Fonction exponentielle

I. Introduction :

a) Croissance de nénuphars : introduit une équation fonctionnelle

-> on cherche une fonction qui vérifie $f(x+y) = f(x)f(y)$

b) Radioactivité
-> on cherche une fonction f qui vérifie $f'(x) = k f(x)$

c) Mort sans vieillir
- radioactivité et mort sans vieillir
- lancer de dé
- mort sans vieillir : généralisation

d) Le « pépin »

II. Méthode d'Euler

1) Généralités

2) Résolution de $y' = y$

a) interprétation graphique de $y' = y$ Maple1.mws
b) recherche de solutions avec cabri1.fig
c) méthode Euler pour $F' = F$
d) deux suites

3) Le point de vue Δ

a) Point de vue delta
b) Deux suites
c) Interversion de y et x

III. Existence de la solution de $y' = y$ et $y(0) = 1$ (existence de l'exp)

On a le choix :

sérieusement

a) de l'admettre ou dire que ce que l'on obtient graphiquement marche et existe

b) l'admettre provisoirement et y revenir après avoir introduit la fonction ln détails

moins sérieusement (opinion personnelle…)

c) le démontrer allégrement avec les suites adjacentes

Remarque sur l'exponentielle dans $\mathbb{C}$

L'introduction de l'exponentielle complexe se fera facilement vu que
cos (x) + i sin (x) vérifie l'équation fonctionnelle et l'équation différentielle

On a envie de l'écrire exp(ix)

IV. Quelques démonstrations

Quelques démonstrations

V. Courbe avec le développement dyadique Maple7.mws

Principe et Méthode

Axer le tracé sur l'équation fonctionnelle

VI. Exploitation du développement en série entière $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$

Voir formellement que cela marche
Eventuellement avec des Maple8.mws

Remerciements à tous les gens chez qui j'ai trouvé des idées via internet ou ailleurs
En particulier JC Lise, E Butz, le GEPS, D Tournes etc…
et à M Gontier pour son soutien logistique

Remarque : les fichiers portant les extensions mws, fig, xls sont respectivement des fichiers Maple, Cabri géomètre et Excel.

Nénuphars et équation fonctionnelle

Sur un étang (de surface infinie…), la population de nénuphars double chaque jour (au premier jour elle est de un…)
Comment modéliser le phénomène ?

Au bout de n jours on a 2^n nénuphars n entiers

Combien en a t on au bout de 16jours 12 heures 45 minutes et 0 s
(… soit 16,53125 jours ?)

Il nous manque un 2^x pour décrire le phénomène
La question est comment étendre la fonction f : Z -> N définie par $f(n) = 2^n$ à des nombres non entiers

On va essayer de prolonger la fonction f : n --> 2^n
pour cela on cherche les fonctions définies sur R et qui vérifient des propriétés des puissances

$$\boxed{\mathbf{f(x+y) = f(x)\,f(y)} \ \text{ et } \ \mathbf{f(0) = 1}. \quad \text{(vérifiée par } 2^n\text{…)}}$$

On cherchera des solutions dérivables pour avoir des solutions plus régulières

Remarque : On peut répondre au problème numérique

Combien en a-t-on au bout de 16jours 12 heures 45 minutes et 0 s ?

(… soit 16,53125 jours ?)

Retour au sommaire

Radioactivité

Obtention d'une équation différentielle

En physique, la désintégration des atomes d'un corps radioactif est telle que, à chaque instant la vitesse de désintégration est proportionnelle à la quantité restante de substance radioactive
Soit N(t) le nombre d'atome à l'instant t.
Δt une durée proche de 0 et $\Delta N(t)$ la diminution du nombre d'atomes durant.Δt

