Agrégation Interne 20011-2012
Dominique Castella

Série $n^0 1$
Rang et Systèmes

I Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, engendré par la famille (s, t, u, v, w) où :
$s = (1, 5, 3, 0)$, $t = (1, 3, -8, 0)$, $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, 4, 14, 4)$ et $w = (0, -4, 11, 8)$.

II Trouver la base de $\mathbb{R}^3$ dont la base duale est la famille de formes linéaires :
$(x + 2y + z, 2x + 3y + 3z, 3x + 7y + z)$.

III Soit E_n l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, sur un corps commutatif k, de caractéristique 0.
a) Montrer que les formes linéaires $P \mapsto P^{(i)}(a)$, a étant un élément fixé de k, forment, pour $0 \leq i \leq n$, une base du dual E_n^* de E_n.
Quelle est la base de $k[X]$, dont cette base est la base duale ?
Quelle formule peut-on en déduire ?
b) Mêmes questions pour la famille $P \mapsto P(a_i)$, où les a_i, $0 \leq i \leq n$ sont des éléments distincts de k ?

IV Soient E un espace vectoriel de dimension finie, n, et f, g deux endomorphismes de E. Montrer que $rg(f) + rg(g) - n \leq rg(f \circ g) \leq min(rgf, rgg)$.

V Eléments algébriques :
Soit x un élément d'un sur-corps commutatif L d'un corps K : on dira que x est algébrique sur K s'il existe $P \in K[X] - \{0\}$ tel que $P(x) = 0$.
a) Soient K, L, M trois corps commutatifs tels que K soit un sous-corpsde L et L un sous-corps de M.
On suppose que L est un K espace vectoriel de dimension p et M un L espace vectoriel de dimension r.
Montrer que M est un K espace vectoriel de dimension pr.
b) Vérifier que $x \in L$ est algébrique sur K si et seulement si
$K[x] = \{Q(x)/Q \in K[X]\}$ est un K-espace vectoriel de dimension fini.
c) Montrer que l'ensemble des éléments de L algébrique sur K est un corps.
d) En déduire que $\mathbb{C}$ contient un sous-corps dénombrable algébriquement clos.

VI a) Montrer qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{Q}^n$ est libre dans $\mathbb{Q}^n$ si et seulement si elle est libre dans $\mathbb{C}^n$.
b) Prouver qu'un système d'équations linéaires sur $\mathbb{Q}$ admettant des solutions sur $\mathbb{C}$ en admet sur $\mathbb{Q}$.