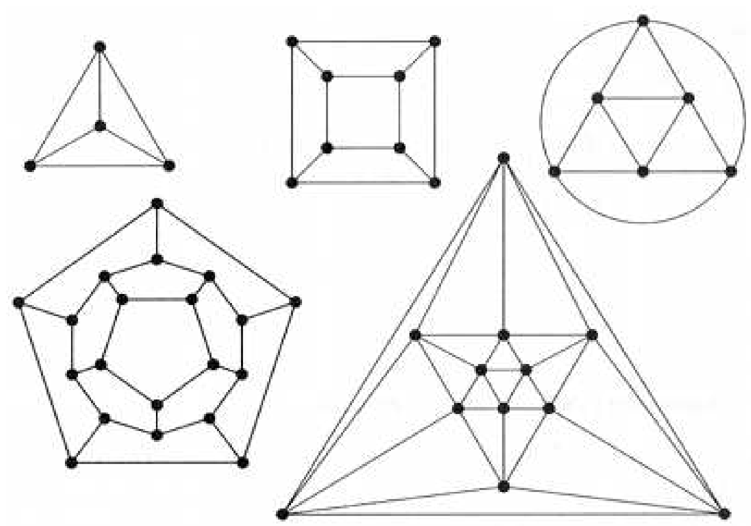
Les graphes

Expérimentation avec des élèves de collège



Nathalie DAVAL
http://mathematiques.daval.free.fr
Université de la Réunion - IREM - Juillet 2012.

Table des matières

1 Introduction

Pourquoi et comment introduire les graphes au collège ?

La question que nous pouvons nous poser au départ est « pourquoi un chapitre sur les graphes apparaît-il seulement dans les programmes de la spécialité mathématiques de terminale ES ? »

En terminale ES, le choix d'introduire les graphes est cohérent tant avec le programme de la classe antérieure qu'avec les exigences de formation ultérieure. On retrouve en effet quelques applications intéressantes du calcul matriciel développé dans l'option de première ES ; par ailleurs, les problèmes résolus constituent une première approche de situations diverses (transports à coûts minimaux, reconnaissance de mots. . .) auxquelles les élèves pourront être par la suite confrontés.

Serait-il pertinent d'insérer cette branche des mathématiques dans d'autres classes ?

J'ai voulu tester si les graphes pourraient être traités en collège, à condition bien évidemment que le contenu soit adapté !

Pour un collégien, la principale caractéristique sera l'aspect relativement ludique du concept. En effet, les séances choisies seront basées sur le dessin, les cheminement, le coloriage. . . et dérogent donc un peu des chapitres « classiques » des mathématiques.
L'objectif est également de créer des situations problème permettant de déboucher sur des narrations de recherche ou des problèmes ouverts.

Ce document est le compte rendu d'une expérimentation avec des classes de sixième, cinquième et quatrième.

Nous regarderons tout d'abord plus en détail la partie du programme mentionnant les graphes dans le secondaire, ainsi que les connaissances des collégiens et ce qu'ils doivent maitriser au départ des séances introduites.

Puis nous étudierons les cinq séances faites en classe, les thèmes choisis étant les graphes planaires, les chemins et la coloration des graphes.

2

Les programmes du secondaire

2.a Les graphes en terminale ES

Le plus petit niveau dans lequel nous retrouvons un chapitre sur les graphes et la classe de terminale ES.

Voici un extrait du B.O. n°4 du 30 août 2001 concernant l'enseignement de spécialité de mathématiques :

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Trois domaines sont abordés dans l'enseignement de spécialité : deux d'entre eux (suites et géométrie dans l'espace) prolongent directement le travail commencé en classe de première ; les paragraphes qui suivent expliquent le choix du troisième domaine et de la méthode de travail proposée.