On a avec D(t) le nombre d'atome désintégré à l'instant t et No = D(t) + N(t)

$$(D(t+h) - D(t)) / h = (No - N(t+h) – No + N(t)) / h = k\, N(t)...$$

On obtient donc :

$$\Delta N(t) / \Delta t = - k N(t)$$

où k est une constante positive qui dépend du corps radioactif

En passant à la limite pour un intervalle de temps devenant arbitrairement petit et en supposant que $N(t)$ est dérivable on obtient l'équation différentielle

$$N'(t) = -k N(t)$$

Retour au sommaire

Radioactivité et mort sans vieillir

Le fait que $- N'(t) / N(t)$ soit une constante s'interprète comme un phénomène de mort sans vieillissement (vitesse de désintégration sur nombre de vivants…)

Intuitivement chez les Hommes : $- N'(t) / N(t)$

t = 0 .. 40	Peu/beaucoup	0
t = 40 .. 60	un peu plus/un peu moins	**k**
t = 65 .. 90	beaucoup plus /de moins en moins	oo

(qu'en pensez-vous ?)

Pour une loi exponentielle :

Fixons $- N'(t) = 0.1 N(t)$ et $N(0) = 1000$ de solution $N(t) = 1000 \exp(-0.1 t)$

t (x 10 années)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
N(t)	1000	740,8	548,8	406,6	301,2	223,1	165,3	122,5	90,72	67,21	49,79
	26%	26%	26%	26%	26%	26%	26%	26%	26%	26%	

Sur la dernière ligne, on a calculé $-\Delta N(t) / N(t)$
(…26 % de probabilité de mourir entre deux périodes consécutives..)

Remarque : étude numérique de la désintégration du Polonium

Retour au sommaire

Pour N(t) suivant une loi N(t) = 1000 exp (-0.1 t)

Le $\frac{\Delta N}{N\Delta t}$ dépend de Δt

N(t)	1000	740,818	548,812	406,57	301,194	223,13	165,299	122,456	90,718	67,2055
	26%	26%	26%	26%	26%	26%	26%	26%	26%	26%
De(N(t))/(-N(t) De(t))										
De(t)=10	-0,0259	-0,0259	-0,0259	-0,0259	-0,0259	-0,0259	-0,0259	-0,0259	-0,0259	-0,0259
De(t)=20	-0,0226	-0,0226	-0,0226	-0,0226	-0,0226	-0,0226	-0,0226	-0,0226	-0,0226	
De(t)=40	-0,0175	-0,0175	-0,0175	-0,0175	-0,0175	-0,0175				

Retour au sommaire

Lancer de dé et mort sans vieillir:

On a un grand nombre de joueur ;
Chaque jour les joueurs lancent un dé ;
Les joueurs ayant un 6 quittent le jeu (‘meurent’)

A priori, que l’on soit vieux ou jeune, la probabilité de mourir un jour donné est la même
C’est un peu ce qui se passe pour la désintégration

Modélisation :

La Probabilité d’être vivant au bout de k jours est de $(5/6)^k$; (voir arbre)
La variable aléatoire X nombre de vivant au bout de k jours suit une loi binomiale
- On regarde si un joueur est soit mort soit vivant au bout de k jours

On recommence l’expérience d’en haut plusieurs fois
- à priori on a l’indépendance entre les résultats

c’est un schéma de Bernoulli de paramètres nbpop(0) et $(5/6)^k$

d'espérance nbpop(0)*$(5/6)^k$

(cela correspond bien au nombre moyen de vivant au bout de k jours…) ;

(Nbpop(k) = nbpop(0) exp(k * ln(5/6) du type Kexp(a t))

Retour au sommaire

et si l’on veut calculer le rapport ΔNbpop / (Nbpop Δt) avec Δt = i

> $$\frac{Nbpop(i+t)-Nbpop(t)}{Nbpop(t).i}=\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{i+t}-\left(\frac{5}{6}\right)^{t}}{i\left(\frac{5}{6}\right)^{t}}=\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{i}-1}{i}=\frac{e^{i\ln\left(\frac{5}{6}\right)}-1}{i}$$

*) tend vers ln(5)-ln(6) quand i tends vers 0 ce qui justifie une équation

N'(t) = ln(5/6) N(t) pour Nbpop(t)

**) le rapport est indépendant de t (mais pas de Δ t qui vaut i ici…)

similitude avec le Polonium

Retour au sommaire

On suppose qu'on a un phénomène de mort sans vieillir ;

