

Un problème de simulation de promenades aléatoires

ABC est un triangle équilatéral .

On définit un sens de parcours direct sur ce triangle : $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$.

Le sens indirect est alors : $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$.

Une puce se déplace sur les bords de ce triangle en sautant d'un sommet à l'autre.

Toutes les secondes, la puce change de sommet en choisissant son sens de parcours de manière aléatoire. Ainsi, si la puce est en A, elle peut sauter en B ou en C.

Elle part de A au temps 0 et sa promenade dure 4 secondes.

La puce voudrait connaître son nombre moyen de passages par le point A au bout d'un grand nombre de promenades.

Exemples de promenades

BCBA : 1 passage en A

BABA : 2 passages en A

CBCB : 0 passage en A

1. Codage et simulation

a. Expliquer comment simuler une promenade avec :

- une pièce de monnaie
- un dé
- une table binaire de 0 et de 1

b. Simuler 20 promenades **à l'aide de la table binaire de nombres aléatoires fournie**. On choisira son premier nombre en piquant sur la feuille au hasard et on écrira sur sa copie la suite de nombres aléatoires obtenue, puis son codage.

c. Remplir alors le tableau suivant :

| nombre de passages par A | 0 | 1 | 2 | total |
|--------------------------|---|---|---|-------|
| nombres de promenades | | | | |
| fréquence | | | | |

d. Dresser l'histogramme des fréquences.

e. Calculer le nombre moyen de passages par le sommet A pour cette simulation.

2. Analyse théorique

a. Donner la liste de toutes les promenades possibles de la puce (on peut pour cela utiliser un arbre de choix mais ce n'est pas une obligation). Combien y en a-t-il ?

b. Remplir alors le tableau suivant :

| nombre de passages par A | 0 | 1 | 2 | total |
|--------------------------|---|---|---|-------|
| nombres de promenades | | | | |
| fréquence théorique | | | | |

c. Porter sur l'histogramme dressé à la question précédente les fréquences théoriques que vous venez de calculer.

d. Calculer le nombre moyen théorique de passages par le sommet A.

3. Vers une simulation d'un grand nombre de promenades : utilisation d'un outil informatique

3.1. A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, on a simulé la promenade de la puce et on a obtenu le tableau suivant :

| nombre de passages par A | 0 | 1 | 2 | Nombre moyen de passages en A |
|--------------------------|----|----|----|-------------------------------|
| 10 promenades | 3 | 4 | 3 | |
| 20 | 2 | 9 | 9 | |
| 30 | 2 | 14 | 14 | |
| 40 | 1 | 28 | 11 | |
| 50 | 7 | 33 | 10 | |
| 80 | 6 | 51 | 23 | |
| 100 | 17 | 57 | 26 | |

- Remplir la colonne du nombre moyen de passages en A.
- Représenter sur un graphique ce nombre moyen en fonction du nombre de promenades.
- Tracer une droite horizontale qui coupe l'axe des ordonnées au nombre moyen théorique de passages en A. Quel commentaire peut-on faire ?

3.2. On effectue maintenant 10 simulations de 100 promenades.

a. On a obtenu le tableau suivant qu'il faut compléter :

| nombre de passages par A | 0 | 1 | 2 | Nombre moyen de passages en A |
|--------------------------|----|----|----|-------------------------------|
| simulation 1 | 17 | 57 | 26 | |
| simulation 2 | 10 | 63 | 27 | |
| simulation 3 | 17 | 55 | 28 | |
| simulation 4 | 8 | 69 | 23 | |
| simulation 5 | 15 | 56 | 29 | |
| simulation 6 | 9 | 66 | 25 | |
| simulation 7 | 12 | 71 | 17 | |
| simulation 8 | 13 | 59 | 28 | |
| simulation 9 | 16 | 57 | 27 | |
| simulation 10 | 10 | 72 | 18 | |

b. En utilisant les 10 simulations précédentes, remplir pour finir le tableau suivant :

| nombre de passages par A | 0 | 1 | 2 | total |
|--------------------------|---|---|---|-------|
| 1000 promenades | | | | |
| fréquence | | | | |

c. Calculer le nombre moyen de passages par le sommet A. Comparer avec le nombre moyen théorique. Quelle conclusion pouvez-vous tirer de cette expérience ?

ANNEXE : Table binaire de nombres aléatoires

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | | |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Annexe du problème pour les profs ou des élèves motivés (...)

Listing du programme de simulation TI92 (ou TI89)

| Programme promtria() pour 1 promenade de nt secondes | Programme promtrin() pour np promenades de 4 secondes |
|---|--|
| <pre> () Prgm Local a "A→B→C→A"→sensdrct "A→C→B→A"→sensind ClrIO Disp "** Promenade sur un triangle ABC *" Disp "sens direct : "&sensdrct Disp "sens indirect : "&sensind Disp "duree de la promenade " Prompt nt For i,1,nt int(2*rand()+1)-1→a[i] EndFor Disp a "A"→chain For i,1,nt If a[i]=0 Then " sens direct If mid(chain,i,1)="A" Then chain&"B"→chain ElseIf mid(chain,i,1)="B" Then chain&"C"→chain ElseIf mid(chain,i,1)="C" Then chain&"A"→chain EndIf ElseIf a[i]=1 Then " sens indirect If mid(chain,i,1)="A" Then chain&"C"→chain ElseIf mid(chain,i,1)="B" Then chain&"A"→chain ElseIf mid(chain,i,1)="C" Then chain&"B"→chain EndIf EndIf EndFor Disp chain EndPrgm </pre> | <pre> () Prgm Local a,n0,n1,n2 "A→B→C→A"→sensdrct "A→C→B→A"→sensind 0→n0:0→n1:0→n2 ClrIO Disp "** Promenade sur un triangle ABC *" Disp "sens direct : "&sensdrct Disp "sens indirect : "&sensind Disp " saisir le nombre de promenades " Prompt np Disp "duree des promenades " 4→nt Disp "4" For j,1,np For i,1,nt int(2*rand()+1)-1→a[i] EndFor Disp a "A"→chain For i,1,nt If a[i]=0 Then " sens direct If mid(chain,i,1)="A" Then chain&"B"→chain ElseIf mid(chain,i,1)="B" Then chain&"C"→chain ElseIf mid(chain,i,1)="C" Then chain&"A"→chain EndIf ElseIf a[i]=1 Then " sens indirect If mid(chain,i,1)="A" Then chain&"C"→chain ElseIf mid(chain,i,1)="B" Then chain&"A"→chain ElseIf mid(chain,i,1)="C" Then chain&"B"→chain EndIf EndIf EndFor Disp chain 0→nombrea For i,2,dim(chain) If mid(chain,i,1)="A" Then nombrea+1→nombrea EndIf EndFor If nombrea=0 Then n0+1→n0 ElseIf nombrea=1 Then n1+1→n1 Else n2+1→n2 EndIf Disp string(nombrea)&" passages en A " "Pause EndFor Disp "n0 "&string(n0) Disp "n1 "&string(n1) Disp "n2 "&string(n2) Disp "nombre moyen de passages en A : " Disp (n1+2.*n2)/np EndPrgm </pre> |