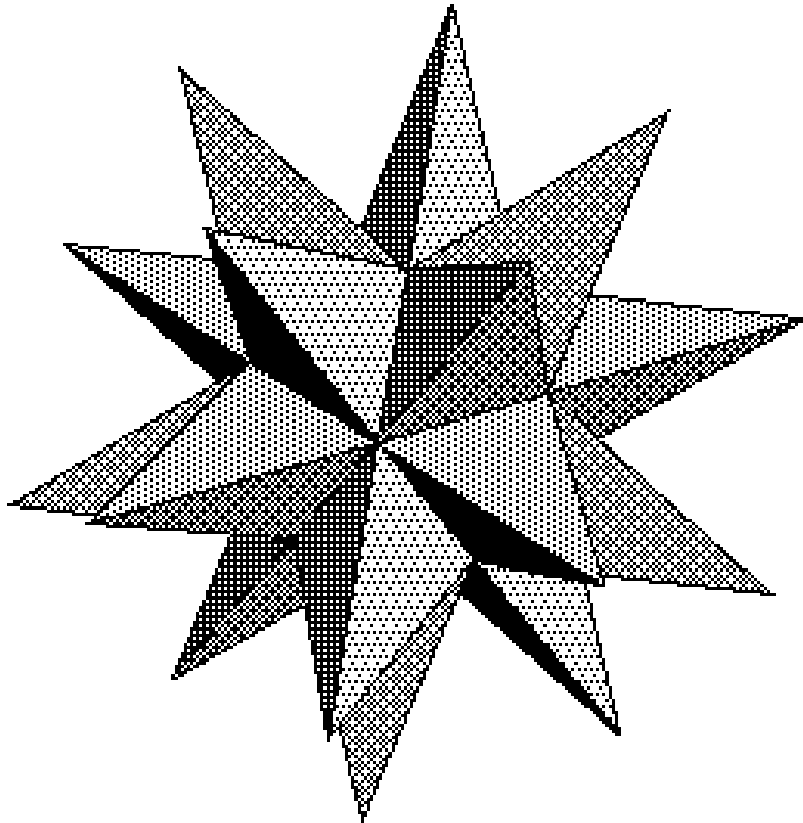


MAFPEN de La Réunion
Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

*Plans de leçons d'analyse
et de probabilités*



Dominique TOURNÈS

juin 1994

APPROXIMATIONS D'UNE SOLUTION D'UNE ÉQUATION NUMÉRIQUE

Remarques générales

- Programme : “Méthode de dichotomie. Méthode des approximations successives ; méthodes de Newton, d’interpolation linéaire et d’ajustement linéaire.”
- On illustrera chaque méthode par un algorithme et un calcul effectif accompagné d’une évaluation aussi rigoureuse que possible de la précision obtenue. On pourra éventuellement proposer des méthodes d’accélération de convergence (barycentration, Aitken, Steffensen).

Plan

Introduction

On se propose de résoudre numériquement une équation $F(x) = 0$. Le premier travail est de localiser et séparer les racines, c’est-à-dire (par exemple par l’étude des variations de F) de déterminer le nombre de racines et, pour chaque racine α , de trouver un intervalle $[a, b]$ sur lequel α soit l’unique racine de F .

Selon la monotonie et la convexité de F au voisinage de α , il y a en général quatre cas de figure possibles. Pour fixer les idées, nous utiliserons partout les hypothèses et notations suivantes :

Soit $F : [a, b] \mapsto \mathbf{R}$, suffisamment régulière, avec $F' > 0$, $F'' > 0$, $F(a) < 0$ et $F(b) > 0$. On pose $M_2 = \sup_{[a,b]} |F''|$ et $m_1 = \inf_{[a,b]} |F'|$. On suppose en outre que $F(a) + (b - a) F'(a) \geq 0$, afin que $[a, b]$ soit stable par toute méthode utilisant des cordes ou des tangentes (on peut toujours s’y ramener, quitte à restreindre l’intervalle). L’unique racine de F sur $[a, b]$ est notée α . On cherche à calculer des valeurs approchées de α .

1. Une méthode élémentaire : la dichotomie

2. Utilisation d’une équation à point fixe

a) Le théorème du point fixe

Soit f une application k -contractante de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Alors :

- (i) f admet un unique point fixe α ;
- (ii) pour tout u_0 de $[a, b]$, la suite définie par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α ;
- (iii) pour tout entier n , $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$ et $|u_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$;
- (iv) (dans le cas où f est suffisamment dérivable sur $[a, b]$) si $0 < |f'(\alpha)| < 1$, la convergence est géométrique ; si $f'(\alpha) = \dots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$, la convergence est rapide d’ordre r .

Dans la pratique, on cherche donc à transformer l’équation $F(x) = 0$ en une équation équivalente $f(x) = x$, avec $|f'(\alpha)| < 1$, et si possible $f'(\alpha) = 0$. L’idée la plus simple est $F(x) + x = x$. Si $|f'(\alpha)| > 1$, penser à utiliser f^{-1} .

b) Méthode d’interpolation linéaire

On prend $f(x) = x - \frac{x-b}{F(x)-F(b)} F(x)$ si $x \in [a, b[$, prolongée par continuité par $f(b) = b - \frac{F(b)}{F'(b)}$.

- (i) $[a, b]$ est stable par f , α est l’unique point fixe de f sur $[a, b]$ et $0 < f'(\alpha) < 1$.
- (ii) Si $u_0 \in [a, \alpha[$, (u_n) converge vers α en croissant ; si $u_0 \in]\alpha, b]$, (u_n) converge vers α en décroissant ; la convergence est géométrique.
- (iii) $|f(x) - \alpha| \leq \frac{(b-a)M_2}{2m_1} |x - \alpha|$ et $|u_n - \alpha| \leq (b-a) \left(\frac{(b-a)M_2}{2m_1} \right)^n$.

c) Méthode de Newton

On prend $f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$.

- (i) $[a, b]$ est stable par f , α est l'unique point fixe de f sur $[a, b]$, $f'(\alpha) = 0$ et $f''(\alpha) \neq 0$.
 (ii) Si $u_0 \in [a, b]$, (u_n) converge vers α en décroissant à partir de u_1 ; la convergence est rapide d'ordre 2.
 (iii) $|f(x) - \alpha| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x - \alpha)^2$ et $|u_n - \alpha| \leq \frac{2m_1}{M_2} \left(\frac{(b-a)M_2}{2m_1} \right)^{2^n}$.

Remarque : dans les deux méthodes précédentes, pour que (iii) soit exploitable, il faut choisir a et b au départ de sorte que $\frac{(b-a)M_2}{2m_1} < 1$.

3. Une méthode d'un autre type : la fausse position

On définit (u_n) par $u_0 = b$, $u_1 = a$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - u_{n-1}}{F(u_n) - F(u_{n-1})} F(u_n)$. On suppose que $\frac{(b-a)M_2}{2m_1} < 1$.

- (i) (u_n) converge vers α et, pour tout entier n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{2m_1}{M_2} \left(\frac{(b-a)M_2}{2m_1} \right)^{F_n}$, où (F_n) est la suite de Fibonacci définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.
 (ii) La convergence est rapide, d'ordre le nombre d'or $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Remarque : on admettra (ii) dont la démonstration est difficile.

4. Tableau résumé

Outre les méthodes précédentes, on a fait figurer deux autres méthodes d'approximations successives :

- Méthode d'ajustement linéaire : on prend $f(x) = x - \frac{F(x)}{\lambda}$, avec λ à choisir aussi proche que possible de $F'(\alpha)$.
- Méthode d'Euler-Lagrange : on prend $f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} - \frac{F(x)^2 F''(x)}{2F'(x)^3}$. La méthode est d'ordre 3 mais peu pratique car nécessitant des calculs importants : l'erreur de calcul est vite plus grande que l'erreur de méthode !

Méthode	Type de convergence	Ordre
Dichotomie	géométrique de raison $\frac{1}{2}$	1
Interpolation linéaire	géométrique de raison $1 - \frac{(b-a)F'(\alpha)}{F(b)}$	1
Ajustement linéaire de pente λ	géométrique de raison $1 - \frac{F'(\alpha)}{\lambda}$ (aussi proche de 0 que l'on veut à condition de prendre λ assez proche de $F'(\alpha)$)	1
Fausse position	rapide	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
Newton	rapide	2
Euler-Lagrange	rapide	3

Bibliographie

OVAERT et VERLEY, *Analyse, volume 1*, CEDIC/Fernand Nathan
 THÉODOR, *Initiation à l'analyse numérique*, Masson
 DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble

CALCUL APPROCHÉ D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE

Remarques générales

- Programme : Calcul de valeurs approchées d'une intégrale. Méthode du milieu (ou des tangentes), méthode des trapèzes, méthode de Simpson. Accélération de convergence par la méthode de Romberg.
- Les polynômes orthogonaux sont par ailleurs au programme et le calcul approché des intégrales est une de leurs principales applications. On peut donc présenter aussi les méthodes de Gauss.
- Le traitement numérique effectif d'un exemple avec une calculatrice programmable sera sans doute apprécié.

Plan

1. Définitions, notations et résultats généraux

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction "suffisamment dérivable" sur $[a, b]$. Pour tout k , on pose $M_k = \sup_{[a,b]} |f^{(k)}|$.

Une méthode de quadrature simple est une formule du type $\int_a^b f \approx \sum_{j=0}^p \lambda_j f(\xi_j)$, avec $\sum_{j=0}^p \lambda_j = b - a$ et $\xi_j \in [a, b]$.

On dit que la méthode est de degré N si cette formule approchée est exacte pour tout polynôme de degré $\leq N$ et inexacte pour au moins un polynôme de degré $N + 1$.

On dit que la méthode est de type interpolation lorsqu'on remplace f par le polynôme d'interpolation de Lagrange P de degré $\leq p$ qui coïncide avec f en $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_p$. Dans ce cas:

- $\int_a^b f \approx \int_a^b P = \sum_{j=0}^p \left(\int_a^b L_j \right) f(\xi_j)$, avec $L_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x - \xi_k}{\xi_j - \xi_k}$.
- La méthode est de degré $\geq p$.
- Pour tout $x \in [a, b]$, $\left| f(x) - P(x) \right| \leq \frac{M_{p+1}}{(p+1)!} \left| \prod_{j=0}^p (x - \xi_j) \right|$.

A chaque méthode de quadrature simple, on peut associer une méthode de quadrature composée qui consiste à faire une subdivision ($x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$) de $[a, b]$, avec $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$, et à appliquer la méthode de quadrature simple sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

2. Etude comparée de quelques méthodes

a) Méthodes élémentaires

Pour $p = 0$, l'unique point ξ_0 peut être choisi de trois façons naturelles : $\xi_0 = a$ (*méthode des rectangles à gauche*), $\xi_0 = b$ (*méthode des rectangles à droite*) et $\xi_0 = \frac{a+b}{2}$ (*méthode du milieu ou des tangentes*).

Dans les trois cas, la méthode de quadrature simple revient à remplacer f par une application constante et la méthode de quadrature composée n'est autre que le calcul d'une somme de Riemann.

b) Méthodes de Newton-Cotes

Pour $p \geq 1$, la *méthode de Newton-Cotes* est la méthode de type interpolation qui consiste à prendre une subdivision régulière de $[a, b]$, c'est-à-dire à poser $\xi_j = a + j \frac{b-a}{p}$.

Si $p = 1$, cette méthode s'appelle *méthode des trapèzes*, et si $p = 2$, *méthode de Simpson*.

c) Méthodes de Gauss-Legendre

Pour $p \geq 1$, la *méthode de Gauss-Legendre* est la méthode de type interpolation qui consiste, après s'être ramené à l'intervalle $[-1, 1]$ par un changement de variable, à choisir les ξ_j "au mieux" au sens du théorème suivant :

Il existe un unique choix des ξ_j tel que la méthode soit de degré $N \geq 2p + 1$: les ξ_j sont alors les racines du polynôme de Legendre de degré $p + 1$.

d) Tableau comparatif

méthode	formule approchée (méthode simple)	degré	erreur de la méthode simple	erreur de la méthode composée
des rectangles (à droite)	$RD = (b - a) f(b)$	0	$\frac{(b - a)^2}{2} M_1$	$\frac{(b - a)^2}{2n} M_1$
du milieu (ou des tangentes)	$TA = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right)$	1	$\frac{(b - a)^3}{24} M_2$	$\frac{(b - a)^3}{24n^2} M_2$
des trapèzes	$TR = (b - a) \left(\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)\right)$	1	$\frac{(b - a)^3}{12} M_2$	$\frac{(b - a)^3}{12n^2} M_2$
de Simpson	$SI = (b - a) \left(\frac{1}{6} f(a) + \frac{2}{3} f\left(\frac{a + b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b)\right)$ $= \frac{2}{3} TA + \frac{1}{3} TR$	3	$\frac{(b - a)^5}{2880} M_4$	$\frac{(b - a)^5}{2880n^4} M_4$
de Gauss (avec $p = 1$)	$GA = \frac{b - a}{2} \left(f\left(\frac{a + b}{2} - \frac{b - a}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2\sqrt{3}}\right)\right)$	3	$\frac{(b - a)^5}{4320} M_4$	$\frac{(b - a)^5}{4320n^4} M_4$

3. Accélération de convergence par la méthode de Romberg

Posons $h = \frac{b - a}{n}$ et notons $TR(h) = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n [f(a + (i - 1)h) + f(a + ih)]$ la valeur approchée de la méthode composée des trapèzes. On a alors le développement asymptotique suivant (*formule d'Euler-Mac Laurin*) :

$$TR(h) = \int_a^b f + \frac{h^2}{12} (f'(b) - f'(a)) - \frac{h^4}{720} (f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)) + \frac{h^6}{30240} (f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)) + O(h^8)$$

La *méthode de Romberg* consiste à poser $R^1(h) = TR(h)$, $R^2(h) = \frac{4R^1\left(\frac{h}{2}\right) - R^1(h)}{3}$,
 $R^3(h) = \frac{16R^2\left(\frac{h}{2}\right) - R^2(h)}{15}$, de sorte que $R^2(h) = O(h^4)$ et $R^3(h) = O(h^6)$.

On constate que $R^2(h) = SI(h)$; on retrouve ainsi la méthode de Simpson avec son erreur $\frac{(b - a)^5}{2880n^4} M_4$.

$R^3(h)$ fournit une méthode encore plus rapide, la *méthode de Boole-Villarceau*, dont l'erreur est $\frac{(b - a)^7}{1935360n^6} M_6$. Cette méthode est en fait la méthode de Newton-Cotes avec $p = 4$.