Une ouverture sur la théorie des graphes

Ce choix est cohérent tant avec le programme de la classe antérieure qu'avec les exigences de formation ultérieure : on trouve en effet ici quelques applications intéressantes du calcul matriciel développé dans l'option de première ES ; par ailleurs, les problèmes résolus constituent une première approche, volontairement modeste, de situations complexes (d'ordonnancement, d'optimisation de flux, de recherche de fichiers informatiques, d'études de migrations de populations...) auxquelles de nobiliairembreux élèves seront par la suite confrontés, notamment en gestion ou en informatique. Ce thème sensibilise naturellement à l'algorithmique et, en montrant la puissance de la théorie des graphes pour la modélisation, permet un autre regard mathématique sur diverses situations.

Enfin, la présence des graphes dans les programmes permettra ultérieurement de définir des thèmes de TPE faisant intervenir des mathématiques consistantes.

Un travail axé sur la seule résolution de problèmes

Il n'est pas question de retomber dans les pièges du langage ensembliste des années 1970 *: toute présentation magistrale ou théorique des graphes serait contraire au choix fait ici. L'essentiel du travail réside dans la résolution de problèmes : résolution à l'initiative des élèves, avec ses essais et tâtonnements, ses hésitations pour le choix de la représentation en termes de graphe (quels objets deviennent arêtes ? lesquels deviennent sommets ?), la recherche d'une solution et d'un raisonnement pour conclure. Toute notion relative à la théorie des graphes absente de la liste de vocabulaire élémentaire du tableau ci-après est clairement hors programme. Cette liste doit suffire pour traiter tous les exercices proposés.*

On trouvera dans le document d'accompagnement des éléments de théorie des graphes nécessaires à la formation des enseignants ainsi qu'une liste d'exemples sans caractère normatif, couvrant largement le programme et illustrant le type de travail attendu ; chaque exemple est suivi d'une liste de contenus (termes ou propriétés) que celui-ci permet d'aborder ; un lexique en fin de ce document reprend la totalité des termes et propriétés du programme ainsi introduits. L'optique première étant la résolution de problèmes, on insistera plus sur le bon usage des mots que sur leur définition formelle. L'intérêt du lexique est de bien marquer des limites à ce qui est proposé.

À titre indicatif, la répartition horaire entre les différents chapitres peut être :
40 % pour les graphes ; 35 % pour les suites ; 25 % pour la géométrie dans l'espace.

CONTENU	***MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE***	***COMMENTAIRES***
Résolution de problèmes à l'aide de graphes		
Résolution de problèmes conduisant à la modélisation d'une situation par un graphe orienté ou non, éventuellement étiqueté ou pondéré et dont la solution est associée : *- au coloriage d'un graphe,* *- à la recherche du nombre chromatique,* *- à l'existence d'une chaîne ou d'un cycle eulérien,* *- à la recherche d'une plus courte chaîne d'un graphe pondéré ou non,* *- à la caractérisation des mots reconnus par un graphe étiqueté et, réciproquement, à la construction d'un graphe étiqueté reconnaissant une famille de mots.* *- à la recherche d'un état stable d'un graphe probabiliste à 2 ou 3 sommets.*	*Les problèmes proposés mettront en jeu les graphes simples, la résolution pouvant le plus souvent être faite sans recours à des algorithmes. On indiquera que pour des graphes complexes, des algorithmes de résolutions de certains problèmes sont absolument nécessaires.* *On présentera un algorithme simple de coloriage des graphes et un algorithme de recherche de plus courte chaîne.*	*Il s'agit d'un enseignement entièrement fondé sur la résolution de problèmes.* *L'objectif est de savoir modéliser des situations par des graphes et d'identifier en terme de propriétés de graphes la question à résoudre.* *Ces algorithmes seront présentés dans les documents d'accompagnement et on restera très modeste quant à leurs conditions de mise en œuvre.*
Vocabulaire élémentaire des graphes : sommets, sommets adjacents, arêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, distance entre deux sommets, diamètre, sous-graphe stable, graphe connexe, nombre chromatique, chaîne eulérienne, matrice associée à un graphe, matrice de transition pour un graphe pondéré par des probabilités.	*Les termes seront introduits à l'occasion de résolution de problèmes et ne feront pas l'objet d'une définition formelle, sauf lorsque cette définition est simple et courte (degré d'un sommet, ordre d'un graphe par exemple).*	*Les élèves devront savoir utiliser à bon escient le vocabulaire élémentaire des graphes, vocabulaire qui sera réduit au minimum nécessaire à la résolution des problèmes constituant l'enseignement de cette partie.*
Résultats élémentaires sur les graphes : *- lien entre la somme des degrés des sommets et le nombres d'arêtes d'un graphe ;* *- conditions d'existence de chaînes et cycles eulériens ;* *- exemples de convergence pour des graphes probabilistes à deux sommets, pondérés par des probabilités.*	*On pourra, dans des cas élémentaires, interpréter les termes de la puissance n^e de la matrice associée à un graphe.*	

