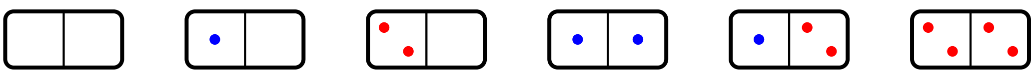
I. À la découverte des graphes

Nous allons découvrir ce que sont les graphes. Vous pouvez faire toutes les activités proposées sur cette feuille « de manière naturelle », c'est à dire comme vous le pensez. Il s'agit de proposer chacun sa vision afin de comparer ensuite toutes les représentations.

Activité 1
Construire un dessin représentant votre arbre généalogique jusqu'à vos grands-parents.

Activité 2
En une semaine, vous faites les trajets suivants : maison - collège ; maison - boulangerie ; maison - stade ; collège - stade.
Construire un schéma modélisant touts les trajets que vous pouvez effectuer pendant la semaine.

Activité 3
Un jeu de domino « version light » est composé des six dominos suivants :

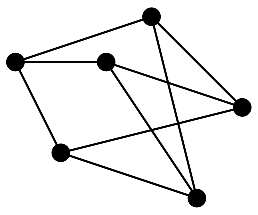


Imaginer un dessin représentant les dominos et toutes les relations qu'il peut y avoir entre eux.

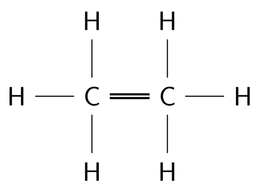
II. Vocabulaire des graphes

Définition 1
*Un **graphe** est un ensemble de points reliés par des segments.*
*Les points sont appelés **sommets** du graphe, et les segments sont des **arêtes**.*

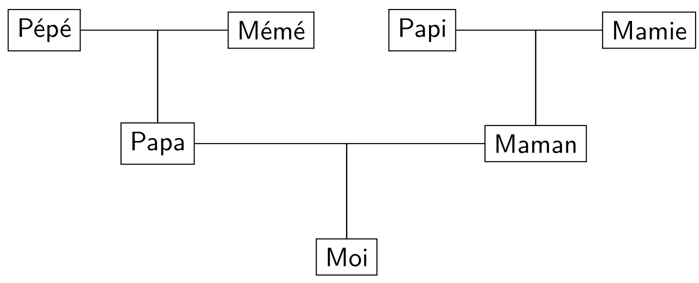
Exemple 1



Graphe quelconque

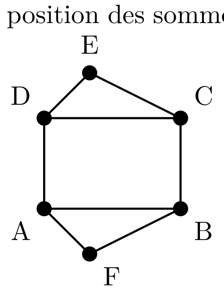


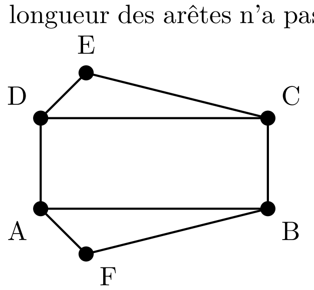
Molécule de l'éthane

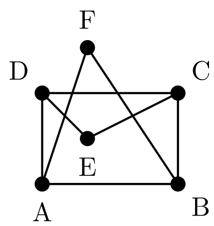


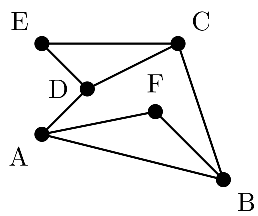
Arbre généalogique

Remarque 1
La position des sommets et la longueur des arêtes n'a pas d'importance : ces quatre graphes représentent la même situation.



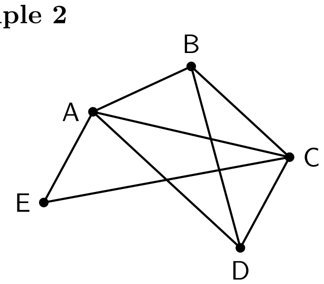






Définition 2
*On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de ses sommets.*
*Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont il est une extrémité.*
*Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.*

Exemple 2



Ce graphe comporte ... sommets, c'est donc un graphe d'ordre ....