Dans la pratique, on considère les suites $R_n^k = R^k\left(\frac{b - a}{2^n}\right)$, qui se calculent à partir de R_n^1 et

des relations de récurrence $R_n^{k+1} = \frac{4^k R_n^k - R_n^k}{4^k - 1}$.

$$\begin{array}{ccc} R_1^1 & R_2^1 & R_3^1 & \rightarrow I \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ R_1^2 & R_2^2 & & \rightarrow I \\ \vdots & \ddots & & \\ R_1^3 & & & \rightarrow I \end{array}$$

Bibliographie

THÉODOR, *Introduction à l'analyse numérique*, Masson
 DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble
 OVAERT et VERLEY, *Algèbre, vol.1*, CEDIC/Fernand Nathan

ETUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE SUITES ; RAPIDITÉ DE CONVERGENCE

Remarques générales

- Programme : “Etude du comportement asymptotique de suites. Approximation d’un nombre réel ou complexe au moyen de suites : rapidité de convergence et performance d’un algorithme. Accélération de convergence : méthode de Richardson-Romberg.”
- Le comportement asymptotique et la rapidité de convergence d’une suite relèvent de l’analyse théorique. Le calcul numérique effectif de la limite ne fait pas partie a priori du sujet ; il convient toutefois d’évoquer brièvement les problèmes liés au calcul approché, en distinguant vitesse de convergence et performance.
- On a choisi dans le plan ci-dessous de centrer les exemples sur quelques nombres importants de l’analyse : racines carrées, e , π , constante d’Euler. Il y a d’autres situations exploitables : par exemple, les méthodes de résolution approchée des équations fournissent des convergences des divers types.

Plan

1. Etude de suites convergentes

Soit (u_n) une suite convergeant vers a . Si (v_n) converge aussi vers a , on dit que (v_n) converge plus rapidement que (u_n) lorsque $v_n - a = o(u_n - a)$. Accélérer la convergence de (u_n) , c’est construire une telle suite (v_n) .

a) Différents types de convergence

La convergence est lente ssi $\left| \frac{u_{n+1} - a}{u_n - a} \right| \longrightarrow 1$. C’est le cas lorsque $|u_n - a| \approx \frac{\lambda}{n^\alpha}$ ($\lambda > 0$ et $\alpha > 0$).

• Ex 1 : nombre e . La suite $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge vers e ; $e - u_n \approx \frac{e}{2n}$.

• Ex 2 : constante d’Euler. La suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge vers la constante d’Euler γ ; $u_n - \gamma \approx \frac{1}{2n}$.

On dit que la convergence est géométrique (ou d’ordre 1) ssi $\left| \frac{u_{n+1} - a}{u_n - a} \right| \longrightarrow k$ ($0 < k < 1$).

C’est le cas lorsque $|u_n - a| \approx \lambda k^n$ ($\lambda > 0$ et $0 < k < 1$).

• Ex 3 : nombre π . On note u_n (resp. v_n) la demi-longueur du polygone régulier à 2^n côtés ($n \geq 2$) inscrit dans le (resp. circonscrit au) cercle trigonométrique. (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers π ; $v_n - u_n \approx \frac{\pi^3}{2 \cdot 4^n}$.

On dit que la convergence est rapide ssi $\left| \frac{u_{n+1} - a}{u_n - a} \right| \longrightarrow 0$. En particulier, on dit qu’elle est d’ordre r , avec $r > 1$, lorsque $\left| \frac{u_{n+1} - a}{(u_n - a)^r} \right| \longrightarrow c$ ($c > 0$). C’est le cas lorsque $|u_n - a| \approx \lambda k^{(r^n)}$ ($\lambda > 0$, $0 < k < 1$ et $r > 1$).

• Ex 4 : méthode de Héron. La suite $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{d}{u_n} \right)$ converge vers \sqrt{d} ; $\left| \frac{u_{n+1} - \sqrt{d}}{(u_n - \sqrt{d})^2} \right| \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{d}}$.

• Ex 5 : nombre e . Les suites $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ sont adjacentes ; $e - u_n \approx \frac{1}{n \cdot n!}$; $v_n - e \approx \frac{1}{n^3 \cdot n!}$.

b) Méthodes d'accélération de convergence

Barycentration

- Ex 6 : nombre π . Avec les notations de l'exemple 3, posons $w_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n$. (w_n) converge vers π plus rapidement que (u_n) et (v_n) : $w_n - \pi \approx \frac{\pi^5}{20 \cdot 16^n}$.

Développement asymptotique

- Ex 7 : constante d'Euler. En reprenant les notations de l'exemple 2, on a : $u_n - \gamma = \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En posant $v_n = u_n - \frac{1}{2n}$, on obtient une suite qui converge vers γ plus rapidement que (u_n).

Méthode de Richardson et Romberg

Si l'on est assuré de l'existence d'un développement asymptotique $u_n - a = \lambda k_1^n + O(k_2^n)$, avec $|k_2| < |k_1| < 1$, où k_1 est connu, mais pas λ , on pose $v_n = \frac{u_{n+1} - k_1 u_n}{1 - k_1}$. On a alors $v_n - a = O(k_2^n)$.

Remarque : si on dispose d'un développement asymptotique du type précédent à p termes, la méthode peut être itérée p fois.

Méthode d'Aitken

Avec les mêmes notations que ci-dessus, si k_1 n'est pas connu, on le remplace par $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}$ dans la définition de v_n . On obtient $v_n = \frac{u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2}{u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n}$ et on a encore $v_n - a = O(k_2^n)$.

- Ex 8 : Appliquer les méthodes de Richardson-Romberg et d'Aitken au calcul de π et de e , pour accélérer la convergence des suites des exemples 1 et 3.

2. Etude de suites divergentes tendant vers l'infini

La rapidité de divergence d'une suite (u_n) tendant vers l'infini se mesure par la rapidité de convergence de la suite $(\frac{1}{u_n})$ vers 0. On peut distinguer ainsi les notions de divergence lente, géométrique, rapide.

- Ex 9 : La suite $u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ diverge lentement vers $+\infty$; $u_n \approx \sqrt{2n}$.
- Ex 10 : La suite $u_0 > 0$, $u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{u_n}$ diverge géométriquement vers $+\infty$; il existe $a > 0$ tel que $u_n \approx a 2^n$.
- Ex 11 : La suite $u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ diverge rapidement vers $+\infty$; il existe $a > 0$ tel que $u_n \approx \exp(2^n a)$.

Remarque : dans les trois exemples précédents, on peut faire le parallèle avec les processus continus définis par les problèmes de Cauchy correspondants.

Bibliographie

ARNAUDIES et FRAYSSE, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
OVAERT et VERLEY, *Analyse vol.1*, CEDIC/Fernand Nathan

DÉFINITION DE L'INTÉGRALE SUR UN INTERVALLE COMPACT D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE CONTINUE. PROPRIÉTÉS

Remarques générales

Ne pas se lancer dans une théorie générale de l'intégration. Suivre le titre et ne traiter que le cas des fonctions numériques continues. Il faudra adapter les énoncés et démonstrations qui se trouvent dans les livres ; on pourra souvent les simplifier en utilisant l'hypothèse de continuité.

Plan

On n'envisage que des fonctions numériques *continues* définies sur un intervalle compact $[a, b]$. Il est toujours sous-entendu que $a < b$ (indispensable pour les inégalités). On suppose connues la définition et les propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a, b]$.

1. Intégrale de Riemann d'une fonction continue

a) Définition

Théorème et définition : Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b]$. Alors :

(i) il existe une suite (φ_n) de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$;

(ii) la suite $(\int_a^b \varphi_n)$ est convergente et sa limite I ne dépend que de f .

Le nombre I est appelé intégrale de f sur $[a, b]$ et noté $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t) dt$.

b) Autre point de vue : sommes de Riemann

Étant données une subdivision $\sigma = (x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b)$ de $[a, b]$ et une suite $\xi = (\xi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de $[a, b]$

telle que, pour tout i , $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, on pose $S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$.

Théorème : Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b]$. Alors $S(f, \sigma, \xi)$ admet une limite finie lorsque le pas de la subdivision tend vers 0 et cette limite est égale à $\int_a^b f$.

Application : calcul approché de $\int_a^b f$ par la méthode des rectangles à gauche, la méthode des rectangles à droite, la méthode du point milieu (ou des tangentes).

Exercice 1 : Soit $\alpha \neq \pm 1$; calculer $I_\alpha = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos t + \alpha^2) dt$.

c) Propriétés

- Interprétation géométrique.
- Additivité par rapport aux intervalles.
- Linéarité.

• Positivité : Si f est continue et positive sur $[a, b]$ ($a < b$), alors $\int_a^b f \geq 0$, avec égalité ssi $f = 0$. En particulier, $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

• Inégalités de Schwarz (pour f et g continues, égalité ssi f et g sont colinéaires) et de Minkowski (pour f et g continues, égalité ssi f et g sont \mathbf{R}^1 -colinéaires).

• $\|f\|_1 = \int_a^b |f|$ et $\|f\|_2 = (\int_a^b |f|^2)^{1/2}$ définissent des normes sur l'espace vectoriel $C^0([a, b])$ des fonctions numériques continues sur $[a, b]$. Cet espace, qui est complet pour la norme de la convergence uniforme, n'est complet ni pour $\|\cdot\|_1$, ni pour $\|\cdot\|_2$. On a par ailleurs les inégalités $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2 \leq (b-a) \|f\|_\infty$.

- Théorèmes de la moyenne.
- Intégrale de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Intégration terme à terme d'une série uniformément convergente de fonctions continues.

Exercice 2 : Soit f continue sur $[a, b]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b |f|^n \right)^{1/n} = \|f\|_\infty$.

2. Intégration des fonctions continues

a) Existence de primitives pour une fonction continue

Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral :

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I quelconque et soit a un point de I . Alors :

- (i) la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f$ est de classe C^1 sur I et c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a ;
- (ii) l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des $F + C$, où C décrit \mathbf{R} ;
- (iii) pour tous points a et b de I et toute primitive G de f sur I , on a $\int_a^b f = G(b) - G(a)$.

Remarque : Pour une fonction continue, l'intégration est l'opération inverse de la dérivation. Ce n'est plus vrai en général : il existe des fonctions intégrables qui n'admettent pas de primitives et il existe des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas intégrable.

b) Calcul des primitives

- *Intégration par parties :*

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors $\int_a^b f g' = [f g]_a^b - \int_a^b f' g$.

- *Changement de variables :*

Soit φ une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ et f une fonction continue sur $\varphi([a, b])$. Alors $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b (f \circ \varphi) \varphi'$.

Exercice 3 : Soit f de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $\left(\int_0^1 f \right)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 f'^2$.

Exercice 4 : Montrer que si f est continue sur $[a, b]$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx \, dx = 0$ (commencer par f en escalier).

Exercice 5 : Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi \ln 2}{8}$ (faire le changement de variable $x = \tan u$).

Exercice 6 : Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

Bibliographie

RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tome 3*, Masson
LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2*, Dunod

DÉRIVABILITÉ DE LA SOMME D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS DE CLASSE C^1 . APPLICATIONS.

Remarques générales

- Programme : “Intégration terme à terme d’une série uniformément convergente de fonctions continues sur un segment ; application à la dérivation terme à terme d’une série de fonctions de classe C^1 .”
- Le contenu de ce sujet étant assez réduit (un seul théorème), de nombreux exemples et applications semblent indispensables pour lui donner du corps.

Plan

Toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de \mathbf{R} et à valeurs dans un espace vectoriel normé E sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} de dimension finie (donc complet). On suppose connues les généralités sur les séries de fonctions (convergences simple, uniforme, normale).

1. Dérivation terme à terme d’une série de fonctions

a) Le théorème de base

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe C^1 sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f .
Si la série des dérivées $\sum f'_n$ est uniformément convergente sur I , alors f est de classe C^1 sur I et pour tout x de I ,
$$f'(x) = \sum_{n \geq 0} f'_n(x).$$

b) Raffinements

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions dérivables sur I telle que :

- la série $\sum f_n(x_0)$ converge pour un point x_0 de I ;
- la série des dérivées $\sum f'_n$ est uniformément convergente sur tout compact inclus dans I .

Alors :

- la série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f , la convergence étant uniforme sur toute partie bornée de I ;
- f est dérivable sur I et pour tout x de I , $f'(x) = \sum_{n \geq 0} f'_n(x)$.

c) Exemples

- La fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ est indéfiniment dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a $\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^p (\ln n)^p}{n^x}$.
- La fonction $F : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{e^{inx}}{1+n^2}$ est continue sur \mathbf{R} et dérivable sur $\mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$. Elle n’est pas dérivable en 0 .
- La fonction $f : (x, y) \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{1+y^n}$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{+*}$.

2. Applications

a) Etude des variations d’une fonction définie par une série

Exemple : étudier la fonction $f : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{\exp(-nx^2)}{n^2}$ (monotonie, convexité ...)

b) Séries entières

La somme $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ d'une série entière est une fonction indéfiniment dérivable sur son intervalle de convergence et on a $f^{(p)}(x) = \sum_{n \geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$.

Application 1 : les fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto e^{ix}$, \cos , \sin sont indéfiniment dérivables sur \mathbf{R} .

Application 2 : obtention des développements en série entière des fonctions \cos^{-1} , \sin^{-1} , \tan^{-1} , ch^{-1} , sh^{-1} , th^{-1} en se ramenant par dérivation terme à terme à celui de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Application 3 : résolution d'équations différentielles. Exemple : $(x^2 - x)y'' + (x + 4)y' - 4y = 0$.

c) Calcul de la somme d'une série de fonctions

Exercice 1 : Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} nx e^{-nx^2}$ est uniformément convergente sur tout compact de \mathbf{R} et calculer sa somme.

Exercice 2 : Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n}{C_{2n}^n} x^n$ est solution, sur son intervalle de convergence, de l'équation différentielle $2(x - x^2)y' - (2x + 1)y = -1$. En déduire sa somme.

d) Exponentielle d'une matrice, systèmes différentiels linéaires

On définit l'exponentielle d'une matrice M de $M_n(\mathbf{C})$ par $\exp(M) = \sum_{n \geq 0} \frac{M^n}{n!}$ (série absolument convergente donc convergente).

L'application $g : \mathbf{R} \rightarrow M_n(\mathbf{C})$, $t \mapsto \exp(tM)$ est dérivable sur \mathbf{R} et $g'(t) = M \exp(tM) = \exp(tM) M$.

Application : la solution du système différentiel linéaire homogène à coefficients constants $X' = MX$ telle que $X(t_0) = X_0$ est $X(t) = \exp[(t - t_0)M]X_0$.

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2*, Dunod
LEHNING, *Analyse fonctionnelle*, Masson
FLORY, *Topologie et analyse, tome 4*, Vuibert
MONIER, *Analyse, tome 2*, Dunod

FONCTIONS CONTINÛMENT DIFFÉRENTIABLES DE DEUX VARIABLES, DIFFÉRENTIELLE. CALCUL SUR LES DÉRIVÉES PARTIELLES

Remarques générales

Une difficulté importante est le choix de l'espace d'arrivée des fonctions de deux variables que l'on considère, en particulier si l'on veut parler de différentielles d'ordre supérieur.