Pré requis : soit f dérivable, vérifiant f (x + y) = f (x)f (y) et f (0) = 1 alors f vérifie une équation du type y' = a y et y(o) = 1 et donc f (t) est du type exp (at)

Soit v (t) l'événement : « l'élément n'est pas mort à l'instant t »
(ne meurt pas entre 0 et t ; est vivant à l'instant t)
v(t , t') : « l'élément ne meurt pas entre t et t' »

v(t + s) est l'événement « l'élément n'est pas mort à l'instant t + s »
c'est aussi l'événement :
« l'élément n'est pas mort à l'instant t et ne meurt pas entre t et t + s »
on a donc v(t + s) = v(t) $\cap$ v(t, t + s)

P(v(t + s)) = P(v(t) $\cap$ v(t , t + s)) = **$P_{v(t)}$ (v(t , t + s)) P(v(t)) = P(v(s)) P(v(t))**
Vu la mort sans vieillir

Relation du type f (t + s) = f (t) f (s)
or P(v(0)) = 1 et en supposant P(v(t)) dérivable

On obtient P(v (t)) = exp (at)

le nombre d'éléments qui ne meurent pas entre 0 et t est une B(N(0) , exp (at))

C'est un schéma de Bernoulli... d'espérance **N(0) exp (at)** qui vérifie donc une équation du type y' = a y

Ce qui correspond au nombre moyen d'élément vivant à l'instant t

Retour au sommaire

Le pépin

Dans le passage

$$\Delta N(t) / \Delta t = - k N(t)$$

à

En passant à la limite pour un intervalle de temps devenant arbitrairement petit et en supposant que N(t) est dérivable on obtient l'équation différentielle

$$N'(t) = - k N(t)$$

Il y a un petit pépin, notre k soit disant constant et ne dépendant pas de t dépend en fait de Δ t

- cas du polonium
- cas des dés
- cas d'une simulation exponentielle

On trouve donc trois couples k possibles >
k = -0.0046 ; i = 20 ;
k = -0.00435 ; i = 40 ;
k = -0.00397 ; i = 80 ; lequel prendre ?

Donc soit on occulte le problème :

Soit on le règle en remarquant que pour une fonction N(t) = N(0) exp (at)

le rapport $\dfrac{\Delta N}{N \Delta t} = \dfrac{N(t+i)-N(t)}{N(t)i} = \dfrac{N(0)\exp(a(t+i))-N(0)\exp(at)}{N(0)\exp(at)i} = \dfrac{\exp(ai)-1}{i}$ = k
tend vers a quand i tend vers 0

Et expérimentalement, on connaît i et on mesure k et donc a = (ln (ki + 1)) / i

ce qui pour le polonium donne :

pour i = 20 (en jours) et k = -0.0046 : a = - 0,00482
pour i = 40 (en jours) et k = -0.00435 : a = - 0,00478
pour i = 80 (en jours) et k = -0.00397 : a = - 0,00479

pour 10 ^{9} atomes au départ et au bout de 365 jours on peut donc hésiter entre

pour i = 20 (en jours) et k = -0.0046 : 172165337 atomes
pour i = 40 (en jours) et k = -0.00435 : 174697390
pour i = 80 (en jours) et k = -0.00397 : 174060907

La différence entre les deux estimations extrêmes étant de moins de 0.3%
mais a-t-on une telle précision pour détecter les atomes ?
En plus notre N(t) n'est après tout qu'une espérance…donc une valeur moyenne…

Retour au sommaire

Il reste donc à espérer que lorsque Δt tend vers 0, notre k ne varie pas trop et que les choses se passent bien

On essaie l'équation N'(t) = -k N(t) avec le k trouvé

Et après résolution , la modélisation est à peu près vérifiée par l'expérience
(on ne va quand même pas s'émouvoir si pour 10 ^{9} atomes au départ et au bout de 365 jours on peut hésiter entre

