PENTAGONE REGULIER

Marc Jambon
novembre 2012

1. Construction d'un pentagone régulier par pliage

1. 1. Réalisation du pliage

A l'école primaire CM1, CM2 ou toute classe de collège.

On part d'une bande de papier, à titre indicatif, couper une bande d'environ 3 cm de large sur la largueur ou la longueur (c'est plus facile) d'une feuille de papier A4 avec des bords bien droits et parallèles. Il est conseillé de teinter une face de façon à reconnaître les deux faces. Ici la feuille est rose d'origine teintée en jaune au verso.

Au départ, placer la bande de façon à voir la face teintée puis faire un noeud simple avec la dite bande, resserrer le noeud au maximum puis aplatir et marquer les plis. On reconnaît alors un pentagone apparemment régulier, avec les extrémités des bandes qui dépassent, on peut obtenir la figure 1 ou 2, on devine une symétrie pour passer de la figure 1 à 2. Si on retourne n'importe lequel des deux pliages réalisés, on ne perçoit aucune différence. On peut aussi inverser au départ face teintée et non teintée et obtenir deux autres figures. Pour supprimer les bandes qui dépassent, on les replie à l'envers : figure 3 réalisée à partir de la figure 1.

1. 2. Justification mathématique

En 5ème ou au delà selon programme des collèges BO spécial n° 6 du 26 août 2008.

On note les sommets du pentagone A, B, C, D, E en écrivant en chaque sommet sur la bande de papier qui recouvre les autres, en partant du sommet supérieur et tournant dans le sens des aiguilles d'une montre pour la figure 2, dans le sens inverse pour la figure 1. On note A' le point tel que A est superposé à A' (il y en a effectivement un seul), de même B', C', D', E', (figures 1 et 2).

On déplie alors la bande de papier (figure 4 qui correspond à la figure 1), il apparaît alors 4 trapèzes dont les côtés parallèles sont matérialisés par les bords de la bande de papier et les côtés obliques au nombre de 5 par les pliages. Ainsi les côtés obliques sont [D'E'], [A'B], [CD], [EA], [B'C'], et les quatre trapèzes D'E'A'B, A'BCD, CDEA, EAB'C', (la symétrique de la figure 4 par rapport à la médiane de la bande de papier fournirait la figure 2 dépliée).

Les pliages réalisés engendrent de nombreuses superpositions et par là même des égalités de distances et d'angles. On note sur les figures successives les égalités entre segments et entre angles en les marquant avec la même couleur, les angles marqués en gris le sont à titre provisoire.

Angles alternes internes en A et E.
Par pliage selon (EA), les triangles EC'A et ECA se superposent puis sont isocèles.
On a ainsi le losange C'ACE, les droites parallèles (C'A) et (EC), les angles correspondants en C et A, en C' et E (figure 4).

De même, angles alternes internes en C et D.
Par pliage selon (CD), les triangles CAD et CA'D se superposent puis sont isocèles.
Le triangle ECA' est également isocèle.
On a ainsi le losange A'CAD, les droites parallèles (AD) et (CA'), les angles correspondants en C et A, en A' et D (figure 5).

La symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de [ED] échange A et C, cette médiatrice est donc axe de symétrie du trapèze AEDC.

Angles alternes internes en A' et B.
Par pliage selon (A'B), les triangles BDA' et BD'A'se superposent puis sont isocèles.
Le triangle CA'D' est également isocèle.
On a ainsi le losange DBD'A', les droites parallèles (DB) et (A'D'), les angles correspondants

en D’ et B et en A’ et D (figure 6).

La symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de [CB] échange D et A’, cette médiatrice est donc axe de symétrie du trapèze DCBA’.
Par double pliage selon (CD) et (A’B), les triangles AED et A’E’D’ se superposent puis sont isocèles.
Par double pliage selon (EA) et (CD), les triangles AB’C’ et A’BC se superposent puis sont isocèles (figure 7).

En se référant à la figure 7, en observant n’importe lequel des angles plats en A, D, C ou A’, il apparaît que l’angle marqué en bleu vaut deux fois l’angle marqué en vert et que chacun de ces angles plats, de mesure 180°, vaut donc 5 fois l’angle marqué en vert.

Ainsi, chaque angle marqué en vert a pour mesure 36° et chaque angle marqué en bleu 72°.