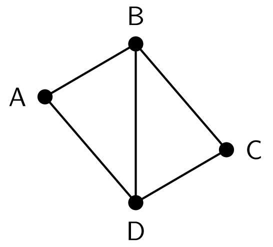
- Du sommet A partent 4 arêtes. Le degré du sommet A est donc 4 .
- Du sommet B partent ... arêtes. Le degré du sommet B est donc ....
- Du sommet C partent ... arêtes. Le degré du sommet C est donc ....
- Du sommet D partent ... arêtes. Le degré du sommet D est donc ....
- Du sommet E partent ... arêtes. Le degré du sommet E est donc ....

Définition 3
*Une **chaîne** est une suite quelconque d'arêtes consécutives. Sa **longueur** est le nombre d'arêtes qu'elle comporte.*
*Un **cycle** est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues.*

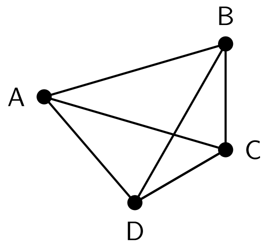
Exemple 3
À partir de l'exemple 2, donner :

- Une chaîne de longueur 2 : ....
- Une chaîne de longueur 4 : ....
- Une chaîne de longueur 10 : ....
- Un cycle de longueur 3 : ....
- Un cycle de longueur 5 : ....

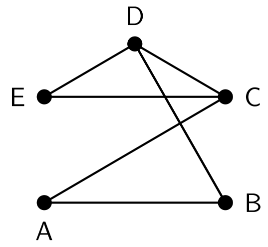
Activité 1
Pour chacun des graphes suivants, remplir le tableau de la page 3.



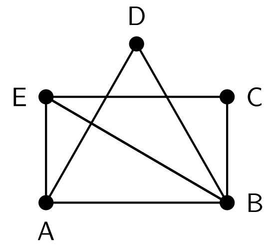
Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3



Graphe 4

	Degré de A	Degré de B	Degré de C	Degré de D	Degré de E	Somme des degrés des sommets	Nombre d'arêtes
Graphe 1							
Graphe 2							
Graphe 3							
Graphe 4							

Que remarque-t-on ?

Propriété 1 (Lemme des poignées de mains)

....

....

Exemple 4
Anaïs, Bruno, Chloé, Déborah et Emmanuel se sont donné RDV au cinéma. Ils se sont dit bonjour en faisant « chek ».
Combien de « checks » ont été échangés ?

On commence par tracer un graphe représentant la situation :
• On nomme les 5 amis A, B, C, D et E que l'on les représente par des ....
• On relie chaque paire de copains par une ....

Tous les sommets sont d'ordre ....
Il y a ... sommets donc, la somme des degrés des sommets vaut ....
D'après la propriété 1, on en conclut que le nombre d'arêtes est : ....

Conclusion : ... checks ont été échangés.

Graphe

Exercices

Exercice 1
Dessiner un graphe d'ordre 4 à 5 arêtes, puis un autre à 6 arêtes, et enfin un dernier à 7 arêtes.

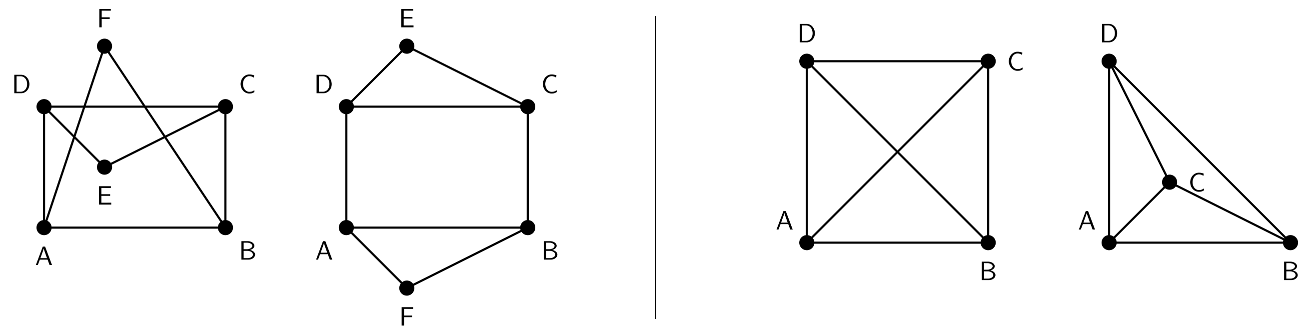
Exercice 2
Un graphe d'ordre 5 est tel que les 4 premiers sommets ont pour degrés respectifs 4 - 2 - 1 - 2.
Quel peut-être le degré du cinquième sommet ? Dessiner un tel graphe.