186560443 (**k = -0.0046 ; i = 20)**
204384960 (**k = -0.00435 ; i = 40)**
234793235 (**k = -0.00397 ; i = 80)**

on a 48 millions d'atomes de différence entre les deux modélisations soit près de 5%

mais détecter à 5% près un nombre d'atomes ne me semble pas trop excessif, il faudrait demander à des physiciens…

Retour au sommaire

Généralités

Méthode d'Euler

Recherche de primitive

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I = $[x_0, x_n]$ et un réel y_0.
On cherche : une fonction *primitive* Y, dérivable sur I, telle que

$$\mathbf{Y}(x_0) = y_0 \quad \textbf{et} \quad \mathbf{Y}'(x) = f(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ de I.}$$

Représentation Cabri2.fig de l'équation Y' (x) = $\frac{x}{2}$ (cabri)

Représentation Maple2.mws de l'équation Y' (x) = $\frac{x}{2}$ et Y(1) = 0.25 et de Y'(x) = 2 - $\frac{x}{2}$ (maple Champs de vecteurs)

Principe de Méthode d'Euler

Lorsqu'on ne sait pas trouver une formule explicite de $Y(x)$, la méthode d'Euler permet de tracer point par point une courbe approchée de celle de Y.

Propriété de la dérivée :

Si Y est une fonction dérivable sur un intervalle I, f = Y' sa dérivée sur I et x_i un réel de I. Pour tout réel h non nul et proche de 0 tel que $x_i + h$ soit dans I on a :

$$Y(x_i + h) \approx Y(x_i) + h\,Y'(x_i) \approx Y(x_i) + h\,f(x_i)$$

On obtient donc une valeur approchée de $Y(x_i + h)$

Méthode d'Euler :

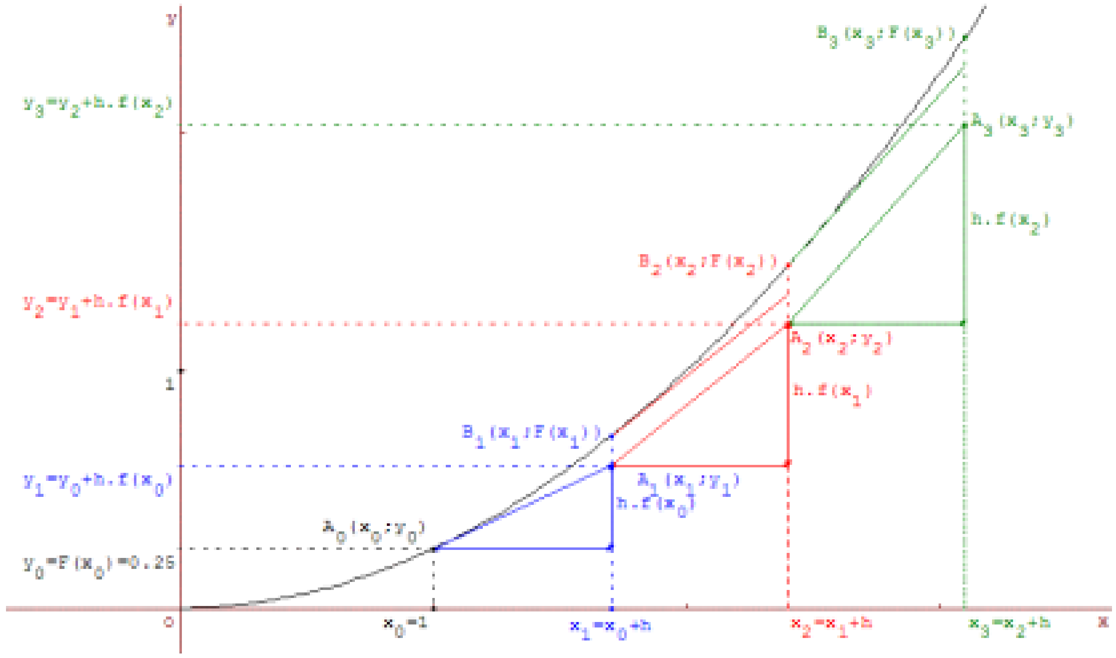
$A_0\,(x_0 ; y_0)$ est le premier point de la courbe (C) représentative de Y.
Soit h un réel non nul, proche de 0 ; en général on divise I en n intervalles et on choisit $h = \dfrac{x_n - x_0}{n}$.
Pour les n valeurs $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, …, $x_n = x_{n-1} + h$, on calcule de proche en proche, grâce à la propriété de la dérivée citée ci-dessus, les n valeurs approchées de $Y(x_1)$, $Y(x_2)$, …, $Y(x_n)$.
En effet Y est dérivable en x_0 donc :
$Y(x_0 + h) \approx Y(x_0) + h\,Y'(x_0)$ soit $Y(x_1) \approx y_0 + h\,f(x_0)$.
en calculant $y_1 = y_0 + h\,f(x_0)$ on obtient $Y(x_1) \approx y_1$.
On recommence en x_1 avec :
$Y(x_1 + h) \approx Y(x_1) + h\,Y'(x_1)$ soit $Y(x_2) \approx y_2 = y_1 + h\,f(x_1)$.
Et ainsi de suite n itérations jusqu'à $y_n = y_{n-1} + h\,f(x_{n-1})$.

