations comportant une unique inconnue (dans ce cas WxMaxima tolère que le nom de l'inconnue ne soit pas précisé).

Un exemple de deux productions au sein d'un même groupe, montrant la diversité des rédactions individuelles

*Les deux nombres choisis sont 80 et 40.

*Produit des deux nombres : *$80-2=78$ *$40+2=42$

$80\times40=3\,200$

*Produit des deux nouveaux nombres obtenus :

$78\times42=3\,276$

*Le produit a augmté de 76 : $3276-3200=76$.

*Soit n le nombre le plus grand et D la différence entre les deux nombres : $D=[(n-40+2)\times(n-2)]-[(n-40)\times n]$

$D=(n^2-2n-38n-38\times(-2)]-(n^2-40n)$

$D=(n^2-40n+76)-(n^2-40n)$

$D=n^2-40n+76-n^2+40n$

$D=76$ Donc, c'est toujours le cas.

J'ai divisé ce devoir en 2 parties : une partie "numérique" et une partie avec des calculs littérals.

Partie "numérique" :

*J'ai choisi les nombres 20 et 60 (car $60-20=40$)

*J'applique ensuite le programme de calcul :

- Produit des 2 nombres : $20\times60=1200$
- $60-2=58$; $20+2=22$
- Nouveau produit : $58\times22=1276$

*Je remarque que les deux produits ont une différence de 76 ; autrement dit, on ajoute 76 au produit initial pour obtenir le nouveau produit.

Partie "littérale" :

*Soit x le plus petit nombre. Donc le plus grand nombre est $x+40$ (car $x+40-40=x$)

*Programme de calcul :

- Produit des 2 nombres : $x(x+40)=x^2+40x$
- $(x+40)-2=x+40-2=x+38$; $x+2$
- Nouveau produit : $(x+38)(x+2)$

$=x^2+2x+38x+76$

$=x^2+40x+76$

J'en déduis que pour toute valeur de x, j'ajoute 76 au produit des 2 nombres choisis pour obtenir ce nouveau produit.

Ensuite, j'ai mis la situation en équation :

Soit x, la longueur du côté du carré ; A_H : l'aire de la partie hachuré :

$$A_H = c \times c + L \times l$$

$$578 = x^2 + (50-x) \times (26-x)$$

$$578 = x^2 + 1300 - 76x + x^2$$

$$578 = 2x^2 - 76x + 1300$$

$$578 - 1300 = 2x^2 - 76x$$

$$-\frac{722}{2} = x^2 - 38x$$

$$-361 = x^2 - 38x$$

$$0 = x^2 - 38x + 361$$

$$0 = x^2 - 2 \times x \times 19 + 19^2$$

$$0 = (x-19)^2$$

$$x - 19 = 0$$

$$x = 19 \text{ m}$$

Donc, tel que $HB' = 19$ m, sur la droite $D'B'$, l'aire de la surface en jachère est égale : à 578 m².

Vérification :

$$A_H = c \times c + L \times l$$

$$A_H = 19^2 + (50-19) \times (26-19)$$

$$A_H = 361 + 31 \times 7$$

$$A_H = 361 + 217$$

$$A_H = 578 \text{ m}^2$$

Donc Jean peut placer le point H.

ANNEXE

On trouvera en annexe :

- Le document « élève ».
- Le document présenté à l'issue de la tâche complexe aux élèves et présentant une méthode experte de résolution. Ce document synthétique sert de bilan et de référence aux élèves et est collé dans le cahier d'exercices. Il peut être utilisé à l'occasion pour de futures activités.

Tâche complexe : Petits calculs mais grande réflexion !

Nom : Prénom : Classe :

Noms des autres élèves qui ont collaboré pendant la phase de recherche :

Enoncé
Choisis deux nombres dont la différence est 40.
Calcule le produit de ces deux nombres.

Considérant tes deux nombres choisis, soustrais 2 au plus grand des deux, ajoute 2 au plus petit des deux.
Calcule le produit des deux nouveaux nombres obtenus.

De combien ce produit a-t-il augmenté par rapport au produit initial ? Est-ce toujours le cas ?

SOCLE COMMUN	Auto-évaluation	Degré d'acquisition
C1 : Analyser l'information.		DA EA PA A
C2 : Calculer, réaliser, appliquer des consignes.		DA EA PA A
C3 : Raisonner, déduire.		DA EA PA A
C4 : Communiquer son résultat.		DA EA PA A
D2 : Nombres et calculs		DA EA PA A
TIC : Utilisation de calculatrices, de logiciels. Préciser lesquels : - - -		DA EA PA A
I : Investissement		DA EA PA A

Rédaction **individuelle** de la solution :

Tâche complexe : Petits calculs mais grande réflexion !

Enoncé
Choisis deux nombres dont la différence est 40.
Calcule le produit de ces deux nombres.

Considérant tes deux nombres choisis, soustrais 2 au plus grand des deux, ajoute 2 au plus petit des deux.
Calcule le produit des deux nouveaux nombres obtenus.

De combien ce produit a-t-il augmenté par rapport au produit initial ? Est-ce toujours le cas ?

Solution et commentaires

Première étape : phase de conjecture
Cette phase n'est pas indispensable si on est parfaitement à l'aise en calcul littéral mais elle est fortement conseillée !
Il suffit d'appliquer les consignes avec deux nombres dont la différence est 40.
Par exemple, prenons 42 et 2.
Le produit initial vaut donc $42\times 2=84$.
On obtient alors les deux nouveaux nombres en faisant : $42-2=40$ et $2+2=4$.
Le nouveau produit vaut $40\times 4=160$.
La différence avec le produit initial est ainsi de $160-84=76$.
D'autres exemples donnent le même résultat et permettent d'émettre la conjecture suivante : le produit des deux nouveaux nombres augmente de 76 par rapport au produit initial.
L'utilisation du tableur permet l'étude rapide d'un grand nombre d'exemples et permet ainsi de conforter la conjecture.

Seconde étape : démonstration à l'aide du calcul littéral
Soit x le plus petit nombre choisi au départ.
Les deux nombres initiaux ayant une différence de 40, le plus grand nombre choisi au départ est $x+40$.
Le produit initial correspond à l'expression littérale suivante :

$$I = x(x+40)$$
$$I = x\times x + x\times 40$$
$$I = x^2 + 40x$$

D'après l'énoncé, les deux nouveaux nombres sont $x+2$ et $x+40-2=x+38$.
Le produit final correspond à l'expression littérale suivante :

$$F = (x+2)(x+38)$$
$$F = x\times x + x\times 38 + 2\times x + 2\times 38$$
$$F = x^2 + 38x + 2x + 76$$
$$F = x^2 + 40x + 76$$

La différence entre ces deux produits correspond à l'expression littérale suivante :

$$D = F - I$$
$$D = (x^2+40x+76)-(x^2+40x)$$
$$D = x^2+40x+76-x^2-40x$$
$$D = 76$$

En conclusion, le produit a augmenté de 76 par rapport au produit initial.

Remarque
Avec le logiciel wxMaxima, on peut trouver une aide au calcul littéral grâce à la fonction *expand*.

```
(%i1) expand((x+2)*(x+38)-x*(x+40));
(%o1) 76
```

Rappel : la fonction *factor* permet de factoriser une expression littérale, la fonction *solve* permet de résoudre une équation.