Plan

1. Dérivées partielles et différentielle

f désigne une fonction définie sur un ouvert U de \mathbf{R}^2 , à valeurs dans un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie F (on rappelle que dans ces conditions, toute application linéaire est continue et toutes les normes sont équivalentes). $a = (x_0, y_0)$ désigne un point de U .

a) Définitions

• On dit que f est dérivable par rapport à la première variable en a si la fonction partielle $f(\cdot, y_0) : \mathbf{R} \rightarrow F$ est dérivable en x_0 . Dans ce cas, le vecteur dérivé se note $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et s'appelle première dérivée partielle de f en a . On définit de même la deuxième dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

• On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbf{R}^2 \rightarrow F$ telle que, au voisinage de l'origine, $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$. Dans ce cas, L est unique, se note $f'(a)$ et s'appelle différentielle de f en a . On remarque que si f est différentiable en a , alors elle est continue en ce point.

Remarque : Si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ et f' sont définies sur U tout entier, on peut définir les dérivées

partielles secondes de f en un point a (on note $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, etc) et la différentielle seconde de f en a , notée $f''(a)$. Et ainsi de suite ...

b) Liens entre les deux notions

Si f est différentiable en a , alors elle admet des dérivées partielles en a et $f'(a)(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(a) + y \frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Réciproque fautive : La fonction $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ possède des dérivées partielles à l'origine mais n'est même pas continue en ce point, donc n'y est pas différentiable.

Si f admet des dérivées partielles en tout point d'un voisinage de a et si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en a , alors f est différentiable en a .

Réciproque fautive : La fonction $f(x, y) = |xy|$ est différentiable à l'origine mais aucune des dérivées partielles n'est définie dans un voisinage de l'origine.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est différentiable sur U et f' est continue sur U .

(ii) f admet des dérivées partielles en tout point de U et $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U .

Définition : Dans ce cas, on dit que f est continûment différentiable ou de classe C^1 sur U .

2. Calcul sur les dérivées partielles

a) Dérivées partielles et fonctions composées

1^{er} cas. $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : I \subset \mathbf{R} \rightarrow F$, avec $f(U) \subset I$. Si f admet une première dérivée partielle en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ admet une première dérivée partielle en a et $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(a) = g'(f(a)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a)$.

2^e cas. $f = (f_1, f_2) : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ et $g : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow F$ avec $f(U) \subset U$. Si f_1 et f_2 sont dérivables en a et si g admet des dérivées partielles dans U continues en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = \frac{\partial g}{\partial x}(f(a)) \cdot f_1'(a) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(a)) \cdot f_2'(a)$.

3^e cas. $f = (f_1, f_2) : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ et $g : V \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow F$ avec $f(U) \subset V$. Si f_1 et f_2 admettent une première dérivée partielle en a et si g admet des dérivées partielles dans V continues en $f(a)$, alors $g \circ f$ admet une première dérivée partielle en a et $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(a) = \frac{\partial g}{\partial x}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(a)$.

b) Théorème de Schwarz

Soit $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow F$, admettant dans U des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ continues en a . Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

c) Exemples de calculs

Exemple 1 : Déterminer les fonctions f de classe C^1 de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} telles que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ (faire le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$).

Exemple 2 : On pose $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Exemple 3 : Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, de classe C^2 . Exprimer le laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en coordonnées polaires.

Bibliographie

LIRET et ZISMAN, *Maths tome 3*, Dunod
LEHNING, *Analyse en dimension finie*, Masson
FLORY, *Topologie, analyse tome 3*, Vuibert

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 2 : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, OÙ a, b, c SONT DES FONCTIONS CONTINUES

Remarques générales

- On peut supposer connu le théorème de Cauchy-Lipschitz pour un système linéaire d'ordre 1 (théorème admis conformément au programme) ; on peut également le démontrer (voir LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS).
- Les plus courageux pourront présenter des applications (problèmes de mécanique, fonctions de Bessel, ...).

Plan

1. Définitions et notations

- $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} ; I intervalle de \mathbf{R} ; a, b, c applications continues de I dans \mathbf{K} .
- Equation différentielle linéaire d'ordre 2 : (L) $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$
- Solution de (L) : toute application f de I dans \mathbf{K} , deux fois dérivable sur I et telle que pour tout t de I on ait $f''(t) + a(t)f'(t) + b(t)f(t) = c(t)$.
- Equation homogène associée : (H) $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$
- Système différentiel d'ordre 1 associé :
(S) $X' = A(t)X + B(t)$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$.

2. Résolution de (H)

a) Structure algébrique de l'ensemble des solutions de (H)

- L'ensemble $S(H)$ des solutions de (H) est un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension 2. Toute base de $S(H)$ est appelée système fondamental de solutions. Il existe une unique solution telle que x et x' prennent des valeurs données en un point de I donné (*problème de Cauchy*).
- Etant donnés deux éléments f_1 et f_2 de $S(H)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (i) (f_1, f_2) est un système fondamental de solutions
 - (ii) il existe t dans I tel que $\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$
 - (iii) pour tout t de I , on a $\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$

Le déterminant ci-dessus est appelé wronskien de (f_1, f_2) .

b) Techniques pour déterminer un système fondamental de solutions

- On peut chercher des solutions d'un type particulier (polynômes, exponentielles, puissances) ou plus généralement des solutions développables en série entière.
- Lorsqu'on connaît une solution f_1 ne s'annulant pas sur I , le changement de fonction inconnue $x = f_1 z$ permet de se ramener à une équation linéaire d'ordre 1 en z' .

Exemple 1 : $(t+1)x'' - x' - tx = 0$

Exemple 2 : $(t^2+t)x'' + (t-1)x' - x = 0$

Exemple 3 : $x'' + tx' + x = 0$

3. Résolution de (L)

a) Structure algébrique de l'ensemble des solutions de (L)

L'ensemble $S(L)$ des solutions de (L) est un \mathbf{K} -espace affine de dimension 2, de direction $S(H)$.

b) Technique pour déterminer une solution particulière

Soit (f_1, f_2) un système fondamental de solutions de (H). Alors $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, où λ_1 et λ_2 sont deux fonctions inconnues, est solution de (L) si
$$\begin{cases} \lambda_1' f_1 + \lambda_2' f_2 = 0 \\ \lambda_1' f_1' + \lambda_2' f_2' = c(t) \end{cases}$$
, ce qui permet de déterminer λ_1 et λ_2 par deux quadratures (*méthode de variation des constantes*).

Exemple 4: $(t+1)x'' - x' - tx = e^{-t}$

4. Cas où a et b sont des constantes

a) Résolution de (H)

• L'équation (EC) $r^2 + ar + b = 0$ est appelée équation caractéristique de (H).

• Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, un système fondamental de solutions de (H) est :

$$\begin{aligned} (e^{r_1 t}, e^{r_2 t}) & \quad \text{si (EC) admet deux racines distinctes } r_1 \text{ et } r_2 \\ (e^{rt}, t e^{rt}) & \quad \text{si (EC) admet une racine double } r = r_1 = r_2 \end{aligned}$$

• Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, un système fondamental de solutions de (H) est :

$$\begin{aligned} (e^{r_1 t}, e^{r_2 t}) & \quad \text{si (EC) admet deux racines réelles distinctes } r_1 \text{ et } r_2 \\ (e^{rt}, t e^{rt}) & \quad \text{si (EC) admet une racine double } r = r_1 = r_2 \\ (e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t) & \quad \text{si (EC) admet deux racines complexes conjuguées } r_1 = \alpha + i\beta \text{ et } r_2 = \alpha - i\beta \end{aligned}$$

b) Résolution de (L)

Outre la méthode de variation des constantes, on dispose d'une autre technique lorsque le second membre est une exponentielle-polynôme :

Si $c(t) = e^{mt} P(t)$, où $P \in \mathbf{K}[X]$, on cherche une solution particulière sous la forme $f_0 = e^{mt} Q(t)$, avec :
degré de $Q = \text{degré de } P + \text{ordre de multiplicité de } m \text{ dans (EC)}$.

Exemple 5 : $x'' - 3x' + 2x = (6t - 1)e^t$

Exemple 6 : $x'' + 4x' + 5x = t e^{-2t} \sin t$

Exemple 7 : $t^2 x'' + \alpha t x' + \beta x = 0$ (*équation d'Euler*)

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 4*, Dunod

LEHNING, *Analyse fonctionnelle*, Masson

MASCART et STOKA, *Fonctions d'une variable réelle, tome 3 : équations différentielles*, PUF

GEFFROY, *Equations différentielles*, PUF

ESPACES VECTORIELS NORMÉS DE DIMENSION FINIE ; NORMES USUELLES, ÉQUIVALENCE DES NORMES

Remarques générales

- La leçon tourne autour de trois résultats qui caractérisent chacun la dimension finie : l'équivalence des normes, la continuité des applications linéaires et la locale compacité.
- Penser à donner en parallèle des exemples et contre-exemples en dimension infinie.

Plan

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} . On suppose connues les généralités sur les e.v.n. (notamment la caractérisation des applications linéaires continues), ainsi que les propriétés topologiques de \mathbf{K}^n (en particulier la complétude et le fait que les compacts sont les fermés bornés).

1. Normes en dimension finie

a) Etude des normes usuelles

Soient (e_1, \dots, e_n) une base de E et $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur quelconque de E .

Les relations suivantes définissent des normes sur E :

$$\bullet \quad \boxed{\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}} \quad (\text{pour } p \geq 1) \quad \bullet \quad \boxed{\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|} \quad \left(= \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p \right)$$

Si $1 \leq p < q < \infty$, on a les inégalités $\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$.

Exercice 1 (caractérisation des normes euclidiennes) : Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, une norme est associée à un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2]$.

Exercice 2 (autres exemples) : Dans \mathbf{R}^2 , $N_1(x) = \sup_{t \in [0,1]} |x_1 + t x_2|$ et $N_2(x) = \int_0^1 |x_1 + t x_2| dt$ définissent des normes. Les comparer.

b) Equivalence des normes

- On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes si elles définissent la même topologie. C'est le cas ssi il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que $aN_1 \leq N_2 \leq bN_1$.

• *Théorème :* En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

- Il en résulte que la topologie de E est canonique, indépendante du choix d'une base, et que E est isomorphe à \mathbf{K}^n . Par suite, E est complet et les compacts de E sont les fermés bornés.

Exercice 3 (cas d'un corps non complet) : Dans $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$, \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension 2, les normes $N_1(a + b\sqrt{2}) = |a + b\sqrt{2}|$ et $N_2(a + b\sqrt{2}) = |a| + |b|$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 4 (contre-exemple en dimension infinie) : Dans l'espace vectoriel des suites sommables à termes réels ou complexes, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

2. Applications linéaires en dimension finie

a) Continuité

Théorème : Toute application linéaire d'un e.v.n. E de dimension finie dans un e.v.n. F quelconque est continue.

Exercice 5 (contre-exemple en dimension infinie) : L'application $f \mapsto f'$, de $C^1([0, 1], \mathbf{K})$ dans $C^0([0, 1], \mathbf{K})$, munis de la norme $\| \cdot \|_\infty$, n'est pas continue.

Conséquences :

- En dimension finie, le dual topologique coïncide avec le dual algébrique.

- $L(E, F)$ est à son tour un e.v.n. pour $\|f\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$. Cette norme, notée parfois $\| \cdot \|$, est la norme d'opérateur associée aux normes choisies dans E et dans F.

- Si de plus $E = F$, $L(E)$ est, pour cette norme, une algèbre normée.

b) Normes d'opérateurs associées aux normes usuelles

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice associée à un élément f de $L(E)$ dans la base (e_1, \dots, e_n) . Les normes d'opérateur associées aux normes $\| \cdot \|_\infty$, $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ sont définies par les relations :

$$\bullet \quad \|f\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \quad \bullet \quad \|f\|_1 = \sup_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \quad \bullet \quad \|f\|_2 = \sqrt{\sup_{1 \leq i \leq n} \lambda_i}$$

où les λ_i sont les valeurs propres (réelles et positives) de la matrice (symétrique réelle) ${}^t\bar{A}A$.

3. Caractérisation de la dimension finie

Théorème de Riesz : Un espace vectoriel normé est de dimension finie ssi sa boule unité fermée est compacte.

Il est équivalent de dire que E est localement compact, ou qu'il existe dans E un compact d'intérieur non vide.

Exercice 6 : Démontrer directement que dans $C([0, 1], \mathbf{K})$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$, la boule unité fermée n'est pas compacte.

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tome 3*, Masson
CHOQUET, *Topologie*, Masson
TISSERON, *Topologie, Espaces fonctionnels*, Hermann

ESPÉRANCE, VARIANCE, COVARIANCE ; LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Remarques générales

- La principale difficulté est qu'il faut traiter à la fois le cas des variables aléatoires discrètes et celui des variables continues. Ne pas hésiter à admettre certains résultats soulevant des problèmes théoriques difficiles.
- Ne pas oublier de commenter oralement le sens des définitions et résultats qui sont donnés abstraitement dans le plan. Prévoir des applications concrètes.

Plan

1. Espérance

a) Définitions

- Soit X une variable aléatoire réelle (v.a.r.) discrète prenant les valeurs x_1, x_2, \dots . On dit que X admet une espérance lorsque la série $\sum x_i P(X = x_i)$ est absolument convergente. Dans ce cas, la somme de cette série est appelée espérance de X et notée $E(X)$.
- Soit X une v.a.r. continue ayant une densité de probabilité f . On dit que X admet une espérance lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ est convergente. La valeur de cette intégrale est alors appelée espérance de X et notée $E(X)$.

b) Propriétés

- Si X est une v.a.r. discrète admettant une espérance et si φ est une application quelconque de \mathbf{R} dans \mathbf{R} telle que $\varphi(X)$ admette une espérance, alors $E(\varphi(X)) = \sum \varphi(x_i) P(X = x_i)$. Si X est une v.a.r. continue admettant une espérance et si φ est une application de \mathbf{R} dans \mathbf{R} continue sur $X(\Omega)$ telle que $\varphi(X)$ admette une espérance, alors $E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f(t) dt$.
- Si X et Y admettent une espérance, alors $X + Y$ admet une espérance et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$. Si de plus X et Y sont indépendantes, alors XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$.
- Si X admet une espérance, alors $aX + b$ admet une espérance et $E(aX + b) = aE(X) + b$.