2.b Connaissances mathématiques des collégiens

Pour les lycéens ou même des collégiens, le champ mathématique se limite au calcul, à l'étude des fonctions et à la géométrie élémentaire. S'ouvrir sur la théorie des graphes, c'est s'ouvrir à de nouveaux raisonnements, c'est s'entraîner à avoir un autre regard mathématique pour le résolution des problèmes.

Montrer aux élèves des mathématiques non classiques liées à des problèmes concrets. Ce choix peut aider un certain nombre d'élèves à (re)trouver goût aux mathématiques : la nouveauté des objets mathématiques manipulés devrait susciter leur adhésion, et leur caractère relativement élémentaire peut éviter tout découragement.

La problématique abordée dans cette partie est d'introduire les graphes au collège, et particulièrement de tester quelques séances pour des classes de sixième, cinquième et quatrième (les trois niveaux que j'ai cette année dans deux collèges différents).

Pour une évaluation plus objective quant au niveau de classe le plus pertinent, la méthodologie retenue pour cette étude a été de proposer les mêmes séances pour tous les niveaux. Ce qui impose de construire des séances qui conviennent à la fois à un élève de sixième qu'à un élève de quatrième.

Les connaissances doivent donc se restreindre au palier 2 (compétence 3) du livret personnel des compétences, c'est à dire :

1. Nombres et calcul
   - Écrire, nommer, comparer, ranger les nombres entiers naturels, les nombres décimaux et quelques fractions simples.
   - Restituer les tables d'addition et de multiplication de 2 à 9.
   - Utiliser les techniques opératoires des quatre opérations sur les nombres entiers .
   - Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.
   - Calculer mentalement en utilisant les quatre opérations.
   - Estimer l'ordre de grandeur d'un résultat.
   - Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations.
   - Utiliser une calculatrice.
2. Géométrie
   - Reconnaître, décrire et nommer les figures et solides usuels.
   - Utiliser la règle, l'équerre et le compas pour vérifier la nature de figures planes usuelles et les construire avec soin et précision.
   - Percevoir et reconnaitre parallèles et perpendiculaires.
   - Résoudre des problèmes de reproduction, de construction.
3. Grandeurs et mesures
   - Utiliser des instruments de mesure.
   - Connaître et utiliser les formules du périmètre et de l'aire d'un carré, d'un rectangle et d'un triangle.
   - Utiliser les unités de mesures usuelles.
   - Résoudre des problèmes dont la résolution implique des conversions.
4. Organisation et gestion de données
   - Lire, interpréter et construire quelques représentations simples : tableaux, graphiques
   - Savoir organiser des informations numériques ou géométriques, justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat
   - Résoudre un problème mettant en jeu une situation de proportionnalité

2.c Programme des séances

Cinq séances seront proposées aux élèves dont voici les lignes directrices. Le détail de chaque séance sera abordé dans les chapitres suivants.

Séance 1 : à la découverte des graphes.