Représentation graphique

On place ensuite, les points $A_0(x_0 ; y_0)$; $A_1(x_1 ; y_1)$; $A_2(x_2 ; y_2)$; … ; $A_n(x_n ; y_n)$.
La courbe constituée des segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, …, $[A_{n-1}A_n]$ approche la courbe exacte (C) de Y. Cette courbe approchée représente une fonction affine par intervalles.

Exemple 1 : F' (x) = $\frac{x}{2}$

La fonction $f(x) = \frac{x}{2}$ a pour primitive $F(x) = \frac{x^2}{4}$ avec $x_0 = 1$ et $y_0 = F(x_0) = \frac{1}{4}$.
La courbe (C) représentative de F est approchée par les segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$.

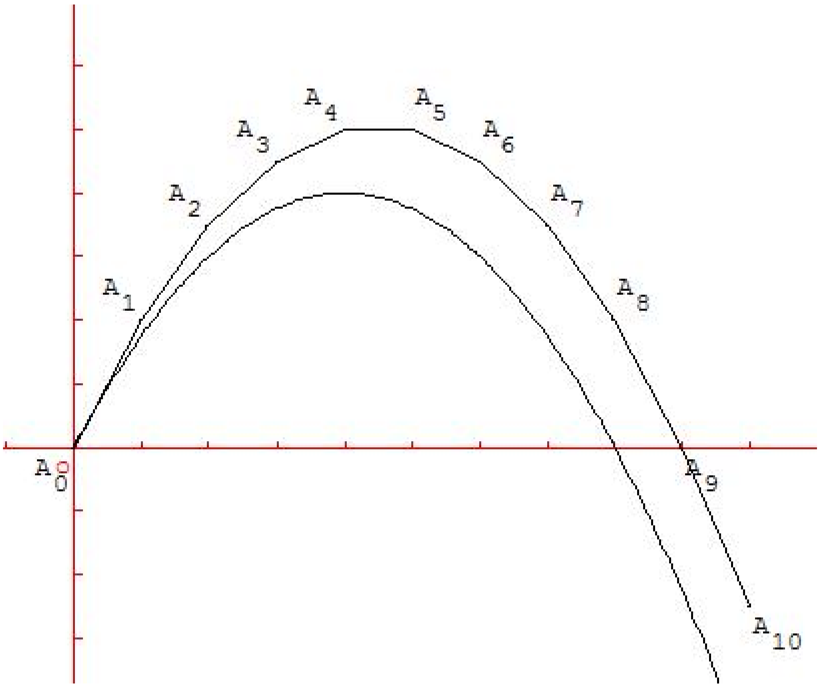


Application numérique sous [Excel1]

[Retour au sommaire]

Exemple 2 : **$F'(x) = 2 - \frac{x}{2}$**

Étude de $f : x \mapsto 2 - \frac{x}{2}$



Condition initiale $y_0 = F(x_0) = 0$ pour $x_0 = 0$.
Tracé de 10 points avec GéoPlanW avec un pas $h = 1$.