2. Variance et covariance

a) Définitions

- Soit X une v.a.r.. Si X^2 (et par suite X) admet une espérance, on dit que X admet une variance. On appelle alors variance de X et on note $V(X)$ le nombre $E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$.
- Si X admet une variance, on appelle écart-type de X et on note $\sigma(X)$ le nombre $\sqrt{V(X)}$.
- Soient X et Y deux v.a.r.. Si X et Y admettent une variance (il en résulte que XY admet une espérance), on dit que le couple (X, Y) admet une covariance. On appelle alors covariance de (X, Y) et on note $\text{Cov}(X, Y)$ le nombre $E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- Si X et Y admettent une variance non nulle, on appelle coefficient de corrélation linéaire de (X, Y) et on note $\rho(X, Y)$ le nombre $\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

b) Propriétés

• Si X admet une variance, alors $aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Application : Si X admet une variance, la v.a.r. $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ a pour espérance 0 et pour variance 1 ; on l'appelle variable centrée réduite associée à X .

• Si X et Y admettent une variance, alors $X + Y$ admet une variance, $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$ et $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$.

Si de plus X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

3. Cas des lois de probabilité usuelles

Nom	Valeurs	Loi ou densité	Espérance	Variance
Loi de Bernouilli ($1, p$)	$\{0, 1\}$	$P(X = 0) = p$ $P(X = 1) = q$	p	pq
Loi binomiale (n, p)	$\{1, \dots, n\}$	$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	np	npq
Loi hypergéométrique (N, n, p)	incluses dans $\{1, \dots, n\}$	$P(X = k) = \frac{C_{Np}^k C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}$	np	$npq \frac{N-n}{N-1}$
Loi de Poisson (λ)	\mathbf{N}	$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Loi uniforme ($[a, b]$)	$[a, b]$	$f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$ $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a, b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi exponentielle (λ)	\mathbf{R}_+	$f(x) = 0$ si $x < 0$ $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Loi de Laplace-Gauss (m, σ)	\mathbf{R}	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2

4. Loi faible des grands nombres

a) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une v.a.r. admettant une variance. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

b) Loi faible des grands nombres

Soit (X_n) une suite de v.a.r. de même loi, deux à deux indépendantes et admettant une variance. Alors, si on note m leur espérance commune et $S_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|S_n - m| \geq \varepsilon) = 0$.

Remarque 1 : On dit alors que (S_n) converge en probabilité vers la v.a.r. certaine égale à m .

Remarque 2 : Le résultat subsiste si l'on suppose seulement que les v.a.r. admettent une espérance mais la démonstration est plus difficile (voir FELLER).

5. Applications

(Prévoir ici quelques exercices concrets permettant de mettre en oeuvre les notions et résultats de cette leçon.)

Bibliographie

LEBOEUF, ROQUE et GUÉGAND, *Cours de probabilités et statistiques*, Ellipses
FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley

DÉFINITION DE L'EXPONENTIELLE COMPLEXE ET DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES ; NOMBRE π

Remarques générales

- “Un candidat à l'agrégation doit avoir réfléchi sérieusement au problème de la mesure des angles, en particulier à la notion d'argument d'un nombre complexe, et ne peut se contenter de ce qu'en dit le programme de Terminale - a fortiori d'une ficelle qu'on enroule sur une poulie circulaire !” (Rapport du jury 1990)
- La partie sur le nombre π doit être l'occasion de faire appel à l'ensemble du programme. En particulier, on proposera des méthodes de calcul approché, en évaluant avec soin rapidité de convergence et précision obtenue.

Plan

1. Exponentielle complexe et fonctions trigonométriques

a) Définitions

- Pour tout complexe z , la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente, donc convergente. Sa somme est notée

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}. \text{ L'application } z \mapsto \exp(z) \text{ est appelée } \underline{\text{exponentielle complexe}}.$$

- On définit alors les fonctions cosinus (réel) et sinus (réel) par les formules d'Euler :

$$\cos x = \operatorname{Re}(\exp(ix)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin x = \operatorname{Im}(\exp(ix)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

puis les fonctions tangente et cotangente par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Ces quatre fonctions sont les fonctions trigonométriques.

b) Premières propriétés

- \exp est un homomorphisme du groupe $(\mathbf{C}, +)$ dans le groupe (\mathbf{C}^*, \times) .
- Pour tout complexe z , l'application $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, t \mapsto e^{zt}$, est dérivable et $f'(t) = z e^{zt}$. Il en résulte que les fonctions trigonométriques sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition.
- L'application $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+^*, x \mapsto e^x$, appelée exponentielle réelle, est un isomorphisme de classe C^∞ et strictement croissant du groupe $(\mathbf{R}, +)$ sur le groupe (\mathbf{R}_+^*, \cdot) . Sa réciproque est appelée logarithme népérien. Le nombre $e = \exp(1)$ est le nombre d'Euler. C'est un nombre irrationnel. Justification de la notation $\exp(z) = e^z$.
- $\cos 0 = 1$ et \cos admet au moins un zéro sur \mathbf{R}_+ . On appelle nombre pi et on note π le double du plus petit zéro strictement positif de \cos .

c) Théorème fondamental

L'application $x \mapsto e^{ix}$ est un homomorphisme surjectif du groupe $(\mathbf{R}, +)$ sur le groupe (\mathbf{U}, \times) des nombres complexes de module 1, de noyau $2\pi\mathbf{Z}$.

Conséquences :

- L'isomorphisme de \mathbf{U} sur le groupe quotient $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, qui résulte du théorème fondamental, est appelé argument et noté \arg . On appelle argument d'un nombre complexe z non nul et on note $\arg(z)$ l'argument de $\frac{z}{|z|}$.

L'application $z \mapsto (|z|, \arg(z))$ est un isomorphisme du groupe (\mathbf{C}^*, \times) sur le groupe $(\mathbf{R}_+^*, \times) \times (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}, +)$.

- cos et sin sont 2π -périodiques. cos (paire) est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, dont la réciproque est appelée arc cosinus. sin (impaire) est une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$, dont la réciproque est appelée arc sinus.
- tan est définie sur $]-\pi/2, \pi/2[+ \pi\mathbf{Z}$ et est π -périodique. tan est une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur \mathbf{R} , dont la réciproque est appelée arc tangente. Résultats analogues pour cot.
- Mesure des angles dans un plan euclidien orienté, coordonnées polaires, paramétrisation d'un cercle.

3. Un "pot-pourri" sur le nombre π

a) Nature algébrique de π

Théorème (Lambert, 1761; Legendre, 1794): π et π^2 sont irrationnels.

Remarque : En fait, π est transcendant mais la démonstration (Lindemann, 1882) est hors de portée. Il en résulte notamment l'impossibilité de carrer le cercle à la règle et au compas.

b) Approximation du cercle par des polygones réguliers (méthode d'Archimède)

On note u_n (resp. v_n) la demi-longueur du polygone régulier à 2^n côtés ($n \geq 2$) inscrit dans le (resp. circonscrit au) cercle trigonométrique. (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers π ; $v_n - u_n \approx \frac{\pi^3}{2 \cdot 4^n}$. Si on pose

$$w_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n. (w_n) \text{ converge vers } \pi \text{ plus rapidement que } (u_n) \text{ et } (v_n) : w_n - \pi \approx \frac{\pi^5}{20 \cdot 16^n}.$$

c) Utilisation des séries de Fourier

En appliquant le théorème de Dirichlet et le théorème de Parseval à la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi]$

par $f(t) = t^2$, on obtient les égalités $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

d) Des intégrales remarquables

En étudiant la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$, on obtient $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (on peut aussi utiliser une

intégrale double). En étudiant la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t} dt$, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

e) L'aiguille de Buffon

On lance une aiguille de longueur a sur un parquet formé de lames de largeur a . La probabilité pour que l'aiguille coupe l'une des raies de ce parquet est égale à $2/\pi$.

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques*, Dunod
 ARNAUDIÈS et FRAYSSE, *Cours de mathématiques*, Dunod
Numéro spécial π , supplément au Petit Archimède n°64-65
 OVAERT et VERLEY, *Analyse vol. 1*, CEDIC/Fernand Nathan

FONCTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION CONTINUE, D'UNE FONCTION DÉRIVABLE. EXEMPLES. ON SE LIMITERA AUX FONCTIONS NUMÉRIQUES DÉFINIES SUR UN INTERVALLE DE \mathbf{R}

Remarques générales

- “Que penser d’une leçon sur les fonctions réciproques qui ne signale pas - ni n’illustre - la symétrie des deux graphes ?” (Rapport du jury 1990)
- “Il faut avoir réfléchi à la pertinence des hypothèses des théorèmes que l’on cite : “Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est continue et strictement croissante, l’image par f d’un intervalle I est un intervalle J de même nature.” — “Est-ce encore vrai si l’on suppose seulement f continue ?” — “Je ne sais pas.” Le jury, magnanime, a alors proposé $f(x) = x^2$, $I =] -1, 1[\dots$ ” (Rapport du jury 1992)

Plan

1. Fonction réciproque d’une fonction continue

a) Position du problème

Soit f une fonction numérique continue définie sur un intervalle I de \mathbf{R} . On sait que $f(I)$ est un intervalle. Si f est injective, f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et on peut définir une fonction réciproque f^{-1} , qui est comme f une fonction numérique définie sur un intervalle de \mathbf{R} . Or les fonctions continues et injectives sur I sont caractérisées par le théorème :

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue et injective
- (ii) f est continue et strictement monotone
- (iii) f est strictement monotone et $f(I)$ est un intervalle.

Il suffit donc d’étudier les fonctions continues et strictement monotones sur I .

b) Théorème des fonctions réciproques

Soit f une fonction numérique continue et strictement monotone sur un intervalle I d’extrémités a et b (dans $\overline{\mathbf{R}}$). Alors :

- i) $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert) d’extrémités $\lim_{x \rightarrow a} f$ et $\lim_{x \rightarrow b} f$;
- (ii) f est une bijection de I sur $f(I)$;
- (iii) f^{-1} est continue et strictement monotone, de même sens que f ;
- (iv) dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d’équation $y = x$.

Conséquence : Caractérisation des homéomorphismes d’un intervalle I sur un intervalle J . Dans l’ensemble des intervalles de \mathbf{R} , il y a cinq classes d’homéomorphie: celles de \emptyset , $\{0\}$, $[0, 1]$, $]0, 1[$ et $]0, 1[$.

Application : Nombre de racines d’une équation à partir de l’étude des variations de la fonction correspondante.

c) Exemples

Fonctions réciproques de \ln , $x \mapsto x^n$, \sin , \cos , \tan , sh , ch , th .

Exercice 1 : Montrer que $f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ réalise une bijection de \mathbf{R} sur $] -1, 1[$ et calculer f^{-1} .

Exercice 2 : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$. Montrer que $\int_a^b f = b f(b) - a f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}$. Application : calculer $I = \int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \cos^{-1} \left(\sqrt{2} \cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1} x \right) \right) dx$.

Exercice 3 : Soit f une application contractante de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . Montrer que l'application $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + f(y), y + f(x))$, est bijective.

2. Dérivabilité d'une fonction réciproque

a) Théorème de dérivation d'une fonction réciproque

Soit f un homéomorphisme de l'intervalle I sur l'intervalle J . Alors :

(i) f^{-1} est dérivable en un point x de J ssi f est dérivable en $f^{-1}(x)$, de dérivée non nulle ; dans ce cas,
 $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$;

(ii) f^{-1} est de classe C^k sur J ssi f est de classe C^k sur I et si f' ne s'annule pas.

Applications : Inversion locale d'une fonction numérique. Calcul approché d'une racine d'une équation par la méthode des approximations successives lorsque $|f'(a)| > 1$.

b) Exemples

Dérivées des fonctions réciproques des fonctions usuelles.

Application : Intégration des fonctions rationnelles.

c) Développement limité d'une fonction réciproque

Soient I un intervalle de \mathbf{R} contenant 0, et f une application continue et strictement monotone sur I , admettant au voisinage de 0 un développement limité à un ordre n non nul et une partie principale $t \mapsto at$, avec $a \neq 0$. Alors f^{-1} admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n et une partie principale $t \mapsto \frac{1}{a}t$.

Pratiquement, le développement limité de f^{-1} s'obtient à partir de l'égalité $f^{-1} \circ f(t) = t$. En particulier, si $f(t) = t + \alpha t^n + o(t^n)$, alors $f^{-1}(t) = t - \alpha t^n + o(t^n)$.

Exercice 4 : Montrer que pour tout $x \geq 0$, l'équation $y^3 + xy = 1$ a une solution unique et que l'application $x \mapsto y$ est de classe C^∞ sur \mathbf{R}^+ ; donner son développement limité à l'ordre trois en 0.

Exercice 5 : Montrer que $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1} \frac{a+b}{1-ab} + k\pi$, avec $k = 0$ si $ab < 1$, $k = 1$ si $ab > 1$ et $a > 0$, $k = -1$ si $ab > 1$ et $a < 0$. En déduire l'égalité $\pi = 16 \tan^{-1} \frac{1}{5} - 4 \tan^{-1} \frac{1}{239}$ et un calcul de π .

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2*, Dunod
 RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tome 3*, Masson
 MONIER, *Analyse tome 1*, Dunod

FONCTIONS CONVEXES D'UNE VARIABLE RÉELLE

Remarques générales

• Programme : Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1 par les propriétés suivantes : la partie du plan située au-dessus de la courbe est convexe ; tout arc est sous sa corde ; la dérivée première est croissante ; la courbe est au-dessus de chaque tangente.

• L'exposé de ces résultats est standard et fait l'objet d'un chapitre dans tous les traités. C'est plutôt par un choix judicieux d'exercices et d'applications (exploitant notamment les inégalités de convexité) que l'on pourra introduire une touche personnelle et originale.

Plan

f désigne partout une fonction numérique définie sur un intervalle I de \mathbf{R} .

1. Notion de fonction convexe

a) Définitions

f est convexe ssi, pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, $f[(1 - \lambda)x + \lambda y] \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

f est strictement convexe lorsque les inégalités précédentes sont strictes pour $x \neq y$ et $\lambda \in]0, 1[$.

f est concave (resp. strictement concave) ssi $-f$ est convexe (resp. strictement convexe).

Exercice 1 : Si f est continue et si, pour tout $(x, y) \in I^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$, alors f est convexe.

Exercice 2 : Opérations sur les fonctions convexes.

a) Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.

b) Une limite simple de fonctions convexes est convexe.

c) Si f est convexe et si g est convexe croissante, alors $g \circ f$ est convexe.

d) Si f est une bijection convexe croissante, alors f^{-1} est concave.

e) Application : \exp est convexe ; \ln est concave; cas de \exp_a et \log_a pour $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

b) Caractérisations

La convexité de f équivaut à chacune des propriétés suivantes :

(i) Tout arc du graphe de f est au-dessous de sa corde.

(ii) L'épigraphé de f est convexe (au sens de partie convexe d'un espace affine).