Séance introductive de la notion de graphe : les élèves doivent représenter différentes situations (un arbre généalogique, un problème de transport et une histoire de relations entre des dominos).

Cela permet tout doucement d'introduire ce que sont les graphes et ce qu'apporte leur représentation.

Séance 2 : vocabulaire des graphes.

Avant de commencer la partie « utilité » des graphes, une partie du vocabulaire nécessaire pour les séances suivantes est introduit : graphe, sommet, ordre, degré, adjacent, chaîne, longueur, cycle.

La séance donne aussi l'occasion aux élèves d'émettre une conjecture (lemme des poignées de mains) à partir d'exemples, ce qui doit donner lieu à une discussion collective sur la démonstration de ce lemme.

Séance 3 : graphes planaires.

Cette séance est propice à l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique afin de simplifier le raisonnement pour savoir si un graphe est planaire ou non. Les élèves peuvent manipuler des graphes en déplaçant ses sommets, ce qui renforce la définition du graphe en terme de « relations ».

C'est aussi l'occasion de parler de l'intérêt de ces graphes planaires dans différentes situations de la vie courante (notamment la fameuse énigme des trois maisons, ou encore de circuits électriques).

Séance 4 : graphes et chemins.

Une séance avec un aspect historique et le célèbre problème des ponts du Königsberg. Les élèves doivent déterminer si un graphe peut être dessiné entièrement sans jamais lever le crayon ni repasser deux fois par la même arête.

Cela doit donner lieu à une discussion pour savoir comment déterminer facilement si un graphe possède une chaîne ou un cycle eulérien.

Séance 5 : graphes et couleurs.

Enfin, une dernière séance de coloration des graphes avec introduction de vocabulaire supplémentaire (nombre chromatique et graphe complet).

Bien évidemment, cette séance ne peut se terminer sans parler de la coloration des cartes en quatre couleurs, et de l'algorithme de Welsh et Powell qui permet de colorier la carte de la Réunion et ses 24 communes.

Pourquoi avoir choisi ces séances ?

Le choix s'est porté sur trois concepts permettant la modélisation de situations par un graphe : graphes planaires, chemins et couleurs pour plusieurs raisons :

- longueur de la séquence,
- aspect historique,
- aspect ludique,
- possibilité d'utiliser plusieurs supports,
- difficulté.

3 Première séance

3.a Présentation de la séance

La première séance permet d'introduire les premiers graphes. En effet, les élèves n'ont jamais étudié, voire même entendu le mot « graphe ».

Lors de cette séance, trois activités de dévolution que l'on pourrait rencontrer dans la vie courante sont données. Une grande liberté est laissée aux élèves quant à la représentation.

L'activité n°1 propose de dessiner un arbre généalogique sur trois générations.

L'activité n°2 demande de construire un schéma qui modélise des trajets usuels d'élèves : de la maison au collège, à la boulangerie et au stade, et du collège au stade.

L'activité n°3 concerne un jeu de dominos pour lequel il faut trouver toutes les relations qui existent entre les différents dominos.

Résumé de la séance

- **Durée de la séance :** entre 30 et 45 minutes.
- **Connaissances mathématiques :** aucune.
- **Notion abordée :** représentation de situations de la vie courante.
- **Outils utilisés :** papier - crayon - couleurs.

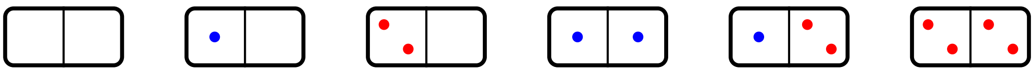
I. À la découverte des graphes

Nous allons découvrir ce que sont les graphes. Vous pouvez faire toutes les activités proposées sur cette feuille « de manière naturelle », c'est à dire comme vous le pensez. Il s'agit de proposer chacun sa vision afin de comparer ensuite toutes les représentations.

Activité 1
Construire un dessin représentant votre arbre généalogique jusqu'à vos grands-parents.