Exercice 3
Dessiner un graphe dont les sommets correspondent aux chiffres de 2 à 9.
Relier deux sommets du graphe lorsque l'un est multiple de l'autre. Que constate-t-on ?

III. Graphes planaires

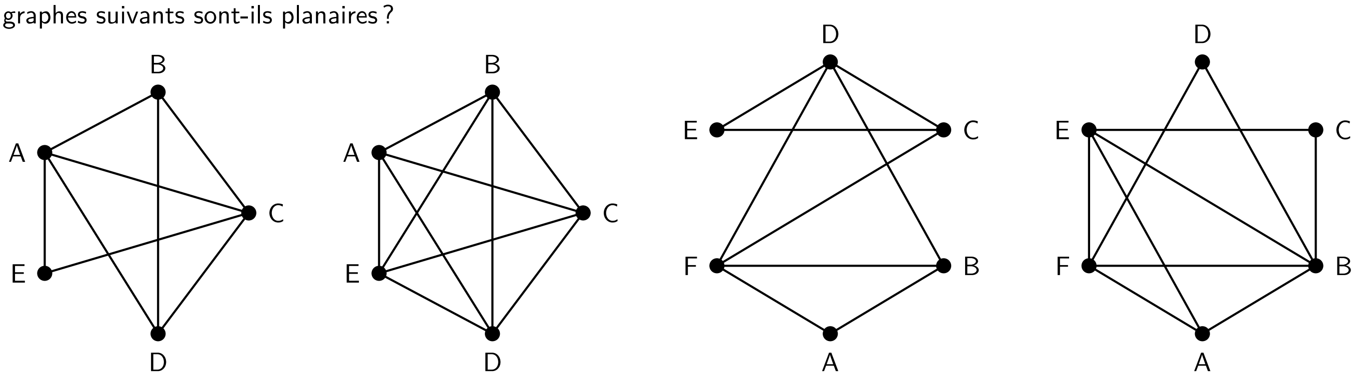
Définition 4
Un graphe ***planaire*** *est un graphe qui peut être dessiné dans le plan sans que ses arêtes ne se coupent.*

Exemple 5



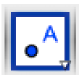
On déplace les sommets E et F de manière à ce que le graphe 1 soit « démêlé ». (le point C dans le second graphe).

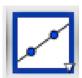
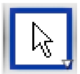
Activité 2
Les graphes suivants sont-ils planaires ?



Planaire	Planaire	Planaire	Planaire
Non planaire	Non planaire	Non planaire	Non planaire

Pour cela, nous allons utiliser un logiciel de géométrie dynamique :

- ☞ Placer les sommets en sélectionnant le bouton « Point » : 
- ☞ Placer les arêtes après sélection du bouton « Segment » : 

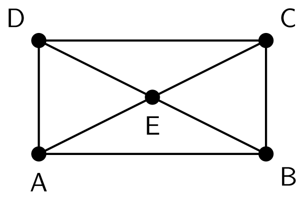
du menu 
- ☞ Déplacer les sommets en sélectionnant auparavant le « Pointeur » : 

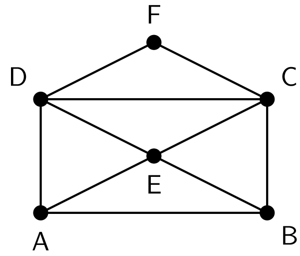
Le coin du matheux 1
Trois familles de fermiers veulent chacune un chemin de leur ferme à la rivière, un chemin de leur ferme au moulin et un chemin de leur ferme au village.

