L'ART DE TENDRE DES FILS

Mise en forme mathématique.
Étant données deux demi-droites sécantes en O . Il s'agit d'étudier une famille de segments de droites [AB] dont l'extrémité A décrit la première demi-droite et l'extrémité B décrit la deuxième demi-droite de telle sorte que les distances OA et OB soient liées par une loi mathématique.
Les cas les plus simples qu'on va étudier plus en détails sont ceux où la somme ou bien le produit des distances reste constant.
Il peut arriver que les segments [AB] semblent tous être "tangents" à une courbe que l'on devine visuellement et que l'on cherchera à déterminer mathématiquement.

Définition de droite tangente dans un contexte mathématique restreint au programme de seconde.
Étant données une droite d'équation
$y = ax + b$
et une courbe d'équation
$y = f(x)$,
lorsque l'équation en x qui traduit la recherche de leurs points communs à savoir :
$ax + b = f(x)$
se ramène, après réduction, à une équation du second degré en x qui s'écrit (à un facteur non nul près) sous la forme :
$(x - \alpha)^2 = 0$
où α est un nombre réel,
la droite est dite ***tangente*** à la courbe au point d'abscisse α.
On interprète en disant que la droite coupe la courbe en deux points confondus.
Le point commun (α , $f(\alpha)$) est appelé ***point de contact***.

Définition de segment tangent
Un segment est dit ***tangent*** à une courbe lorsque la droite qui le porte est tangente à cette courbe et que le point de contact est sur le segment.

La notion de tangente sera reprise, améliorée et complétée en classe de 1ère (et au delà) dans le cadre de l'étude systématique de l'équation du second degré et de la notion de dérivée (et plus tard de la notion de courbe).

Réalisation pratique et artistique.
Les segments [AB] prennent un nombre fini de positions [A_uB_u]. On réalise la figure restreinte aux seuls points A_u, B_u sur papier.
On prépare une planche de contre-plaqué peinte en couleur sombre (noir mat par exemple) suffisamment grande pour pouvoir y coller avec du scotch la figure papier ou mieux sa copie.
Sur la dite planche, on plante un petit clou à tête homme en chaque point A_u et en chaque point B_u. On élimine la figure papier (ce qui a pour effet de la déchirer). Enfin, pour chaque u, on tend un fil de couleur claire entre A_u et B_u.
Pour parachever son chef-d'oeuvre, l'artiste le signe puis, il l'expose en l'accrochant au mur.

Problème 1
Cas où la somme des distances est constante

On commence à réaliser un repère orthonormé avec pour unité 1 cm sur une feuille de papier format A4 (21,0 cm x 29,7 cm) quadrillée de carreau 0,5 cm de côté. On place les axes de façon à pouvoir effectivement graduer l'axe des abscisses entre −10 et +10, l'axe des ordonnées entre 0 et +10 et à avoir un bonne mise en page.
On définit, à l'aide de leurs coordonnées, onze points A_u et onze points B_u numérotés par l'indice entier relatif u de – 5 à + 5.

A_{-5}	$(-10, 10)$	B_{-5}	$(0, 0)$
A_{-4}	$(-9, 9)$	B_{-4}	$(1, 1)$
A_{-3}	$(-8, 8)$	B_{-3}	$(2, 2)$
A_{-2}	$(-7, 7)$	B_{-2}	$(3, 3)$
A_{-1}	$(-6, 6)$	B_{-1}	$(4, 4)$
A_0	$(-5, 5)$	B_0	$(5, 5)$
A_1	$(-4, 4)$	B_1	$(6, 6)$
A_2	$(-3, 3)$	B_2	$(7, 7)$
A_3	$(-2, 2)$	B_3	$(8, 8)$
A_4	$(-1, 1)$	B_4	$(9, 9)$
A_5	$(0, 0)$	B_5	$(10, 10)$

1° Représenter soigneusement les points A_u , B_u et les segments $[A_uB_u]$.

2° Ainsi, A_u a pour coordonnées $(-5 + u , 5 - u)$
B_u a pour coordonnées $(5 + u , 5 + u)$.
Vérifier que les points A_u d'une part, B_u d'autre part, sont alignés sur une demi-droite d'origine O, à préciser.
Évaluer la somme $OA_u + OB_u$. Est-elle bien constante ?

3° Rechercher les équations des droites (A_uB_u), on commencera par rechercher leur pente en fonction de u.

4° On propose comme courbe tangente à toutes ces droites, la courbe représentative d'une fonction paire polynômiale du second degré :
$y = cx^2 + d$
où c non nul et d sont des coefficients réels à déterminer.
Exprimer que la droite (A_0B_0) est tangente à cette courbe, en déduire d.
1er cadeau : si on n'a pas fait d'erreur on trouve $d = 5$.
Exprimer que la droite (A_5B_5) est tangente à cette même courbe, en déduire c.
2ème cadeau : si on n'a pas fait d'erreur, on trouve $c = 1 / 20$.
On appelle désormais ***P*** la courbe obtenue.

5° Vérifier que toutes les droites (A_uB_u) sont tangentes à ***P***.
Indication : tout réduire au même dénominateur 20.
Préciser les coordonnées des points de contact, vérifier qu'ils sont bien sur les segments $[A_uB_u]$, les placer sur la figure, enfin tracer la courbe ***P***.

Problème 2
Cas où le produit des distances est constant

On commence à réaliser un repère orthonormé avec pour unité 0,5 cm sur une feuille de papier format A4 (21,0 cm x 29,7 cm) quadrillée de carreau 0,5 cm de côté. On place les axes de façon à pouvoir effectivement graduer l'axe des abscisses entre 0 et +30, l'axe des ordonnées entre 0 et +30 et à avoir un bonne mise en page.
On définit, à l'aide de leurs coordonnées, onze points A_u et onze points B_u indexés par le paramètre réel $u > 0$.
Les points A_u sont placés sur le premier axe d'abscisse $60 / u$.
Les points B_u sont placés sur le deuxième axe d'ordonnée u .
u prend les onze valeurs : 2 , 3 , 4 , 5 , 6, $\sqrt{60}$, 10 , 12 , 15 , 20 , 30

1° Représenter soigneusement les points A_u , B_u et les segments $[A_uB_u]$.

2° Évaluer le produit $OA_u \times OB_u$. Est-il constant ?

3° Rechercher les équations des droites (A_uB_u), on commencera par rechercher leur pente en fonction de u.

4° On propose comme courbe tangente à toutes ces droites, la courbe représentative d'une fonction homographique restreinte à $x > 0$:
$y = k / x$
où k est un coefficient réel non nul à déterminer.
Exprimer que la droite $(A_{\sqrt{60}}\ B_{\sqrt{60}})$ est tangente à cette courbe, en déduire k.
Cadeau : si on n'a pas fait d'erreur on trouve $k = 15$.
On appelle désormais $\boldsymbol{H}$ la courbe obtenue.

5° Vérifier que toutes les droites (A_uB_u) sont tangentes à $\boldsymbol{H}$.
Préciser les coordonnées des points de contact, vérifier qu'ils sont bien sur les segments $[A_uB_u]$, les placer sur la figure, enfin tracer la courbe $\boldsymbol{H}$.