Activité 2
En une semaine, vous faites les trajets suivants : maison - collège ; maison - boulangerie ; maison - stade ; collège - stade. Construire un schéma modélisant touts les trajets que vous pouvez effectuer pendant la semaine.

Activité 3
Un jeu de domino « version light » est composé des six dominos suivants :



Imaginer un dessin représentant les dominos et toutes les relations qu'il peut y avoir entre eux.

3.b Analyse a priori

On ne demande pas aux élèves un bagage mathématique conséquent. La question que l'on se pose est « Comment un élève de collège va se représenter telle ou telle situation, en fonction de son vécu ? »

L'important ici est que les élèves travaillent sur « leur » représentation : on insiste sur le fait qu'il n'y a pas « une » meilleure représentation, mais que chacun peut avoir son point de vue, ce qui est fréquemment oublié en mathématiques où la solution est souvent unique.

Le but de chaque activité revient donc à modifier telle ou telle perception jusqu'à obtenir une représentation plus rigoureuse eu égard à la théorie des graphes.

Une telle intervention didactique exige une stratégie :

- faire faire aux élèves leur propre représentation ;
- identifier, dresser une sorte d'inventaire des représentations les plus fréquentes ;
- les respecter (ne pas considérer certaines représentations quelque peu farfelues comme des erreurs) ;
- les utiliser et les modifier progressivement en utilisant les interactions et les confrontations au sein du groupe.

Du côté organisation, les élèves dessinent sur leur feuille, puis certains vont faire leur représentation au tableau. C'est l'occasion de comparer ces différentes représentations et de montrer que ce qui est important mathématiquement n'est pas la forme, mais les relations.

✎ Pour **l'activité n°1**, les élèves sont-ils au courant de ce qu'est un arbre généalogique, et surtout savent-ils exprimer ce que sont les ramifications de l'arbre symbolisant les mariages, les ascendants et descendants ?

Mathématiquement, ce sont justement ces relations qui sont importantes.

Ici, l'âge de l'élève peut être un facteur discriminant puisqu'il s'agit aussi d'avoir une certaine culture générale, et l'activité sera donc peut être mieux réussie pour des élèves de quatrième que par des élèves de sixième.

✎ **L'activité n°2** offre une difficulté supplémentaire : en effet, la représentation des différents trajets est moins claire que dans le cas d'un arbre généalogique. Là encore, c'est le vécu des élèves qui aidera à en faire une représentation.

✎ Enfin, **l'activité n°3** demande aux élèves un moyen d'établir des relations entre des dominos. Cette activité est très certainement la plus difficile à comprendre et à réaliser par les élèves car moins classique (représenter un arbre généalogique ou un chemin routier peut être courant, mais représenter des relations entre dominos l'est moins !)

On entre par cette activité de plain-pied dans le domaine des graphes, et surtout dans leur utilité en terme d'outils.

La conclusion de cette première séance est de montrer que, mathématiquement, on peut simplifier toutes ces représentations différentes en une seule en terme de graphe.
C'est l'occasion d'introduire la définition de sommets et d'arêtes et de montrer que l'important dans ces trois activités est non la forme, mais la relation qu'il y a entre différents objets.

3.c Analyse a posteriori

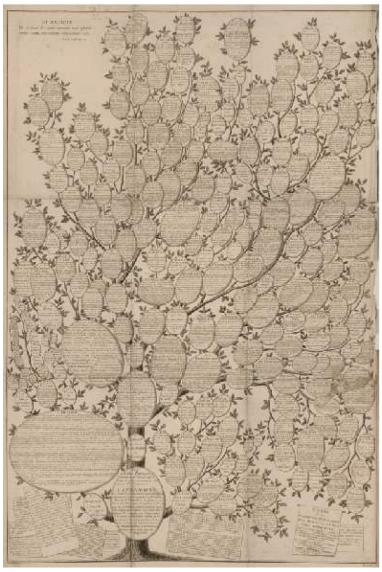
Cette séance a été accueillie favorablement : tout d'abord méfiants envers la nouveauté, les élèves ont vite compris qu'il s'agissait plus (de leur propre point de vue) de dessiner que de faire des mathématiques !