(iii) Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}_+^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

(iv) Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ est croissante sur $I \setminus \{x\}$.

Caractérisations analogues pour une fonction strictement convexe.

Application : Méthode d'interpolation linéaire pour la résolution approchée d'une équation $f(x) = 0$, avec f croissante et convexe.

2. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes

Si I est ouvert et si f est convexe, alors f est continue et admet des dérivées à gauche et à droite qui sont des fonctions croissantes. De plus, le graphe de f est au-dessus de toute tangente à gauche et de toute tangente à droite.

Remarque : Ces propriétés ne s'étendent pas aux extrémités d'un intervalle semi-fermé ou fermé ; d'autre part, f peut ne pas être dérivable en un point intérieur. Prendre f définie sur [0, 2] par f(0) = f(2) = 1, f(x) = -x si x ∈]0, 1] et f(x) = x - 2 si x ∈ [1, 2[.

Si f est de classe C^1 sur I (à nouveau quelconque), la convexité de f équivaut à chacune des propriétés suivantes :

- (v) f' est croissante.
 (vi) Le graphe de f est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Caractérisations analogues pour une fonction strictement convexe. Exemple : $t \mapsto t^\alpha$.

Application : Méthode de Newton pour la résolution approchée d'une équation $f(x) = 0$, avec f croissante et convexe.

Exercice 3 : Une fonction convexe dérivable est de classe C^1 .

Exercice 4 : Pour un triangle ABC, $\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Cas d'égalité ?

3. Inégalités de convexité

a) Inégalités des moyennes

Soient a_1, \dots, a_n des réels strictement positifs. Pour tout α réel, on définit la moyenne d'ordre α des a_i par

$$M_\alpha = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^\alpha \right)^{1/\alpha} \quad \text{si } \alpha \neq 0, \text{ et } M_0 = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n}.$$

Les cas usuels sont $\alpha = 0$ (moyenne géométrique), $\alpha = 1$ (moyenne arithmétique), $\alpha = 2$ (moyenne quadratique), $\alpha = -1$ (moyenne harmonique).

Si $\alpha < \beta$, on a $M_\alpha \leq M_\beta$, avec égalité ssi tous les a_i sont égaux.

Exercice 5 : Les suites $\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$ et $\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right)$ sont adjacentes. Elles définissent le nombre e.

Exercice 6 : Pour $u > 0, v > 0, w > 0$, quel est le minimum de $\frac{v+w}{u} + \frac{w+u}{v} + \frac{u+v}{w}$?

b) Inégalités de Hölder et de Minkowski

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels strictement positifs, $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

• Inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}, \text{ avec égalité ssi les suites } (a_i^p) \text{ et } (b_i^q) \text{ sont proportionnelles.}$$

Pour $p = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

• Inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p}, \text{ avec égalité ssi } (a_i) \text{ et } (b_i) \text{ sont proportionnelles.}$$

Pour $p = 2$, on retrouve l'inégalité triangulaire. Application : Normes usuelles dans \mathbf{R}^n et dans \mathbf{C}^n .

Bibliographie

ARNAUDIÈS et FRAYSSE, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
 OVAERT et VERLEY, *Analyse, vol.1*, CEDIC/Fernand Nathan

FONCTIONS MONOTONES D'UNE VARIABLE RÉELLE

Remarques générales

- Dans le programme, il n'est jamais question explicitement de fonctions monotones. Il s'agit donc d'une leçon de synthèse à composer en puisant dans divers chapitres.
- Pour simplifier, on ne considère que des fonctions définies sur un intervalle mais on pourrait envisager des fonctions définies sur une partie quelconque de \mathbf{R} (l'avantage serait alors de couvrir le cas des suites monotones). Par ailleurs, d'autres thèmes que ceux choisis ici peuvent être abordés : suites récurrentes associées à une fonction monotone, caractérisation des fonctions convexes ...

Plan

1. Généralités

a) Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbf{R} et à valeurs dans \mathbf{R} . On dit que f est croissante (resp. décroissante, resp. strictement croissante, resp. strictement décroissante) si, pour tous x et y de I tels que $x < y$, on a $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$, resp. $f(x) < f(y)$, resp. $f(x) > f(y)$). On dit que f est monotone (resp. strictement monotone) si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Remarque : Si f est décroissante, $-f$ est croissante. Le plus souvent dans la suite, on se contentera donc d'énoncer les propriétés pour les fonctions croissantes.

Exercice 1 : Une application croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ admet au moins un point fixe.

Exercice 2 : L'identité est la seule application additive croissante de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

Exercice 3 : Soit (f_n) une suite d'applications croissantes de $[a, b]$ dans \mathbf{R} , convergeant simplement vers f continue. Montrer que f est croissante et que la convergence est uniforme.

b) Opérations sur les fonctions monotones

- La somme de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.
- Le produit d'une fonction croissante par un réel positif est une fonction croissante.
- Le produit de deux fonctions positives croissantes est une fonction croissante.
- L'inverse d'une fonction croissante strictement positive est une fonction décroissante.
- La composée de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.

2. Limites d'une fonction monotone

a) Existence d'une limite à gauche et à droite en tout point

Théorème : Soit f une fonction croissante sur un intervalle I . Alors :

(i) en tout point a de \bar{I} autre que l'extrémité gauche, f admet pour limite à gauche $f(a-0) = \sup_{x \in I, x < a} f(x)$;

lorsque a est un point de I , cette limite est finie et on a $f(a-0) \leq f(a)$;

(ii) en tout point a de \bar{I} autre que l'extrémité droite, f admet pour limite à droite $f(a+0) = \inf_{x \in I, x > a} f(x)$; lorsque

a est un point de I , cette limite est finie et on a $f(a) \leq f(a+0)$.

(iii) lorsque I est ouvert à gauche (resp. à droite), la limite de f en l'extrémité gauche (resp. droite) de I est finie ssi f est minorée (resp. majorée), sinon elle vaut $-\infty$ (resp. $+\infty$).

Conséquence : L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante est fini ou dénombrable.

Application : Étude des intégrales généralisées de fonctions positives.

Exercice 4 : Construire une application croissante sur $[0, 1]$ ayant une infinité de points de discontinuité.

b) Fonctions à variation bornée, fonctions réglées

Dans ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle compact $[a, b]$.

• A chaque subdivision $\sigma = (x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b)$ de $[a, b]$, on associe $V(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$. On appelle variation totale de f l'élément de $\overline{\mathbf{R}}$ défini par $V_a^b(f) = \sup_{\sigma} V(f, \sigma)$ et on dit que f est à variation bornée si $V_a^b(f)$ est fini.

Théorème : f est à variation bornée sur $[a, b]$ ssi f est la différence de deux fonctions croissantes.

• On dit que f est réglée si elle admet une limite à gauche finie en tout point de $]a, b]$ et une limite à droite finie en tout point de $[a, b[$.

Théorème : f est réglée sur $[a, b]$ ssi f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Conséquences : Toute fonction réglée est intégrable (au sens de Riemann). Toute fonction monotone (plus généralement toute fonction à variation bornée) est réglée, donc intégrable.

3. Fonctions continues et strictement monotones

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I d'extrémités a et b (dans $\overline{\mathbf{R}}$). Alors f est injective ssi f est strictement monotone, et dans ce cas :

- i) $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert) d'extrémités $\lim_a f$ et $\lim_b f$;
- ii) f est un homéomorphisme de I sur $f(I)$.

Conséquence : Dans l'ensemble des intervalles de \mathbf{R} , il y a cinq classes d'homéomorphie: celles de \emptyset , $\{0\}$, $[0, 1]$, $[0, 1[$ et $]0, 1[$.

Exercice 5 : Montrer que $f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ réalise une bijection de \mathbf{R} sur $] -1, 1[$ et calculer f^{-1} .

4. Monotonie et dérivabilité

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable en tout point intérieur à I . Alors :

- (i) f est croissante ssi f' est positive ;
- (ii) dans ce cas, f est strictement croissante ssi f' est strictement positive sur une partie dense de I .

Applications : étude des variations d'une fonction numérique, obtention d'inégalités.

Exercice 6 : Soient a et b deux réels strictement positifs distincts. Montrer que l'application $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}$ (prolongée par continuité en 0) est strictement croissante. En déduire les inégalités classiques des moyennes.

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2*, Dunod
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tome 3*, Masson
MONIER, *Analyse tome 1*, Dunod

INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

Remarques générales

Programme : Passage à la limite uniforme dans les intégrales de fonctions continues sur un segment : application à la dérivation de la limite d'une suite de fonctions de classe C^1 . Exemples de passage à la limite dans les intégrales impropres. Continuité et intégration des fonctions de la forme $x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$, où f est continue ; dérivation lorsqu'en outre $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue. Exemples de fonctions définies par des intégrales.

Plan

1. Intégrales sur un intervalle compact

a) Cas d'un paramètre entier

Soient a et b deux réels et (f_n) une suite d'applications continues de $[a, b]$ dans \mathbf{K} .

Si (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une application f , alors f est intégrable sur $[a, b]$ et $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n$. De plus, pour tout $c \in [a, b]$, la suite des primitives $\left(t \mapsto \int_c^t f_n \right)$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers l'application $t \mapsto \int_c^t f$.

Application : Soient I un intervalle de \mathbf{R} et (f_n) une suite d'applications de classe C^1 de I dans \mathbf{K} . Si la suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur I vers une application g , et s'il existe $c \in I$ tel que la suite $(f_n(c))$ converge, alors (f_n) converge uniformément sur tout compact de I vers une fonction f , f est dérivable sur I et $f' = g$.

b) Cas d'un paramètre réel

Soient deux réels a et b , I un intervalle de \mathbf{R} , $f: [a, b] \times I \rightarrow \mathbf{K}$ une application continue. On s'intéresse aux propriétés de l'application $F: I \rightarrow \mathbf{K}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$.

(i) *Continuité* : F est continue sur I .

(ii) *Intégrabilité* : F est intégrable sur tout segment $[c, d] \subset I$ et $\int_c^d F(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(t, x) dx \right) dt$.

(iii) *Dérivabilité* : Si f admet une dérivée partielle par rapport à x et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[a, b] \times I$, alors F est de classe C^1 sur I et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$.

Application 1 : Pour $x > -1$, calculer $F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x \sin^2 t) dt$.

Application 2 : Pour $x \neq 1$, calculer $F(x) = \int_1^2 t^x \ln t dt$.

Application 3 : Pour $1 < a < b$, calculer $I = \int_0^\pi \ln \frac{b - \cos t}{a - \cos t} dt$.

2. Intégrales généralisées

a) Préliminaires

Pour une famille d'intégrales généralisées dépendant d'un paramètre (entier ou réel), notions de convergence simple et de convergence uniforme. Conditions suffisantes de convergence uniforme : critère de Cauchy, convergence normale, règle d'Abel.

b) Cas d'un paramètre entier

Soient $a \in \mathbf{R}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$, et (f_n) une suite d'applications continues de $[a, b[$ dans \mathbf{K} telle que l'intégrale $\int_a^b f_n$ soit simplement convergente.

Si (f_n) converge uniformément vers une application f sur tout segment $[a, c] \subset [a, b[$, et si l'intégrale $\int_a^b f_n$ est uniformément convergente, alors l'intégrale $\int_a^b f$ est convergente et $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n$

Application : Cas des séries. Exemple : $\int_0^1 -\frac{\ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

c) Cas d'un paramètre réel

Soient $a \in \mathbf{R}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$, I un intervalle de \mathbf{R} , $f: [a, b[\times I \rightarrow \mathbf{K}$ une application continue telle que l'intégrale $\int_a^b f(t, x) dt$ soit simplement convergente sur I . On s'intéresse aux propriétés de l'application $F: I \rightarrow \mathbf{K}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(t, x) dt$.

(i) *Continuité* : Si l'intégrale $\int_a^b f(t, x) dt$ est uniformément convergente sur I , alors F est continue sur I .

(ii) *Intégrabilité* : Si l'intégrale $\int_a^b f(t, x) dt$ est uniformément convergente sur un segment $[c, d] \subset I$, alors F est intégrable sur $[c, d]$, l'intégrale $\int_a^b \left(\int_c^d f(t, x) dx \right) dt$ est convergente et $\int_c^d F(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(t, x) dx \right) dt$

(iii) *Dérivabilité* : Si f admet une dérivée partielle par rapport à x , si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[a, b[\times I$ et si l'intégrale $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$ est uniformément convergente sur I , alors F est de classe C^1 sur I et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$.

Application 1 : La fonction $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\Gamma'(1) = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler.

Application 2 : En étudiant la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Application 3 : En étudiant la fonction $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin t}{t} dt$, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2*, Dunod
RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tomes 3 et 4*, Masson
GRAMAIN, *Intégration*, Hermann

PARTIES COMPACTES DE \mathbf{R} ET FONCTIONS CONTINUES

Remarques générales

Il faut éviter de se lancer dans une théorie générale des espaces topologiques compacts, dont l'étude de \mathbf{R} ne serait qu'un simple corollaire. Heureusement, même en se limitant strictement à \mathbf{R} et aux fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , il y a assez de matière. Il peut toutefois être intéressant d'énoncer le théorème de Weierstrass dans le cas d'une fonction de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} , afin de pouvoir présenter deux résultats fondamentaux du programme : le théorème de D'Alembert-Gauss et l'équivalence des normes en dimension finie.

Plan

1. Parties compactes de \mathbf{R}

Soit E une partie de \mathbf{R} . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) De tout recouvrement ouvert de E , on peut extraire un sous-recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue).
- (ii) Toute partie infinie de E admet un point d'accumulation dans E (propriété de Bolzano-Weierstrass).
- (iii) De toute suite de points de E , on peut extraire une suite qui converge vers un point de E (propriété de compacité séquentielle).
- (iv) E est une partie fermée et bornée.

On dit que E est compacte lorsque E vérifie l'une de ces propriétés.

Exercice 1 : Soit (x_n) une suite réelle convergente, de limite x . L'ensemble $\{x_n, n \in \mathbf{N}\} \cup \{x\}$ est une partie compacte de \mathbf{R} .

Exercice 2 : Ensemble triadique de Cantor. L'ensemble des réels de la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}$, où (a_n) est une suite d'éléments de $\{0, 2\}$, est une partie compacte de \mathbf{R} , d'intérieur vide, sans points isolés, de mesure nulle et équipotente à \mathbf{R} .

Exercice 3 : Généralisation du théorème des segments emboîtés. Soit (A_n) une suite décroissante de compacts non vides de \mathbf{R} . Alors $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n$ est non vide. Si de plus le diamètre de A_n tend vers 0, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n$ est réduit à un point.

Exercice 4 : Un théorème de point fixe. Soit f une application d'un segment $[a, b]$ dans lui-même, vérifiant $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour tout couple de points distincts. Alors f admet un unique point fixe α , pour tout $c \in [a, b]$, la suite définie par $u_0 = c$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α .