1. (a) Combien y aura-t-il de chemins au total ?
   (b) Donner un exemple de graphe représentant cette situation.
2. Le problème, c'est que ces trois familles se détestent et ne doivent surtout pas se croiser, sous peine de bagarre !
   (a) Est-il possible de construire ces chemins de telle sorte qu'aucun ne se croise ?
   (b) Sinon, trouver une situation où l'on a un maximum de chemins. Combien en trouve-t-on ?
3. (a) Imaginez une solution pour que chacun des fermiers aie tout de même ses trois chemins.
   (b) Que remarquez-vous ?

IV. Graphes et chemins

Activité 3
Peut-on dessiner l'enveloppe suivante (ouverte ou fermée) sans lever le crayon et en passant une et une seule fois sur chaque trait ?

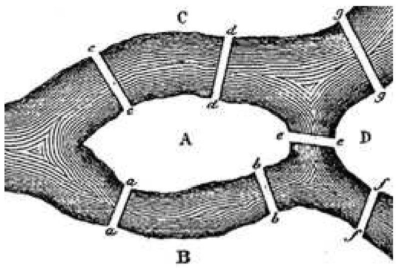




Un peu d'histoire. . .
Au 18^{e} siècle, un casse-tête est populaire chez les habitants de Königsberg (appelée plus tard Kaliningrad, Russie) : est-il possible de se promener dans la ville en ne passant qu'une et une seule fois par chacun des sept ponts de Königsberg ?

C'est le célèbre mathématicien Léonard Euler (1707-1783) qui résout le premier ce problème, en utilisant pour la première fois la notion de graphe.

Ancien plan de Königsberg



Plan de la rivière

Graphe

Définition 5
*Une **chaîne eulérienne** est une chaîne composée de **toutes** les arêtes prises **une et une seule fois**.*
*Un **cycle eulérien** est un cycle composé de **toutes** les arêtes prises **une et une seule fois**.*
*Un graphe possédant un cycle eulérien est un **graphe eulérien**.*

Exemple 6
Les graphes page -6- peuvent-il être tracé en une seule fois ?

Activité 4
En utilisant les graphes de l'exemple 6, compléter le tableau suivant :

	Graphe 1	Graphe 2	Graphe 3	Graphe 4	Graphe 5	Graphe 6	Graphe 7
Degré de A							
Degré de B							
Degré de C							
Degré de D							
Degré de E							
Nombre de sommets d'ordre pair							
Nombre de sommets d'ordre impair							
Chaîne eulérienne ?							
Cycle eulérien ?							

Peut-on émettre une conjecture ?

Propriété 2

- Un graphe possède une chaîne eulérienne si et seulement si ....

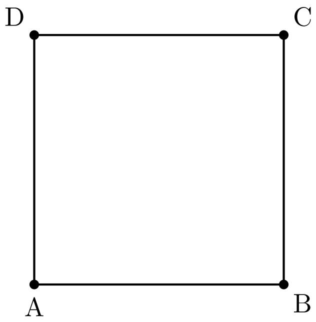
  ....

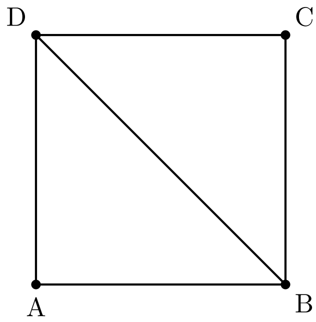
- Un graphe possède un cycle eulérien si et seulement si ....