✎ **Activité n°1 :** après une courte description de ce qu'est un arbre généalogique, les principales questions des élèves sont plus d'ordre quantitatives que relationnelles :

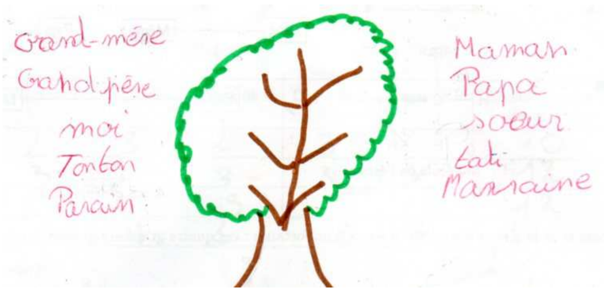
– « Jusqu'où va-t-on ? »
– « On met les cousins ? »
– « Où on dessine les frères et soeurs : j'en ai beaucoup »

Les arbres obtenus ont été très différents suivant les classes : en 6^{e}, le mot « arbre » prend tout son sens : presque tous dessinent un arbre avec un tronc, des branches et des feuilles, mais ne respectent pas forcément les contraintes d'un arbre généalogique, à savoir des ramifications étagées par rapport aux générations, l'organisation plutôt de bas en haut…

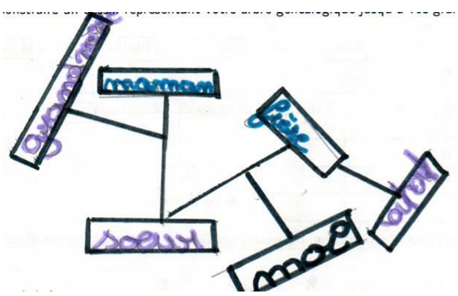
À noter que pendant longtemps, les arbres généalogiques étaient des arbres de vie donc dans le sens de l'illustration de Joan :



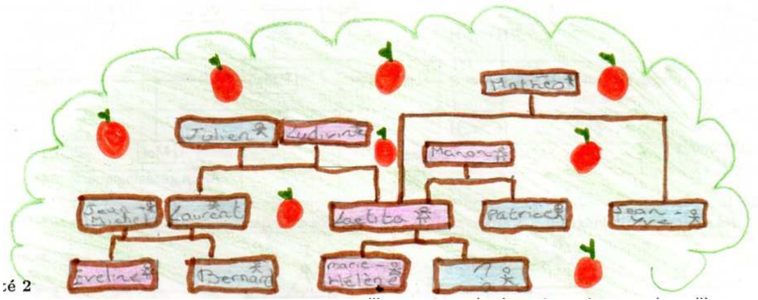
Pour leur Encyclopédie raisonné des sciences, des arts et des métiers (Diderot et D'Alembert, éditée de 1751 à 1777), Chrétien Frédéric Guillaume Roth en a dessiné cet arbre qui guide le lecteur dans les méandres de cette encyclopédie en 1769.



Joan, 6^{e}, dessine un arbre… et sa famille, sans véritables liens entre eux.

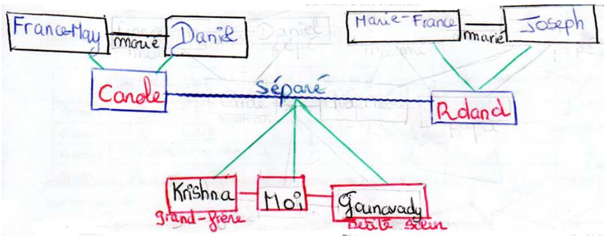


Vicky, 6^{e}, dessine des relations pas forcément usuelles !