Généralisation : Dans \mathbf{R}^n , les propriétés (i) à (iv) sont encore équivalentes, ce qui permet de définir les parties compactes de la même façon que dans \mathbf{R} .

2. Fonctions numériques continues sur un compact

a) Théorème de Weierstrass

Soient E une partie compacte de \mathbf{R}^n et f une application continue de E dans \mathbf{R} . Alors $f(E)$ est un compact de \mathbf{R} . En particulier, f est bornée et atteint sur E sa borne inférieure et sa borne supérieure.

Application 1 : Equivalence des normes en dimension finie. Sur \mathbf{R}^n , toutes les normes sont équivalentes et définissent la même topologie.

Application 2 : Théorème de D'Alembert-Gauss. Tout polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ admet au moins une racine.

Application 3 : Meilleure approximation sur un fermé. Soient A une partie fermée non vide de \mathbf{R}^n et x un point de \mathbf{R}^n . Il existe $y \in A$ tel que $d(x, y) = d(x, A)$.

Application 4 : Divers problèmes d'optimisation. Par exemple, trouver les disques d'aire maximale inclus dans un triangle ABC .

Application 5 : Théorème de Rolle. Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

b) Théorème de Heine

Une fonction numérique continue sur une partie compacte de \mathbf{R} est uniformément continue.

Application 1 : Approximation par des fonctions en escalier. Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans \mathbf{R} , alors il existe une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.

Application 2 : Approximation par des fonctions continues affines par morceaux. Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans \mathbf{R} , alors il existe une suite de fonctions continues affines par morceaux convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.

Application 3 : Théorème de Bernstein. Si f est une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbf{R} , alors la suite de fonctions polynômes $(B_n f)$ définie par

$$B_n f(x) = \sum_{p=0}^n C_n^p f\left(\frac{p}{n}\right) x^p (1-x)^{n-p}$$

converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Bibliographie

TISSERON, *Topologie, espaces fonctionnels*, Hermann
LEHNING, *Topologie*, Masson
LEHNING, *Espaces fonctionnels*, Masson
ARNAUDIES et FRAYSSE, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
CHOQUET, *Topologie*, Masson

PARTIES CONNEXES DE \mathbf{R} ET FONCTIONS CONTINUES

Remarques générales

Le titre semble clair : il n'est pas question de faire une théorie générale des espaces topologiques connexes, mais d'étudier avec soin ce qui se passe dans \mathbf{R} . C'est l'option choisie ici : après une rapide introduction de la notion de connexité, on se limite à \mathbf{R} et aux fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . Envisager des fonctions dont seul l'ensemble de départ ou l'ensemble d'arrivée est \mathbf{R} et parler de connexité par arcs n'est pas forcément hors sujet, mais alors il faudrait au moins étudier les parties connexes de \mathbf{R}^n ... Ce que le jury écrit à propos d'une autre leçon doit être médité : "On se gardera des généralisations hasardeuses ou futiles : mieux vaut traiter convenablement une leçon pour les fonctions à valeurs réelles que de se fourvoyer dans les espaces vectoriels normés."

Plan

1. Généralités sur les espaces connexes

Soit E un espace topologique.

On dit que E est connexe s'il n'admet pas de partition en deux ouverts.

Une partie A de E est dite connexe si, munie de la topologie induite, c'est un espace connexe.

Si x est un élément de E , la réunion des parties connexes de E contenant x est la plus grande partie connexe de E contenant x ; on l'appelle la composante connexe de x . Les composantes connexes (distinctes) sont fermées et forment une partition de E .

Théorème : L'image d'un connexe par une application continue est un connexe.

2. Parties connexes de \mathbf{R}

Théorème : Les parties connexes de \mathbf{R} sont les intervalles.

Application 1 : Tout ouvert de \mathbf{R} est réunion d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Application 2 : Si une fonction f continue sur une partie D de \mathbf{R} est localement constante sur D (i.e. constante au voisinage de chaque point de D), alors f est constante sur chaque composante connexe de D .

Par exemple, si f est dérivable sur un ouvert U de \mathbf{R} et si sa dérivée est nulle, alors f est constante sur chacun des intervalles ouverts disjoints qui forment une partition de U . Ceci est utilisé lors de la recherche d'une primitive ou de la résolution d'une équation différentielle : il y a une constante a priori différente sur chaque intervalle.

3. Connexité et continuité dans \mathbf{R}

Théorème des valeurs intermédiaires : L'image d'un intervalle de \mathbf{R} par une fonction numérique continue est un intervalle.

Remarque : $f(I)$ n'est pas en général un intervalle de même nature que I . Le seul cas parfaitement déterminé est celui d'un intervalle compact : l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Application 1 : Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de \mathbf{R} . S'il existe deux points a et b de I tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine entre a et b . Si on est assuré par ailleurs de l'unicité de la racine, on peut en calculer une valeur approchée par la méthode de dichotomie.

Application 2 : Premier théorème de la moyenne. Si f est continue sur $[a, b]$ et si g est intégrable et positive sur

$[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$.

Exercice 1 : Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans lui-même. Montrer que f a au moins un point fixe.

Exercice 2 : Déterminer les sous-algèbres de dimension finie de l'algèbre des applications continues de \mathbf{R} dans \mathbf{R} (les lois sont $+$, \cdot et \times).

Exercice 3 : L'anneau des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} (les lois sont $+$ et \times) est-il principal ?

Exercice 4 : Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I . Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 5 : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I , telle que $f(I)$ soit un intervalle. Montrer que si f admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point, alors f est continue.

Commentaire : L'exercice 4 établit que toute dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue : prendre par exemple $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On peut même construire des fonctions qui ne sont continues en aucun point et qui vérifient la propriété des valeurs intermédiaires (voir ARNAUDIÈS et FRAYSSE, tome 1, exercice 11 p.123). Par contre, l'exercice 5 propose une réciproque du théorème dans le cas où f admet une limite à gauche et à droite en tout point. Sur un intervalle compact, les fonctions qui vérifient cette dernière propriété coïncident avec les fonctions réglées, les fonctions à variation bornée, ou encore les différences de deux fonctions croissantes.

4. Homéomorphie des intervalles de \mathbf{R}

Théorème :

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de \mathbf{R} , d'extrémités a et b (dans $\overline{\mathbf{R}}$). Alors f est injective ssi f est strictement monotone, et dans ce cas :

i) $f(I)$ est un intervalle de même nature que I (ouvert, fermé, semi-ouvert) d'extrémités $\liminf_a f$ et $\limsup_b f$;

ii) f est un homéomorphisme de I sur $f(I)$.

Application : Dans l'ensemble des intervalles de \mathbf{R} , il y a cinq classes d'homéomorphie: celles de \emptyset , $\{0\}$, $[0, 1]$, $[0, 1[$ et $]0, 1]$.

Bibliographie

ARNAUDIÈS et FRAYSSE, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
MONIER, *Analyse tome 1 : 800 exercices résolus et 18 sujets d'étude*, Dunod
OVAERT et VERLEY, *Analyse vol.1*, CEDIC/Fernand Nathan

SÉRIES ENTIÈRES. RAYON DE CONVERGENCE. PROPRIÉTÉS DE LA SOMME

Remarques générales

- Le programme envisage les séries entières d'une variable complexe (uniquement en vue de l'exponentielle complexe et ses applications à la géométrie) mais se restreint à la variable réelle dès qu'il s'agit de dérivation et d'intégration. Suivre ce schéma et ne pas se lancer sur le terrain dangereux des fonctions holomorphes.
- Leçon très classique faisant l'objet d'un chapitre dans tous les traités d'analyse. Se distinguer par des exemples et applications substantiels.

Plan

1. Séries entières d'une variable complexe

a) Définitions et notations

- Série entière : série d'applications de la forme $\sum a_n z^n$, où (a_n) est une suite de nombres complexes (les coefficients) et z une variable complexe.
- Rayon de convergence : $R = \sup\{r \in \overline{\mathbf{R}} / (a_n r^n) \text{ bornée}\}$.
- Disque de convergence : $D = \{z \in \mathbf{C} / |z| < R\}$.
- Cercle de convergence : $C = \{z \in \mathbf{C} / |z| = R\}$

b) Propriétés de convergence (Théorème d'Abel)

- La série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$.
- La convergence est normale (donc uniforme) sur tout compact de D .
- Si z_0 est un point de convergence sur C , il y a convergence uniforme sur le rayon $[0, z_0]$.

Exemples : $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum n! z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$, $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$.

c) Détermination pratique du rayon de convergence

• *Formule d'Hadamard* :
$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$$

• *Règles de Cauchy et de D'Alembert* :

Si $(|a_n|^{1/n})$ admet une limite L dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors $R = 1/L$.

Si $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ admet une limite L dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors $R = 1/L$.

Si $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ admet une limite L dans $\overline{\mathbf{R}}$, alors $(|a_n|^{1/n})$ admet aussi pour limite L .

Exemple : $\sum a_n z^n$ avec $a_{2n} = \frac{1}{2^n 3^n}$ et $a_{2n+1} = \frac{1}{2^n 3^{n+1}}$.

2. Propriétés de la somme d'une série entière d'une variable réelle

Tout ce qui précède reste valable. On parle maintenant d'intervalle de convergence $] -R, R[$ et pour un point x de cet intervalle, on note $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ la somme de la série entière.

a) Dérivation et intégration

- f est de classe C^∞ sur $] -R, R[$. Ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme et les séries de dérivées ont même rayon de convergence que la série de départ.
- La primitive de f sur $] -R, R[$ qui s'annule en 0 s'obtient par intégration terme à terme et la série de primitives a même rayon de convergence que la série de départ.

b) Fonctions développables en série entière

- On dit qu'une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe un réel $a > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ tels que pour tout $x \in] -a, a[$, on ait $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
- Si f est développable en série entière au voisinage de 0, alors f est de classe C^∞ au voisinage de 0, son développement est unique et c'est la série de Taylor de f , à savoir $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
- La réciproque est fautive. *Exemple* : $f(0) = 0$ et $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$.

c) Développement en série entière des fonctions usuelles

A partir des développements de \exp sur \mathbf{R} (c'est la définition) et de $(1+x)^\alpha$ sur $] -1, 1[$ (obtenu à partir de la formule de Taylor avec reste intégral), on peut calculer ceux des fonctions usuelles par opérations algébriques, dérivation et intégration.

3. Applications des séries entières

- Exponentielle complexe, fonctions cosinus et sinus, nombre π , mesure des angles
- Calcul de valeurs approchées d'une fonction
- Calcul d'intégrales par développement en série et intégration terme à terme
- Recherche de solutions particulières d'équations différentielles

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
LEHNING, *Analyse fonctionnelle*, Masson

SÉRIES DE FOURIER

Remarques générales

- Programme résumé : Coefficients et série de Fourier d'une fonction 2π -périodique continue par morceaux à valeurs complexes. Propriété de meilleure approximation en moyenne quadratique, convergence en moyenne quadratique, formule de Parseval. Théorème de Dirichlet lorsque f est de classe C^1 par morceaux. Exemples d'emploi de séries trigonométriques pour la recherche de solutions d'équations différentielles.
- Plutôt que de rechercher des résultats théoriques plus fins que ceux du programme (par exemple le théorème de Cesaro-Féjer), il vaut mieux se consacrer à des exemples et applications variés.

Plan

1. Définitions et notations

Soient E l'espace vectoriel des applications 2π -périodiques et continues par morceaux de \mathbf{R} dans \mathbf{C} , et E_0 le sous-espace vectoriel des applications f telles que $\int_0^{2\pi} |f| = 0$. La plupart des notions introduites ci-après pour un élément de E ne dépendent en fait que de sa classe d'équivalence modulo E_0 , aussi on identifiera souvent E à l'espace quotient E/E_0 .

E est un espace préhilbertien pour le produit scalaire $(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \bar{g}$ et les applications $e_n : t \mapsto e^{int}$, où $n \in \mathbf{Z}$, constituent une famille orthonormale de E .

On appelle coefficients de Fourier complexes d'une application f de E les "coordonnées" de f suivant cette

famille, c'est-à-dire $c_n = (f|e_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on peut définir aussi les coefficients de

Fourier réels de f par $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt$ et $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt$, de sorte que $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ et

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

On appelle respectivement polynôme de Fourier d'ordre n de f et série de Fourier de f le polynôme

trigonométrique $S_n = \sum_{k=-n}^n c_k e_k$ et la série trigonométrique $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e_k$.

2. Propriétés des polynômes et de la série de Fourier

a) Propriété de meilleure approximation en moyenne quadratique

S_n est l'unique polynôme trigonométrique P d'ordre $\leq n$ qui réalise le minimum de $\|f - P\|$.

b) Inégalité de Bessel

$$\sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \|f\|^2. \text{ Il en résulte la convergence de la série } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

c) Théorème de Dirichlet

Si f est de classe C^1 par morceaux, alors (S_n) converge simplement vers l'application $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$

La convergence est uniforme sur tout segment de continuité de f .

Si de plus f est continue sur \mathbf{R} , alors la série de Fourier de f converge normalement vers f .

Vitesse de convergence uniforme : Si f est de classe C^p , alors $\|f - S_n\|_\infty = o\left(\frac{\ln n}{n^p}\right)$.

d) Théorème de Parseval

(S_n) converge vers f en moyenne quadratique et $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2$.

3. Exemples et applications

a) Calcul de sommes de séries

En utilisant la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(t) = t^2$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

b) Phénomène de Gibbs

Soit f la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = 1$ sur $]0, \pi[$, $f(x) = -1$ sur $]-\pi, 0[$ et $f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_{2n+1}\|_\infty > 0$.

c) Développement en série de fonctions

En utilisant la fonction 2π -périodique définie par $f(t) = \cos xt$, montrer que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$,

$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 - n^2}$, la convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

d) Théorèmes de densité

Soit f continue et 2π -périodique. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$.

Soit f continue sur $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme Q tel que $\|f - Q\|_\infty < \varepsilon$. (*Weierstrass*)

e) Résolution d'équations aux dérivées partielles

Etudier le problème des vibrations d'une corde élastique de longueur au repos L et dans un état donné à l'instant

$t = 0$, c'est-à-dire l'équation $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, avec les conditions aux limites $y(0, t) = y(L, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et les

conditions initiales $y(x, 0) = f(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ pour tout $x \in [0, L]$.