En revenant à la figure 7, les cinq côtés du pentagone AB, BC, CD, DE, EA marqués en vert sont égaux, ses cinq angles au sommet $A\hat{E}D$, $E\hat{D}C$, $D\hat{C}B$, $C\hat{B}A'$, $B\hat{A}'E'$ ont tous pour mesure 72° + 36° = 108°.

Conclusion. **Le pentagone ABCDE est *régulier* au sens que ses cinq côtés et ses cinq angles aux sommets sont égaux**. Il est qualifié conventionnellement de **pentagone régulier *convexe***, parce que chacun de ses angles au sommet a pour mesure 108°.

A noter que le mot *convexe* ne prend pas une signification mathématique précise ni au niveau collège ni au niveau lycée mais il permet de distinguer le pentagone régulier convexe du **pentagone régulier *étoilé*** ACEBD dont les angles aux sommets (marqués en vert sur les figures précédentes) ont pour mesure 36° et les côtés (marqués en bleu sur les figures précédentes) sont égaux (figure 3).

1. 3. Cercle circonscrit

En 5ème

En se référant à la figure 7, par symétrie centrale :
par rapport au milieu de [AE], les trapèzes EAB’C’ et AEDC s’échangent,
par rapport au milieu de [BA’], les trapèzes BA’E’D’ et A’BCD s’échangent,
Ainsi EAB’C’ a un axe de symétrie comme AEDC et BA’E’D’ comme A’BCD. Cet axe est toujours la médiatrice commune de la grande base et de la petite base, il passe par le point de concours des diagonales.

En se référant à la figure 3, on pourra confondre, les points A, A’ superposés, de même B, B’ superposés, C, C’ superposés, D, D’ superposés, E, E’ superposés.

Soit O le point d’intersection des médiatrices des côtés du pentagone [AB] et [BC], par symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de [BC], la médiatrice de [AB] devient la médiatrice de [CD], ainsi ces trois médiatrices sont concourantes en O. De même les médiatrices de [BC], [CD] et [DE] sont concourantes en O et aussi les médiatrices de [CD], [DE], [EA]. Ainsi les cinq médiatrices des côtés du pentagone ABCDE sont concourantes en O et **le cercle de centre O passant par A est circonscrit au pentagone ABCDE**.

2. Construction d’un pentagone régulier à la règle et au compas.

En 3ème selon programme des collèges BO spécial n° 6 du 26 août 2008.

Le triangle isocèle ABC, visible sur la figure 3, se décompose, de par le pliage même, en deux nouveaux triangles isocèles, l’un de sommet A, l’autre de base [BC], il détient la clé de la méthode.

C’est pourquoi, dans tout ce paragraphe **ABC désigne un triangle isocèle de sommet A dont la longueur des côtés égaux est prise comme unité, on suppose de plus AC > AB et F est le point de [AC] tel que AF = 1** (figure 8).

2.2. Proposition

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $A\hat{B}C = 108°$

(2) $B\hat{A}C = B\hat{C}A = 36°$

(3) BFC est isocèle de sommet F

(4) $C\hat{B}F = B\hat{A}C$

(5) CF . CA = 1

(6) En désignant par I le milieu de [FA] : $CI^2 = 1 + (1/2)^2$

Démonstration

(1) et (2) sont trivialement équivalents à l'aide de somme des mesures des angles du triangle ABC égale 180°.

Pour (2) équivalent à (3), désignons par t la mesure commune en degrés de $B\hat{A}C$ et $B\hat{C}A$.
Par somme des mesures des angles du triangle BAF égale 180° et en identifiant [abusivement] angle avec sa mesure en degrés :

$$A\hat{B}F = A\hat{F}B = \frac{180 - t}{2}$$

Par angles supplémentaires $A\hat{F}B$ et $B\hat{F}C$

$$B\hat{F}C = 180 - \frac{180 - t}{2} = 90 + \frac{t}{2}$$

Par somme des mesures des angles du triangle BFC égale 180° :

$$C\hat{B}F = 180 - t - \left(90 + \frac{t}{2}\right) = 90 - 3\frac{t}{2}$$

BFC isocèle de sommet F équivaut alors à :

$$t = 90 - \frac{3t}{2}$$

qui équivaut encore à :
$t = 36°$
qui traduit la condition (2).