Et tracé du graphe (C) de $F(x) = 2 - \frac{x^2}{4}$ primitive de f telle que $F(0) = 0$.

Retour au sommaire

Méthode d'Euler

On veut résoudre graphiquement y' = y et y' (xo) = y0

On part de $Y(x + h) \approx Y(x) + h\,Y'(x) \approx Y(x) + h\,Y(x) \approx Y(x)(1+h)$ (*)

On construit une suite de points $M_n(x_n, y_n)$ *vérifiant* :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n \times (1+h) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_n = x_0 + n \times h \\ y_n = y(x_0) \times (1+h)^n \end{cases}$$

Ce qui pour $y(0) = 1$ donne une suite $y_n = (1+h)^n$ ($\approx y(nh)$)

Ce qui se programme très bien par exemple sous Excel2

Il est clair que la méthode Maple3.mws marche de mieux en mieux pour h petit
(détails Maple4.mws)

Retour au sommaire

Où l'on voit venir deux suites

Rappel : La résolution de $y' = y$ et $y(x0) = y0$ donne par Euler
une suite de points définie par
$x_n = x_0 + n\,h$ et $y_n = y_0\,(1 + h)^n$

Cherchons à avoir $y(t)$ pour $t > 0$, il faut donc que pour n entier

$X_0 + n\,h = t$ (pour que x_n arrive sur t)

d'où pour $x_0 = 0$ on a $h = \dfrac{t}{n}$ et on obtient pour $y0 = 1$

$$y_n = y(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

notre $y(t)$ dépend de n

mais on espère que plus n sera grand, plus h sera petit et plus le $y(t)$ trouvé se rapprochera du $y(t)$ théorique

D'où l'idée d'étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^n$

On est parti de (0,1) vers (t ,y (t)) avec nos deux suites
Si maintenant on part de notre (t , y (t)) pour revenir à (0 , 1)
On aura au bout de n étapes

$Y_0 = 1 = y(t)\,(1 - h)^n = y(t)\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$

Et donc $\mathbf{y(t)} = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{-n}$

D'où l'idée d'étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{-n}$

Etude numérique Excel3.xls ou graphique Maple5.mws de ces deux suites

Retour au sommaire

En fait si on revient à $\Delta y = y\,\Delta t$ l'introduction des deux suites

$(1+\frac{t}{n})^n$ et $\left(1-\frac{t}{n}\right)^{-n}$ dans la résolution de y' = y et y(0)=1 est plus naturelle

Revenons à $y(x+h) - y(x) \approx h\,y'(x) = h\,y(x)$

et résolvons

$Y(x_k + h) - Y(x_k) = h\,Y(x)$ avec x compris entre x_k et $x_k + h = x_{k+1}$

On peut utiliser $Y(x_k + h) - Y(x_k) = h\,Y(x_k)$

$y_{k+1} - y_k = h\,y_k$ qui donne

$y_{k+1} = (1+h)\,y_k$ et $y_n = y_0\,(1+h)^n$ et avec h= t/n ,y_0=1

$$y_n = y(t) = (1+\frac{t}{n})^n$$

On peut utiliser $Y(x_k + h) - Y(x_k) = h\,Y(x_k+h)$

$y_{k+1} - y_k = h\,y_{k+1}$; qui donne $y_{k+1}(1-h) = y_k$

et en itérant pour $h=\frac{t}{n}$, y_0=1

on obtient $y_n = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-n} y_0 = \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-n}$

Retour au sommaire

Delta

*) L'équation $y'(x) = f(x)$ d'inconnue y et avec f donnée se voit donc remplacée dans la méthode d'Euler