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod

GRAMAIN, *Intégration*, Hermann

LEHNING, *Analyse fonctionnelle*, Masson

LION, *Une progression simple pour les séries de Fourier*, Revue de Mathématiques Spéciales 85/86 n°3

SÉRIES À TERMES RÉELS POSITIFS

Remarques générales

- “Les sujets réputés classiques (algèbre linéaire, séries à termes positifs, ...) sont beaucoup plus délicats à traiter qu’il n’y paraît et ont trop souvent donné lieu à des prestations très pauvres, faute d’une réflexion suffisante.” (Rapport du jury 1991)
- Dans cette leçon trop classique, il faut absolument se distinguer en mettant en évidence de manière très nette l’enchaînement des idées et en illustrant chaque résultat par des exemples et contre-exemples substantiels.

Plan

1. Séries à termes positifs

a) Définitions et notation

Série $\sum u_n$ de terme général (u_n) , somme partielle $S_n = \sum_{k \leq n} u_k$. Série convergente, somme $S = \sum_{n \geq 0} u_n$, reste

$R_n = S - S_n = \sum_{k \geq n+1} u_k$. Série divergente.

La nature d’une série ne change pas si on modifie un nombre fini de termes. Dans la plupart des théorèmes, il suffit donc que les hypothèses soient vérifiées “à partir d’un certain rang”.

Dans cette leçon, on s’intéresse uniquement aux séries à termes réels positifs. Pour une telle série, la suite des sommes partielles est croissante. Elle converge ssi elle est majorée ; sinon, elle diverge vers $+\infty$.

b) Critères généraux de convergence

- *Correspondance suites-séries* : Une série converge vers S ssi la suite de ses sommes partielles converge vers S . Inversement, une suite (u_n) converge vers ℓ ssi la série de ses différences $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge vers $\ell - u_0$.
- *Condition nécessaire de convergence* : Si une série converge, alors son terme général tend vers 0.
- *Critère de Cauchy* : La série $\sum u_n$ converge ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour $p > n \geq N$ on ait

$$\sum_{k=n+1}^p u_k \leq \varepsilon.$$

- *Opérations*: Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent vers S et T , alors la série $\sum (au_n + bv_n)$ converge vers $aS + bT$,

et la série $\sum \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right)$ converge vers ST (*produit de Cauchy*).

c) Comparaison à une intégrale

Soit $f : \mathbf{R}^+ \mapsto \mathbf{R}^+$ une application décroissante. Pour tout entier n , on a $\int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq \int_0^n f(t)dt + f(0)$,

donc l’intégrale $\int_0^{+\infty} f$ et la série $\sum f(n)$ sont de même nature.

2. Comparaison de deux séries à termes positifs

a) Principes de comparaison

- *Comparaison directe* : Supposons que $u_n \leq v_n$ pour tout n . Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
- *Comparaison logarithmique* : Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout n . Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.
- *Comparaison asymptotique* :

(i) Supposons que $u_n = O(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on a $\sum_{k \geq n+1} u_k = O\left(\sum_{k \geq n+1} v_k\right)$. Si $\sum u_n$

diverge, alors $\sum v_n$ diverge et on a $\sum_{k \leq n} u_k = O\left(\sum_{k \leq n} v_k\right)$.

(ii) Même énoncé en remplaçant O par o .

(iii) Supposons que $u_n \approx v_n$. Les séries sont de même nature. En cas de convergence, les restes sont équivalents. En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

b) Séries de référence

- *Séries géométriques* : $\sum q^n$ converge ssi $0 \leq q < 1$.
- *Séries de Riemann* : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
- *Séries de Bertrand* : $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge ssi $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

c) Règles de comparaison

- *Règle de Cauchy (comparaison directe à une série géométrique)* : Si la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ admet une limite (finie ou infinie) L et si $L < 1$ (resp. $L > 1$), alors la série $\sum u_n$ est convergente (resp. divergente).
- *Règle de Riemann (comparaison directe à une série de Riemann)* : Si la suite $(n^\alpha u_n)$ admet une limite (finie ou infinie) L et si $L < +\infty$ et $\alpha > 1$ (resp. $L > 0$ et $\alpha \leq 1$), alors la série $\sum u_n$ est convergente (resp. divergente).
- *Règle de D'Alembert (comparaison logarithmique à une série géométrique)* : Si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite (finie ou infinie) L et si $L < 1$ (resp. $L > 1$), alors la série $\sum u_n$ est convergente (resp. divergente).
- *Règle de Raabe-Duhamel (comparaison logarithmique à une série de Riemann)* : Si la suite $\left(n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right)$ admet une limite (finie ou infinie) L et si $L > 1$ (resp. $L < 1$), alors la série $\sum u_n$ est convergente (resp. divergente).

Remarque 1 : on peut imaginer aussi une règle de Bertrand (comparaison directe à une série de Bertrand) et une règle de Duhamel-Bertrand (comparaison logarithmique à une série de Bertrand).

Remarque 2 : comparaison des règles de Cauchy et de D'Alembert.

3. Exercices

Exercice 1 : La série des inverses des nombres premiers est divergente.

Exercice 2 : Si σ est une permutation de \mathbf{N}^* , la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ est divergente.

Exercice 3 : Si (u_n) est une suite positive décroissante, montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature (*critère de condensation de Cauchy*). Appliquer ce critère aux séries usuelles.

Exercice 4 : Etudier les séries de t.g. a) $u_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{2.4.6 \dots (2n)}$; b) $u_n = \frac{n^n}{n! a^n}$; c) $u_{2n} = \frac{1}{2^n 3^n}$, $u_{2n+1} = \frac{1}{2^n 3^{n+1}}$.

Exercice 5 : Déterminer a et b tels que pour tout n , $\int_0^\pi (a + bt^2) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}$. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 6 : Calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$ à la précision 10^{-4} . a) Calcul direct en majorant le reste par une intégrale. b)

Accélération de convergence en écrivant $\frac{1}{n^2 + 1} = \frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)} + u_n$, avec $u_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
 CHEVALLARD, *Théorie des séries, tome 1 : séries numériques*, CEDIC/Fernand Nathan
 MONIER, *Analyse tome 2*, Dunod

SÉRIES À TERMES RÉELS OU COMPLEXES : CONVERGENCE ABSOLUE, SEMI-CONVERGENCE

Remarques générales

- Les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs sont supposés connus.
- Programme résumé : Séries à termes réels ou complexes. Convergence d'une série alternée, majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général. Série produit de deux séries absolument convergentes.
- Pour cette leçon très classique, on ne donne que la liste des résultats importants à ne pas oublier. Chacun devra être illustré par des exemples et contre-exemples personnels.

Plan

Introduction

On suppose connus les généralités sur les séries numériques réelles ou complexes (condition nécessaire de convergence, linéarité, critère de Cauchy) et les techniques d'étude des séries à termes positifs (recours à une majoration ou un équivalent du terme général, comparaison à une série de Riemann ou de Bertrand, comparaison à une série géométrique : règles de Cauchy et de D'Alembert, comparaison à une intégrale généralisée).

1. Séries absolument convergentes

a) Définition et intérêt de la convergence absolue

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque la série $\sum |u_n|$ est convergente.

$$\text{Toute série absolument convergente est convergente et on a } \left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Grâce à ce résultat, l'étude d'une série absolument convergente se ramène à celle d'une série à termes positifs.

b) Caractérisations de la convergence absolue

- Si x est un nombre réel, on pose $x^+ = \sup(x, 0)$ et $x^- = \sup(-x, 0)$. Soit $\sum u_n = \sum (a_n + ib_n)$ une série à termes réels ou complexes.

La série $\sum u_n$ est absolument convergente ssi les quatre séries à termes positifs $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$, $\sum b_n^+$, $\sum b_n^-$ sont convergentes ; dans ce cas,
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- + i \sum_{n=0}^{\infty} b_n^+ - i \sum_{n=0}^{\infty} b_n^-.$$

- On dit que la série $\sum u_n$ est commutativement convergente si, pour toute permutation σ de \mathbb{N} , la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente.

Une série est absolument convergente ssi elle est commutativement convergente ; dans ce cas, sa somme ne change pas lorsqu'on change l'ordre des termes.

Exercice : Lorsqu'une série est convergente sans être absolument convergente, on peut réordonner ses termes de manière à obtenir soit une série divergente, soit une série convergente de somme arbitrairement donnée.

c) Produit de deux séries absolument convergentes

On appelle produit de Cauchy des séries $u = \sum u_n$ et $v = \sum v_n$ la série $u * v = \sum \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right)$.

Si u et v sont absolument convergentes, alors $u * v$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u * v)_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right)$$

Application : L'exponentielle complexe est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe (\mathbb{C}^*, \times) .

2. Séries semi-convergentes

a) Définition

On dit qu'une série est semi-convergente lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente. L'étude d'une série qui n'est pas absolument convergente est délicate ; on va exposer quelques techniques possibles.

b) Séries alternées

On dit qu'une série est alternée lorsque le terme général est de la forme $(-1)^n \epsilon_n$, où (ϵ_n) est une suite décroissante de réels positifs convergeant vers 0.

Toute série alternée $\sum u_n$ est convergente et on a $\sum_{n=0}^{2p+1} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{2p} u_n$ pour tout entier p .

Plus précisément, les sommes partielles d'indice pair (resp. impair) tendent en décroissant (resp. en croissant) vers la somme de la série.

c) Règle d'Abel

Pour qu'une série de la forme $\sum \epsilon_n v_n$ soit convergente, il suffit que la suite (ϵ_n) ait pour limite 0, que la série $\sum |\epsilon_n - \epsilon_{n+1}|$ converge et que la suite $(v_0 + v_1 + \dots + v_n)$ soit bornée.

Remarque : La deuxième condition est vérifiée dès que la suite (ϵ_n) est réelle et décroissante. Pour $v_n = (-1)^n$, on retrouve alors le cas des séries alternées.

d) Groupement de termes

La convergence d'une série entraîne celle de la série obtenue par groupement de termes, mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Cette réciproque est vraie dans deux cas usuels :

- chaque groupement est formé de termes de même signe ;
- le terme général de la série tend vers 0 et le nombre de termes dans chaque groupement est borné.

e) Développement asymptotique du terme général

Un développement asymptotique permet parfois d'écrire le terme général d'une série comme somme de deux ou plusieurs termes, correspondant à des séries faciles à étudier.

Bibliographie

RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tome 4*, Masson
 LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2 : Analyse*, Dunod

SUITES DE FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE : DIVERS MODES DE CONVERGENCE

Remarques générales

Il faut équilibrer, tant dans les exemples que les applications, les divers modes de convergence et ne pas réduire cette leçon à un exposé sur la convergence simple et la convergence uniforme.

Plan

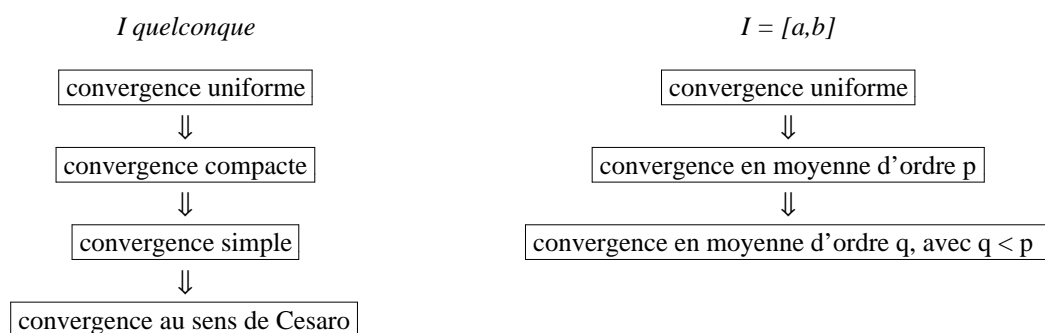
1. Divers modes de convergence

a) Définitions

Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I , et f une fonction définie sur I (f_n et f à valeurs dans \mathbf{R} ou \mathbf{C}). On peut définir la convergence de (f_n) vers f en divers sens :

- Convergence simple : $\forall x \in I \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.
- Convergence au sens de Cesaro : $\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f_k \right)$ converge simplement vers f .
- Convergence uniforme : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Si on se restreint à l'ensemble des fonctions bornées sur I , la convergence uniforme est définie par la norme $\|f\|_\infty = \sup_I |f|$.
- Convergence compacte : Pour tout compact K de I , (f_n) converge uniformément vers f sur K .
- Convergence en moyenne d'ordre p ($p \geq 1$) (on suppose $I = [a, b]$ et les f_n et f intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$) : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n - f|^p = 0$. Si on se restreint à l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$, la convergence en moyenne d'ordre p est définie par la norme $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p}$.

b) Liens entre les différents modes de convergence



Toutes les autres implications sont fausses (voir contre-exemples ci-dessous). Il y a cependant des cas usuels où la convergence simple entraîne la convergence uniforme :

Theorèmes de Dini : Soit (f_n) convergeant simplement vers f sur $[a, b]$.

- (1) Si les f_n et f sont continues et si pour tout x de $[a, b]$, la suite $(f_n(x))$ est croissante, alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
- (2) Si f est continue et si les f_n sont croissantes, alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

c) Exemples et contre-exemples

• Ex 1 : $I = \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{2n x^2}{n^2 x^4 + 1}$ (CS sur \mathbf{R} vers la fonction nulle, CC sur \mathbf{R}^* , mais pas CU sur \mathbf{R} , ni sur \mathbf{R}^*).

• Ex 2 : $I = \mathbf{R}$, $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (CS sur \mathbf{R} vers exp, CC - théorème de Dini - mais pas CU sur \mathbf{R}).

• Ex 3 : $I = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$ (CM et CMQ vers la fonction nulle mais pas CU ; CS vers une fonction presque partout égale à la fonction nulle).

• Ex 4 : $I = [0, 1]$, $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}}}$ ($n \geq 2$) (CM vers la fonction nulle, mais pas CMQ).

• Ex 5 : $I = [0, 1]$, $f_n(x) = n^2 x$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $f_n(x) = -n^2 x + 2n$ pour $x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ pour $x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right]$ ($n \geq 2$) (CS vers l'application nulle mais ni CM ni CMQ).

• Ex 6 : $I = [0, 1]$; si n est pair : $f_n(x) = -nx + 1$ sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$; si n est impair : $f_n(x) = nx - n + 1$ sur $\left[1 - \frac{1}{n}, 1\right]$ et $f_n(x) = 0$ sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ ($n \geq 1$) (CM et CMQ vers la fonction nulle mais pas CS).

2. Exemples d'utilisation des différents modes de convergence

a) Problèmes d'interversion de limites

Si (f_n) converge compactement vers f et si les f_n sont continues, alors f est continue.

Si (f_n) converge simplement vers f , si les f_n sont dérivables et si (f_n') converge compactement vers g , alors f est dérivable et $f' = g$. Application : exp est dérivable et égale à sa dérivée.

Si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$ et si les f_n sont intégrables, alors f est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

b) Approximation sur un segment

Si f est continue sur $[a, b]$, il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f . Conséquence : f est intégrable sur $[a, b]$.