(3) équivalent à (4) parce que $B\hat{A}C = A\hat{C}B = F\hat{C}B$

Pour (4) équivaut à (5), par symétrie par rapport à la bissectrice de $B\hat{C}A$, B vient en G sur la demi-droite [CA) et F vient en H sur la demi-droite [CB), ainsi :
$C\hat{B}F = C\hat{G}H$
et (4) équivalent à :
(4') $C\hat{G}H = B\hat{A}C$
qui s'interprète comme l'égalité de deux angles correspondants, d'où (4') équivalent à :
(4") Les droites (HG) et (BA) sont parallèles.
Par le théorème de Thalès et sa réciproque, (4") équivalent à :
(5') $\frac{CH}{CB} = \frac{CG}{CA}$
et :
(5") CH . CA = CB . CG
Comme CH = CF et CG = CB = 1, (5") équivaut à :
(5) CF . CA = 1

Pour (5) équivaut à (6), on transforme le produit au premier membre en différence de carrés par identité remarquable, à cet effet, il convient d'introduire le point I milieu de [FA] et (5) équivaut à :

(6') $\left(CI - \frac{AF}{2}\right)\left(CI + \frac{AF}{2}\right) = CI^2 - \left(\frac{AF}{2}\right)^2 = 1$

Comme AF = 1, (6') équivaut à :

(6) $CI^2 = 1 + (1/2)^2$

2. 2. Triangle et cotriangle d'or

A partir de (6) nous évaluons numériquement CI, CA, CF :

$CI = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$CA = CI + IA = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$

(7) $\mathbf{CA = \frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

$CF = CA - AF = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1$

(8) $\mathbf{CF = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

Depuis l'antiquité, **le nombre** $\mathbf{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$, qu'on vient de découvrir en (7), **est connu sous le nom de *nombre d'or*,** $\mathbf{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ **en est son inverse** qu'on a trouvé en (8).

[Pour information, le nombre d'or est aussi le rapport, longueur sur largueur, d'un rectangle qui, privé d'un carré construit sur sa largeur, conserve les mêmes proportions.]

Un *triangle d'or* est un triangle isocèle dont le rapport d'un côté issu du sommet à la base est le nombre d'or.

Je propose [cette terminologie m'est propre] aussi la définition.

Un co*triangle d'or* est un triangle isocèle dont le rapport de la base à un côté issu du sommet est le nombre d'or.

Ainsi, **(7) respectivement (8) traduisent que ABC respectivement BFC sont des cotriangles d'or**.

On a en fait prouvé au début de 2.2 (6) implique (7) implique (8).

En reprenant les mêmes calculs dans l'autre sens (8) implique (7) :

CA = CF + FA = CF + 1

d'où :

(7) $CA = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Prouvons maintenant que (8) implique (5).

Comme (8) implique (7) , on dispose de (7) et (8), on fait le produit :

CF . CA = 1

Les propositions (1) à (8) sont donc **toutes équivalentes**.

0n peut en adjoindre une neuvième.

(9) BF = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ qui traduit que BAF est un triangle d'or.

Prouvons (8) implique (9).
Dès qu'on a (8), on a (3) et donc BF = CF, (9) s'ensuit.
[La réciproque est vraie mais moins évidente, elle n'est pas indispensable pour la suite.]

Enfin :

(10) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{\sqrt{5}+1}{2} < 2$

Cette double inégalité nous sera utile pour la construction ci-dessous.

2.3. Construction d'un cotriangle d'or et d'un triangle d'or

On se réfère à la figure 9 avec B et C donnés distincts.

Par le biais de la proposition de 2.1 où la relation (6) s'interprête comme la relation du théorème de Pythagore, on construit la longueur CI comme hypoténuse d'un triangle rectangle dont CB est un côté qu'on prend comme unité de longueur.

Tracer le cercle (C_1) de centre B, de rayon BC, puis la perpendiculaire par B à (BC) qui coupe ce cercle en deux points, on en sélectionne un qu'on appelle K. On construit le milieu J de [BK], on trace le cercle (C_2) de centre J passant par B et K, La droite (CJ) coupe ce cercle (C_2) en L et M tels que CL < CM.

Le cercle (C_3) de centre C passant par M coupe le cercle (C_1) en deux points (cf. deuxième inégalité de (10)) : A dans le demi-plan d'arête (BC) contenant K, qu'on désigne désormais par ((BC), K), P dans l'autre demi-plan. Ainsi, ABC est isocèle de sommet B avec ses deux côtés égaux de longueur unité et AC > 1.

Le cercle (C_4) de centre C passant par L coupe le cercle (C_1) en deux points : R dans le demi-plan ((BC), K) , Q dans l'autre demi-plan, ce même cercle coupe aussi le segment [CA] en F (cf. double inégalité (10)).