à l'aide de $y(x_i + h) \approx y(x_i) + h\,y'(x_i) \approx y(x_i) + h\,f(x_i)$

par $Y(x_i + h) - Y(x_i) = h\,f(x_i)$ (en espérant que Y coïncide avec y…)
ou en terme de suite
par $y_{i+1} - y_i = h\,f(x_i)$. en espérant que $y_i = y(x_i)$ pour tout i

et donc on arrive à **$\Delta y = f(x)\,\Delta x$**

**) De même l'équation y ' = y se voit donc remplacée dans la méthode d'Euler

à l'aide de $y(x_i + h) \approx y(x_i) + h\,y'(x_i) \approx y(x_i) + h\,y(x_i)$
par $Y(x_i + h) - Y(x_i) = h\,Y(x_i)$ (en espérant que Y coïncide avec y…)
ou en terme de suite
par $y_{i+1} - y_i = h\,y_i$. en espérant que $y_i = y(x_i)$ pour tout i

et donc on arrive à **$\Delta y = y\ \Delta x$**

bref

Euler c'est remplacer une équation différentielle par une équation aux différences finies

Retour au sommaire

Interversion de x et de y

y' = y se transforme via Euler en $\Delta y = y\Delta x$
y' = $\frac{1}{x}$ se transforme via Euler en $\Delta y = \frac{1}{x}\Delta x \Leftrightarrow \Delta x = x\Delta y$
On passe de l'une à l'autre en échangeant les x et les y

On va donc faire la
Représentation graphique Cabri3.fig de l' équation $F'(x) = \frac{1}{x}$ (cabri)
(avec comme condition initiale F(1) = 0)

et voir ce que l'on obtient avec la symétrie d'axe y = x…

Retour au sommaire

Détails

On a :
Ln :]0,+oo[$\rightarrow$ R ,primitive de 1/x s'annulant en 1 est une fonction strictement croissante et vérifie ln(ab) = ln(a) + ln(b) ; ln(1) = 0
Montrons qu'elle vérifie y' = y (donc qu'elle est dérivable) et y(0) = 1

On en tire que sa fonction réciproque notée exp (au hasard..) est positive strictement ,est strictement croissante ,vérifie exp(0) = 1 et exp(x + y) = exp(x) exp(y)

si elle est dérivable elle vérifie y' = y

a) Maple6.mws
graphiquement :
Soit M(x ,ln(x)) sur la courbe du ln
Soit M' son symétrique par rapport à y = x
On a M' (ln(x) , x)
Soit T la tangente en M à la courbe du ln ;
T (1 ,1/x) T n'est donc jamais horizontale
Soit To' le symétrique de T par rapport à y = x ,
To' va être la tangente à la courbe de l'exp To' (1/x,1)

colinéaire à T ' (1, x)
On a donc M' (ln(x), x) et T ' (1, x) ;
On constate que en notant M' (*x* , y(*x*)) et T' (1 ,y'(*x*)) , on a bien y ' = y

b) lemme 1 : pour $|h|<1$ on a $h \leq \exp(h) - 1 \leq h + h^2$

dem : pour $1 > t \geq 0$ on a $\frac{1}{1+t} \leq 1 \leq \frac{1+t+t}{1+t+t^2}$ (car $t^2 < t$)

donne en intégrant entre 0 et h avec $1 > h \geq 0$: $\ln(1+h) \leq h \leq \ln(1+h+h^2)$

pour $-1 < t \leq 0$ on a $\frac{1}{1+t} \geq 1 \geq \frac{1+t+t}{1+t+t^2}$ (car $t^2 \geq 0 \geq t$ et $1 + t + t^2 > 0$)

donne en intégrant entre h et 0 avec $-1 < h \leq 0$: $\ln(1+h) \leq h \leq \ln(1+h+h^2)$

bref pour $|h|<1$ on a $\ln(1+h) \leq h \leq \ln(1+h+h^2)$ soit en passant à l'exp qui est croissante

$$1+h \leq \exp(h) \leq 1+h+h^2$$

prop : exp est dérivable et vérifie y' = y

dem : $\exp(x+h) - \exp(x) = \exp(x)(\exp(h) - 1)$ et donc

$$h\exp(x) \leq \exp(x+h) - \exp(x) \leq \exp(x)(h+h^2) \qquad (\exp(x) > 0\ldots)$$

en divisant par h et en faisant tendre h vers 0, on obtient bien exp(x) ' = exp(x)