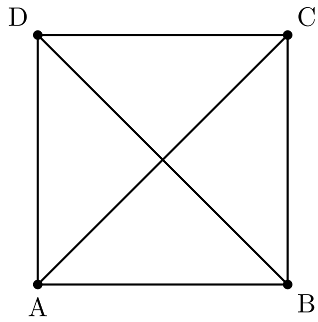
Le coin du matheux 2

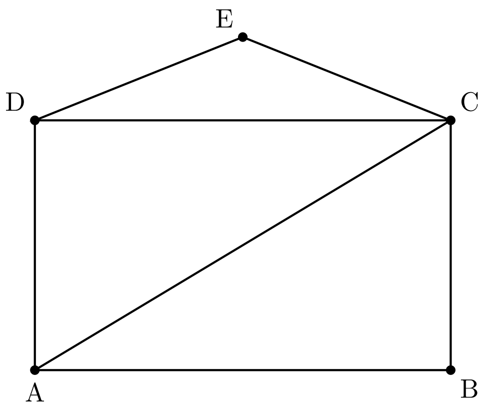
La promenade de Königsberg existe-t-elle ? ....

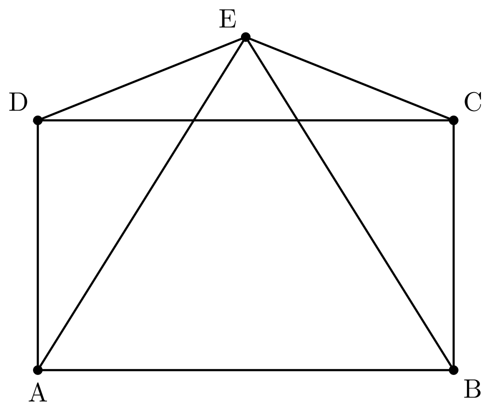
À l'aide d'une pochette transparente et d'un feutre effaçable, dire pour chacun des dessins suivants si l'on peut les tracer en une et une seule fois sans lever le crayon (si cela est possible, numéroter les arêtes dans l'ordre).