Si f est continue sur $[a, b]$, il existe une suite (f_n) de fonctions continues affines par morceaux convergeant uniformément vers f . Conséquence : L'ensemble des fonctions continues affines par morceaux est dense dans $C^0([a, b])$ pour la norme uniforme, donc aussi pour la norme de la moyenne d'ordre p .

c) Séries de Fourier

Soit f une fonction périodique continue par morceaux et soit (S_n) la suite des sommes partielles de sa série de Fourier. Alors :

• (S_n) converge vers f en moyenne quadratique (théorème de Bessel-Parseval).

• (S_n) converge au sens de Cesaro vers la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$ (théorème de Fejer).

Bibliographie

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 2 : analyse*, Dunod
FLORY, *Topologie et analyse, tome 2*, Vuibert
HAUCHECORNE, *Les contre-exemples en mathématiques*, Ellipses

ÉTUDE DE SUITES DÉFINIES PAR DIFFÉRENTS TYPES DE RÉCURRENCE

Remarques générales

- Le programme fait seulement référence à des exemples de suites réelles du type $u_{n+1} = f(u_n)$, et au théorème du point fixe pour les contractions d'une partie fermée d'un espace complet. Il faut bien sûr élargir ce cadre et, dans le cas des récurrences linéaires, exploiter au mieux les résultats connus sur la réduction des endomorphismes. Cette leçon est autant une leçon d'algèbre que d'analyse.
- De nombreux plans sont possibles, selon la façon dont on organise les différents types de récurrence : linéaire ou non linéaire, d'ordre un ou supérieur à un, concernant une seule suite ou plusieurs suites imbriquées.
- Il est prudent de se limiter à des suites à valeurs dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} .

Plan

1. Récurrences linéaires

Cette partie relève de l'algèbre ; c'est une application de la réduction des matrices (diagonalisation, trigonalisation, décomposition spectrale, calcul des puissances). On n'oubliera pas de faire le parallèle avec la résolution des équations différentielles linéaires.

a) Suites imbriquées à récurrence linéaire d'ordre 1

$$\begin{pmatrix} u_{n+1}^{(1)} \\ \vdots \\ u_{n+1}^{(p)} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(p)} \end{pmatrix} \quad \text{avec } A \in M_p(\mathbf{K})$$

On illustrera les résultats théoriques d'exemples couvrant les différentes situations possibles pour la matrice A . Il peut être intéressant de trouver ces exemples en économie, biologie, chimie, probabilités, ...

b) Suite unique à récurrence linéaire d'ordre p

$$u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k} \quad \text{avec } (a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbf{K}^p$$

Peut se traiter directement ou en se ramenant au a).

Un exemple célèbre est la suite de Fibonacci : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (qui peut d'ailleurs être étudiée par d'autres méthodes).

c) Suites se ramenant à des suites à récurrence linéaire

En général, on fait un changement de suite inconnue. Exemple : $u_0 > 0$, $u_1 > 0$, $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^3}{u_n}$.

2. Récurrences non linéaires

a) Suite unique à récurrence d'ordre 1

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec } f : E \rightarrow E, \text{ où } E \text{ est une partie de } \mathbf{K}$$

Les exemples sont à articuler autour de trois résultats théoriques importants :

- Premier théorème de point fixe : cas où E est fermé (donc complet) et f contractante.
- Deuxième théorème de point fixe : cas où E est un intervalle de \mathbf{R} et f est continue, croissante ou décroissante.
- Cas des fonctions homographiques : $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$, où f est considérée (de préférence) comme application de $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ dans lui-même.

b) Suite unique à récurrence d'ordre > 1

Exemple 1 : intégrales de Wallis. Elles sont définies par I_0, I_1 et la relation de récurrence $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Exemple 2 : $u_0 > 0, u_1 > 0, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$.

c) Suites imbriquées

Exemple 1 : moyenne arithmético-géométrique. $0 < u_0 < v_0, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$.

Exemple 2 : suites de Schwob. $0 < u_0 < v_0, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n), v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$.

Bibliographie

FLORY, *Topologie et analyse, tome 1*, Vuibert

RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX, *Cours de mathématiques spéciales, tomes 1 et 3*, Masson

ARNAUDIÉS et FRAYSSE, *Cours de mathématiques, tomes 1 et 2*, Dunod

OVAERT et VERLEY, *Analyse vol.1*, CEDIC/Fernand Nathan

FORMULE DE TAYLOR-YOUNG POUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES DE CLASSE C^2 . APPLICATION À LA RECHERCHE D'EXTREMUMS

Remarques générales

- Programme : “Formule de Taylor-Young pour une fonction numérique de classe C^2 . Étude de l'existence d'un extremum local (...) en un point où $r^2 - s^2 \neq 0$.”
- “Un exercice censé illustrer une méthode est à proscrire lorsqu'il peut se traiter beaucoup plus simplement autrement ; à titre d'exemple, la recherche des extremums de $g(x, y) = x^2 - y^2$ sur le disque unité est une trivialité qui ne saurait illustrer l'usage de la formule de Taylor-Young.” (Rapport du jury 1992)

Plan

On désigne partout par f une fonction numérique définie sur un ouvert U de \mathbf{R}^2 , de classe C^2 (i.e. admettant des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 continues sur U), par $M = (x, y)$ un point fixé de U et par $\vec{u} = (h, k)$ un vecteur quelconque de \mathbf{R}^2 . On rappelle que la différentielle de f en M est définie par $f'_M(\vec{u}) = h \frac{\partial f}{\partial x}(M) + k \frac{\partial f}{\partial y}(M)$, et que f'_M est l'unique application linéaire de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} telle que $f(M + \vec{u}) = f(M) + f'_M(\vec{u}) + o(\|\vec{u}\|)$. On suppose connu le théorème de Schwarz.

1. Formule de Taylor-Young

Il existe une unique application bilinéaire symétrique f''_M de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ dans \mathbf{R} telle que :

$$f(M + \vec{u}) = f(M) + f'_M(\vec{u}) + \frac{1}{2} f''_M(\vec{u}, \vec{u}) + o(\|\vec{u}\|^2).$$

On a $f''_M(\vec{u}, \vec{u}) = h^2 r + 2hk s + k^2 t$, avec $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)$.

Remarque s :

- 1) Cette formule peut suggérer une démonstration du théorème de Schwarz (sans qu'il y ait de cercle vicieux !) : voir LEHNING.
- 2) Le résultat se généralise aussitôt à une fonction numérique de n variables.

2. Application à la recherche d'extremums

a) Définitions

Minimum (maximum, extremum), local (global), strict.

b) Des conditions pour un extremum local

- Si f présente un extremum local en M , alors $f'_M = 0$.
- Si $f'_M = 0$ et si f''_M est définie positive (resp. définie négative), alors f présente un minimum (resp. maximum) local strict en M .

Remarques :

- 1) Un point M tel que $f'_M = 0$ est dit critique. Il n'y a pas nécessairement un extremum en M .

2) Avec les dérivées partielles, le théorème se traduit de la façon suivante :

- si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, il y a un minimum local strict
- si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, il y a un maximum local strict
- si $s^2 - rt > 0$, il n'y a pas d'extremum local
- si $s^2 - rt = 0$, on ne peut rien conclure *a priori*.

3) Interprétation géométrique : position de la surface d'équation $z = f(x, y)$ par rapport à son plan tangent en un point critique. Point elliptique, point hyperbolique, point parabolique.

c) Applications

• *Extremums de fonctions numériques*

Calculer : 1) $\max_{x>0, y>0} xy(72 - 3x - 4y)$; 2) $\min_{u>0, v>0, w>0} \left(\frac{v+w}{u} + \frac{w+u}{v} + \frac{u+v}{w} \right)$.

(Comparer avec des solutions utilisant la convexité).

• *Statistique*

Soit un nuage de points $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$. Déterminer une droite d'équation $y = ax + b$ minimisant la quantité

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2. \text{ (Comparer avec une solution algébrique.)}$$

• *Géométrie*

Soit un triangle ABC du plan. Déterminer les extremums de :

1) $f(M) = AM^2 + BM^2 + CM^2$; 2) $f(M) = AM + BM + CM$; 3) $f(M) = AM \cdot BM \cdot CM$.

(Comparer avec des solutions géométriques.)

d) Problèmes d'extremums liés

Soient f et g deux fonctions numériques de classe C^2 sur U , et soit $C = \{M \in U / g(M) = 0\}$.

Si $f|_C$ admet un minimum local en un point M de C et si $g'_M \neq 0$, alors il existe un réel λ tel que $f'_M = \lambda g'_M$.

e) Applications

• Dans le plan, retrouver la formule donnant la distance d'un point à une droite ; de même dans l'espace, la distance d'un point à une droite, à un plan, et la distance de deux droites non parallèles.

• Dans le plan, déterminer les quadrilatères convexes de côtés donnés et d'aire maximum.

Bibliographie

LEHNING, *Analyse en dimension finie*, Masson

FLORY, *Topologie, analyse, tome 3*, Vuibert

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques tome 2 : analyse*, Dunod

THÉORÈME DU POINT FIXE POUR LES CONTRACTIONS D'UNE PARTIE FERMÉE D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ COMPLET ET EXEMPLES D'APPLICATIONS

Remarques générales

- “S’il n’est pas exigé de connaître la démonstration de chacun des résultats cités dans le plan, on doit pouvoir en dire quelque chose ; citons quelques exemples de dialogues : (...) Applications du théorème du point fixe : théorème d’inversion locale, existence et unicité de la solution du problème de Cauchy. —“Pouvez-vous énoncer ces théorèmes ?”—“Non”.” (Rapport du jury 1992)
- Les applications en analyse numérique doivent être accompagnées d’algorithmes et de calculs effectifs avec calculatrice programmable.

Plan

1. Théorème du point fixe

a) Énoncé

Soient E un espace vectoriel normé complet (sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C}), F une partie fermée de E et f une application contractante de F dans F . Alors :

- (i) f admet un unique point fixe a ; (ii) pour tout $x \in F$, $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x)$.

Remarque : Si on appelle k le rapport de Lipschitz de f et si on pose $u_0 = x$ et pour tout n , $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient à partir de la démonstration du théorème deux évaluations possibles de la vitesse de convergence de (u_n) vers a :

$$\|u_n - a\| \leq k^n \|u_0 - a\| \quad \text{et} \quad \|u_n - a\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|u_1 - u_0\| .$$

b) Nécessité des hypothèses

- Si E n’est pas complet, f peut être contractante sans avoir de point fixe : $E = F = \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$, espace vectoriel des suites réelles à termes presque tous nuls, muni de la norme $\|u\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |u_n|$, et $f : (u_0, u_1, u_2, \dots) \mapsto \left(1, \frac{u_0}{2}, \frac{u_1}{2}, \dots\right)$.
- Idem si E est complet mais F n’est pas fermée : $E = \mathbf{R}$, $F =]0, 1[$, $f(x) = \frac{x}{2}$.
- La condition $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$ ne suffit pas : $E = F = \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$. La condition $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ ne suffit pas non plus : $E = \mathbf{R}$, $F = [0, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Par contre, cette dernière condition suffit si F est compact.

c) Premières applications

Voici, pour illustrer le théorème, deux applications (un peu artificielles !) en géométrie. Les “vraies” applications seront développées dans les parties suivantes.

Application 1 : Une similitude de rapport différent de 1 admet un unique point fixe.

Application 2 : Deux droites non coplanaires ont une et seule perpendiculaire commune.

2. Applications en analyse numérique (méthode des approximations successives)

a) Résolution d’une équation numérique

Principe de la méthode :

Soit à résoudre une équation $F(x) = 0$ ayant une unique racine a sur un intervalle I , F étant une fonction “suffisamment dérivable” sur I .

On transforme cette équation en une équation équivalente de la forme $f(x) = x$, avec $|f'(a)| < 1$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que les hypothèses du théorème du point fixe soient vérifiées sur $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Pour tout u_0 “assez proche” de a , la suite définie par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge donc vers a . Si $0 < |f'(a)| < 1$, la convergence est géométrique. Si $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(r-1)}(a) = 0$ et $f^{(r)}(a) \neq 0$, la convergence est rapide, d’ordre r .

Méthodes usuelles de transformation d'une équation en équation à point fixe :

Supposons pour fixer les idées que $I = [c, d]$ et que F soit strictement croissante et convexe sur I .

- *Méthode d'interpolation linéaire* : On prend $f(x) = x - \frac{x-d}{F(x)-F(d)} F(x)$. Géométriquement, on remplace la courbe par des sécantes. La convergence est géométrique.

- *Méthode de Newton* : On prend $f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$. Géométriquement, on remplace la courbe par des tangentes. La convergence est rapide, d'ordre 2.

b) Résolution d'un système linéaire

Principe de la méthode :

Soit à résoudre un système linéaire $AX = B$, où A est une matrice inversible de $M_n(\mathbf{K})$ et B un vecteur de \mathbf{K}^n .

On écrit $A = M - N$, avec M inversible et facile à inverser. Le système $AX = B$ équivaut à $X = M^{-1}NX + M^{-1}B$. Si $\|M^{-1}N\| < 1$, le théorème du point fixe s'applique.

Méthodes itératives usuelles : Méthode de Jacobi. Méthode de Gauss-Seidel. Méthode de relaxation.

3. Applications en calcul différentiel

a) Théorème d'inversion locale

Soient E et F deux espaces vectoriels normés réels, U un ouvert de E , a un point de U et f une application de U dans F . Pour $r > 0$, on note $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r .

Lemme : Soit g une application continue de $B(a, r)$ dans E telle que l'application $x \mapsto g(x) - x$ soit k -contractante. Alors il existe un ouvert V de $B(a, r)$ contenant a tel que g soit un homéomorphisme de V sur $B(f(a), (1 - k)r)$. De plus, l'application réciproque est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{1 - k}$.

Théorème : Si f est de classe C^1 sur U et si $f'(a)$ est un isomorphisme de E sur F , alors il existe un ouvert V de U contenant a et un ouvert W de F contenant $f(a)$ tels que f soit un homéomorphisme de V sur W .

b) Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas linéaire)

Soit I un intervalle de \mathbf{R} , A une application de I dans $M_n(\mathbf{K})$ et B une application de I dans \mathbf{K}^n . On considère le système différentiel linéaire $X' = A(t)X + B(t)$, noté (L) .

Théorème : Si A et B sont continues sur I , alors pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in \mathbf{K}^n$, le système (L) admet une unique solution X définie sur I telle que $X(t_0) = X_0$.

Bibliographie

LEHNING, *Analyse en dimension finie*, Masson

OVAERT et VERLEY, *Analyse, volume 1*, CEDIC/Fernand Nathan

CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson

LELONG-FERRAND et ARNAUDIÈS, *Cours de mathématiques, tome 4*, Dunod