(Rq : l'inégalité change de sens pour $h < 0$ mais cela ne change rien…)

Retour au sommaire

Démonstration

<u>**Prop 0 :**</u> **Toutes solutions de y' = ky et y(o) <> 0 y ne s'annule pas**

idée dérivée de $y(x)y(-x)$ est nulle donc $y(x)y(-x)=y(0)^2 \neq 0$

<u>**Prop 1 :**</u>

a) on cherche une fonction définie sur R et qui vérifie $f(x+y) = f(x)f(y)$ $f(0) = 1$

On rajoute dérivable pour des raisons de régularité

b) on cherche la solution de $y'(t) = k\,y(t)$ et $y(0) = 1$

En fait ce sont deux propriétés équivalentes

Idée :

$\Rightarrow$ dériver /x et x = 0

$\Leftarrow$ considérer $g(x) = f(x+y)/(f(x)f(y))$ (f ne s'annule pas vu prop 0) dériver d'où $g(x)=1$

prop 2 et def : exp est la solution de y' = y et y(0) =1 :

existence admise, unicité à montrer

unicité : idée : dériver (f/g)

prop 3: a exp(kx) est la solution de y' = k y et y(o) = a

idée : existence ok unicité : dériver g /(a exp(kx)) =1)

Retour au sommaire

Dyadique

L'idée est ici de pouvoir tracer une fonction f vérifiant $f(x + y) = f(x) f(y)$ pour tous x et y

et tel que f(1) notée f1 soit connu et strictement positif (c'est en fait $f1^x$)

On a $f(n) = f(1)^n$ et $f(1/2^n) = f(1/2^{n+1})^2$
Si f s'annule en x alors f est nulle partout car $f(x + y - x) = f(y) = f(x)f(y - x) = 0$ or $f(1)\neq 0$

$f(x) = f(x/2)^2 > 0$ donc f est positive

d'où $f(1/2^{n+1}) = \sqrt{f(\frac{1}{2^n})} = \sqrt{\sqrt{...(n+1fois)\sqrt{f(1)}}}$

Calcul de $f1^{3.75}$: $f(3.75) = f(2+1+1/2+1/2^2) = f(2)f(1)f(1/2)f(1/2^2)$

Développement dyadique de 3.75 :

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}+2, \ = , 3.750000000$$

$$f1^2\, f1 \sqrt{f1}\, \sqrt{\sqrt{f1}} = f1^{2+1+0.5+0.25} = f1^{3.75}$$

Calcul de $f1^{1.6875}$:

Développement dyadique de 1.6875 :

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2}, \ = , 1.687500000$$

$$f1 \sqrt{f1}\, \sqrt{\sqrt{\sqrt{f1}}}\, \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{f1}}}} = f1^{1+0.5+0.125+0.0625} = f1^{1.6875}$$

L'idée est ici de pouvoir tracer une fonction f vérifiant $f (x + y) = f (x) f (y)$ pour tous x et y

et tel que f(x0) notée fx0 soit connu et strictement positif

supposons f(3) = f3 = 8 (on aura alors la fonction 2^x)

on a $f(3n) = f(3)^n$ et $f(3/2^n) = f(3/2^{n+1})^2$
si f s'annule en x alors f est nulle partout car $f(x + y – x) = f(y) = f(x)f(y – x) = 0$ or $f(3) \neq 0$

$f(x) = f(x/2)^2 > 0$ donc f est positive

d'où $f(3/2^{n+1}) = \sqrt{f\left(\frac{3}{2^n}\right)} = \sqrt{\sqrt{\ldots(n+1\text{fois})\sqrt{f(3)}}}$

<u>Calcul de f(11.25)</u> : 11.25 /3 =3.75

$f(3x\ 3.75) = f(3x2+3x1+3/2+3/2^2) = f(3x2)f(3x1)f(3/2)f(3/2^2) = f3^2\ f3\sqrt{f3}\ \sqrt{\sqrt{f3}}$
$= f3^{2+1+0.5+0.25} = f3^{3.75} = 2435.49.. = 2^{11.25}$

Retour au sommaire