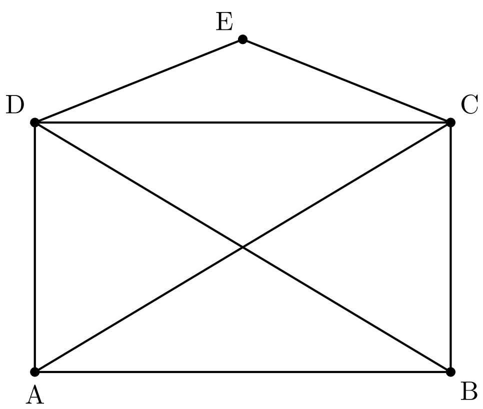


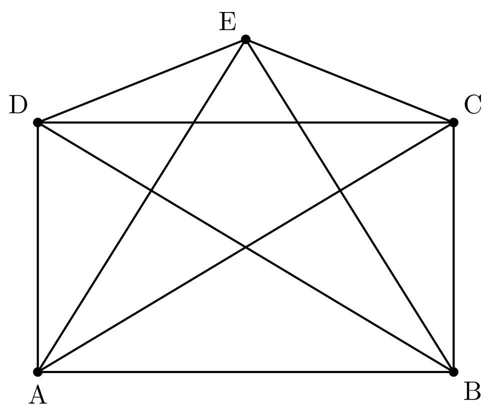








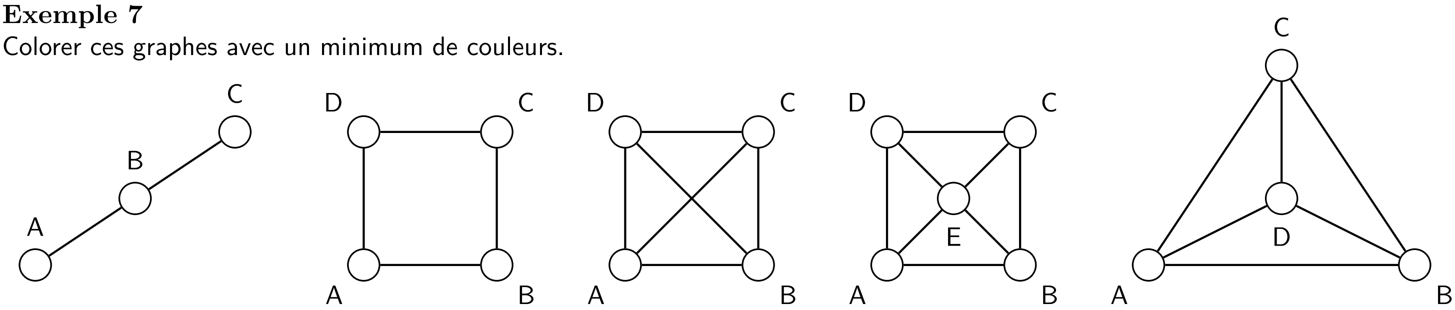




V. Graphes et couleurs

Définition 6
Colorer *un graphe, c'est associer une couleur à chaque sommet de façon que deux sommets adjacents soient colorés dans des couleurs différentes.*

Exemple 7
Colorer ces graphes avec un minimum de couleurs.



Graphe 1 Graphe 2 Graphe 3 Graphe 4 Graphe 5

Définition 7
Le ***nombre chromatique*** *d'un graphe est le nombre minimal de couleurs permettant de le colorer.*

Exemple 8
Donner le nombre chromatique de chacun des graphes de l'exemple 6 :

	Graphe 1	Graphe 2	Graphe 3	Graphe 4	Graphe 5
Nombre chromatique					

On peut se poser les questions suivantes :

1. De combien de couleurs, au maximum, peut-on colorer un graphe d'ordre 3 ? ....
2. De combien de couleurs, au maximum, peut-on colorer un graphe d'ordre 4 ? ....
3. De combien de couleurs, au maximum, peut-on colorer un graphe d'ordre 5 ? ....
4. De combien de couleurs, au maximum, peut-on colorer un graphe d'ordre n ? ....
5. Donner un cas pour lequel le nombre chromatique d'un graphe est égal à son ordre : ....

   ....

Définition 8
On dit qu'un graphe est ***complet*** *lorsque chaque sommet est relié par une arête à tous les autres sommets.*

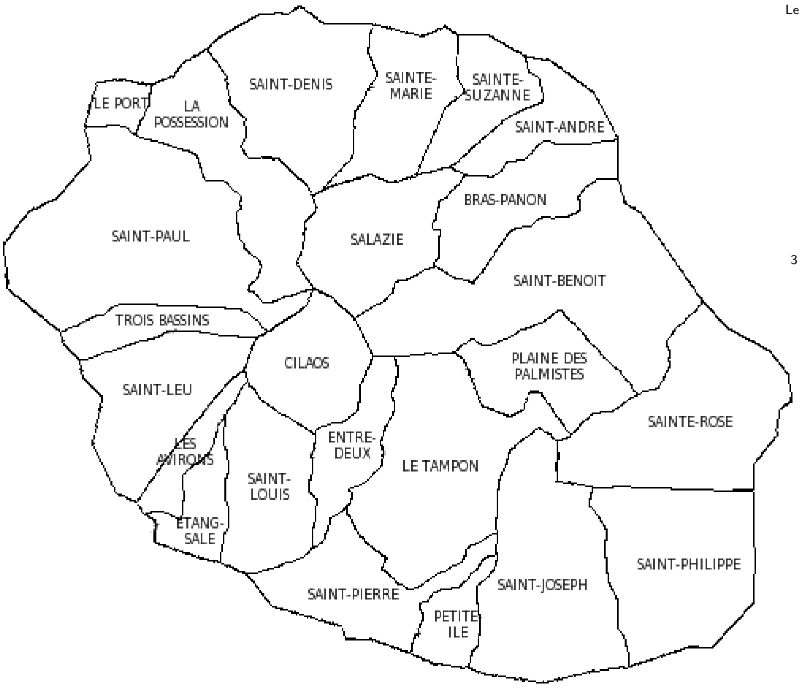
Narration de recherche :