Par construction :

CA = $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

CF = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

AF = 1

Le triangle ABC, ainsi construit, est bien tel qu'annoncé au début de 2. il vérifie (7) [et même (8)], il vérifie donc aussi toutes les propriétés (1) à (9), en particulier ABC et BFC sont des cotriangles d'or, BAF est un triangle d'or.

Avant de poursuivre, on remarque que **B, F, R sont alignés**, en effet, faisons agir les symétries orthogonales par rapport à la médiatrice [AC] puis par rapport à la médiatrice de [BC], B vient en C, A vient en B, F vient en un point du demi plan ((BC), K) à la distance 1 de B et $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ de C : c'est le point R par construction, le triangle BAF vient donc en CBR, ainsi :

$C\hat{B}R = B\hat{A}F = B\hat{A}C$

$B\hat{A}C = C\hat{B}F$ selon (4),

$C\hat{B}R = C\hat{B}F$

comme les points A, F, R, sont tous dans le même demi-plan ((BC), K) par construction, on a l'alignement B, F, R.

2.4. Construction d'un pentagone régulier convexe dont un des côtés est donné par ses extrémités

On se réfère toujours à la figure 9. C'est cette construction qui se rapproche le plus de la méthode du pliage.

Construction. On suppose donnés B et C distincts, on obtient le cotriangle d'or ABC selon 2.3, on complète ABC pour obtenir le pentagone régulier convexe ABCDE, (de nombreuses variantes sont possibles), afin d'éviter de nouveaux tracés de cercles, je propose : les droites (CQ) et (BF) ou (BR) se coupent en D, la demi-droite [CR] coupe le cercle ($\mathcal{C}3$) en E.

Justification. $B\hat{C}R = 72°$ (cf. dernier sous-paragraphe de 2.3) ; par symétrie orthogonale par rapport à (BC), $B\hat{C}Q = 72°$, et par angles supplémentaires $B\hat{C}D = 108°$. Dans le triangle BCD, l'angle $B\hat{D}C$ vaut donc 36°, il s'en trouve donc isocèle avec angles à la base de 36° et CD = BC = 1.

Ainsi, BCD est encore un cotriangle d'or, comme ABC, avec R qui remplace F, noter aussi que CA = DB. Selon (3), CRD est donc isocèle de sommet R, la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice de [CD] envoie B en E parce que, par construction, CE = CA et CA = DB. Il en résulte que l'image EDC du triangle BCD est encore un cotriangle d'or, $C\hat{D}E = 108°$, DE = 1.

Enfin, par construction, le triangle ACE est isocèle de sommet C, son angle au sommet $A\hat{C}E = F\hat{C}R$, il vaut 72° – 36° = 36°, ses deux angles à la base valent donc chacun 72°, ainsi (FR) parallèle à (AE), la propriété de Thalès permet d'évaluer AE :

$$\frac{AE}{FR} = \frac{AC}{CF} = \frac{(\sqrt{5}+1)\times 2}{2\times(\sqrt{5}-1)} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Or :

$$FR = BR - BF = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$AE = \frac{9-5}{4} = 1$$

Quant aux angles $D\hat{E}A$ et $E\hat{A}B$, ils valent chacun 108° par addition d'angles de 72° et 36°.

2. 5. Construction d'un pentagone régulier convexe dont on donne le centre du cercle circonscrit et un sommet.

On se réfère encore à la figure 9. Cette construction est celle qui est le plus usuellement proposée dans la littérature.

Soit B le centre et N le sommet donné distinct de B, soit C le symétrique de N dans la symétrie centrale par rapport à B. On effectue la construction de 2.3 à partir de B et C. ANPQR est alors le pentagone régulier cherché.

La justification est plus aisée que précédemment, compte tenu de ce qui a déjà été fait en 2.3. Il suffit d'évaluer les mesures des différents angles au centre $Q\hat{B}R$, $R\hat{B}A$, $Q\hat{B}P$, $A\hat{B}N$, $P\hat{B}N$.

La longueur c_5 du côté d'un pentagone régulier convexe dont le rayon du cercle circonscrit est l'unité se calcule aisément à l'aide du triangle CAN rectangle en A.

$$c_5^{\,2} = AN^2 = CN^2 - CA^2 = 4 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{4}$$

$$\mathbf{c_5 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}}$$