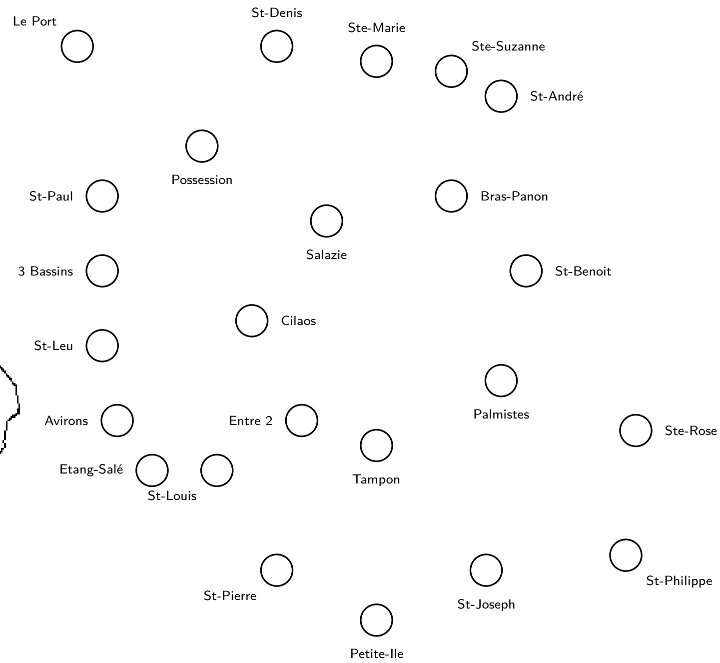
1. Construire le graphe complet à 3 sommets. Combien y a-t-il d'arêtes ?
2. Construire le graphe complet à 4 sommets. Combien y a-t-il d'arêtes ?
3. Construire le graphe complet à 5 sommets. Combien y a-t-il d'arêtes ?
4. Construire le graphe complet à 6 sommets. Combien y a-t-il d'arêtes ?
5. Déterminer une formule donnant le nombre d'arêtes dans un graphe complet à n sommets.

Une application importante de la coloration des graphes a été le problème du coloriage des cartes qui fut posé pour la première fois dans les années 1850 : quatre couleurs suffisent-elles pour colorier une carte de géographie quelconque de façon que deux pays ayant un bout de frontière en commun soient coloriés dans deux couleurs différentes ?
Il ne fut résolu pour la première fois en 1976 par un ordinateur.

Le coin du matheux 3

Le but est de colorier la carte de la Réunion avec un minimum de couleurs ...





1. À côté de la carte ont été placés les sommets d'un graphe correspondants aux différentes communes de la Réunion. Tracer les arêtes reliant les communes qui ont un morceau de frontière en commun.

2. Compléter le tableau suivant indiquant le degré de chaque sommet :

Les Avirons		Plaine Palmistes		Sainte-Marie		Saint-Paul	
Bras-Panon		Le Port		Sainte-Rose		Saint-Philippe	
Cilaos		La Possession		Sainte-Suzanne		Saint-Pierre	
Entre-Deux		Saint-André		Saint-Joseph		Salazie	
L'Etang-Salé		Saint-Benoit		Saint-Leu		Le Tampon	
Petite-Ile		Saint-Denis		Saint-Louis		Trois Bassins	

3. Classer dans l'ordre décroissant des degrés, puis par ordre alphabétique les 24 communes de l'île :

1.		7.		13.		19.	
2.		8.		14.		20.	
3.		9.		15.		21.	
4.		10.		16.		22.	
5.		11.		17.		23.	
6.		12.		18.		24.	

4. Colorer le premier sommet de la liste en rouge.

5. En parcourant la liste dans l'ordre croissant, colorer en rouge tous les sommets qui ne sont pas adjacents au premier sommet, sauf s'ils sont adjacents entre eux.

6. On revient en arrière dans le tableau et on s'intéresse au premier sommet de la liste non encore coloré. On le colore en vert puis on colore de la même couleur les sommets non encore colorés qui ne lui sont pas adjacents et qui ne sont pas adjacents entre eux.

7. On revient en arrière comme à la question 6 et on continue ainsi de suite avec la couleur bleue, puis noire.

8. En déduire une coloration de la carte d'origine avec quatre couleurs.