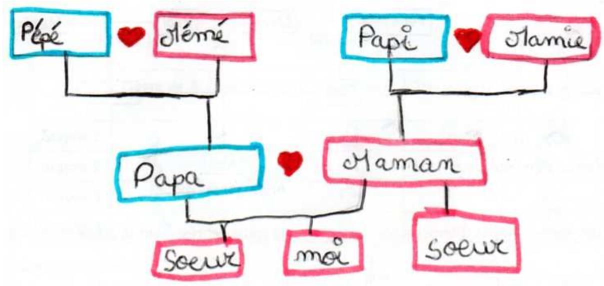


Ludivine, 6^{e}, dessine un arbre assez complexe, mais inversé par rapport au sens classique des arbres généalogiques.

En 5^e et 4^e, l'esprit semble se rationaliser et les liaisons sont plus claires. Quelques arbres intéressants apparaissent montrant une appropriation de l'activité avec des subtilités plus fines que celles demandées a priori. Ce qui montre bien une réelle dévolution de l'activité et permet de rentrer naturellement dans le vocabulaire des graphes.



Soudary, 5^e, étiquète son graphe en donnant des précisions supplémentaires sur les liens entre adultes.

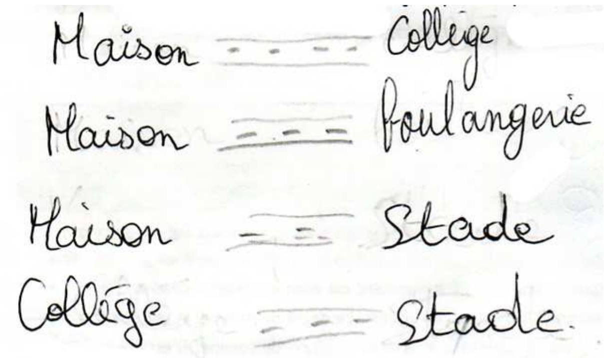


Chloé, 4^e, ajoute sa demi-soeur en dissociant bien les arêtes.

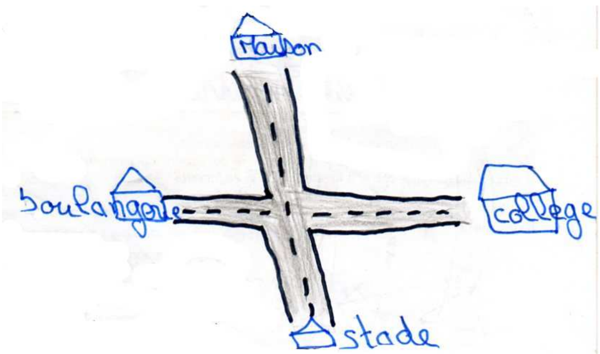
Cette première activité permet d'insister sur la notion de relation entre des personnes (que l'on nommera sommet en terme de graphes), qui se traduisent par des « traits » (arêtes).

✎ **Activité n°2 :** la mise en place est difficile pour cette seconde activité, les élèves ne sachant pas comment introduire les différents éléments. Dans un premier temps, ils ont essayé seuls, puis, je leur ai apporté quelques précisions : placer tout d'abord les lieux sous une forme personnelle, et ensuite établir les relations entre ces différents lieux.

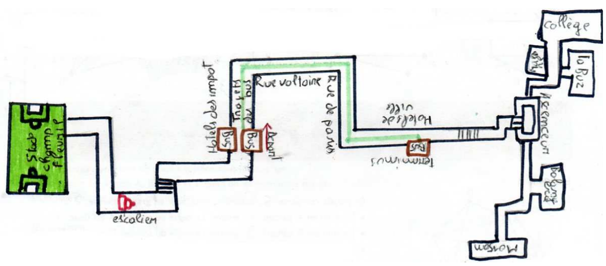
Les résultats sont parfois surprenants, parfois complexes on encore très réalistes. Manifestement, quatre types de représentations apparaissent :



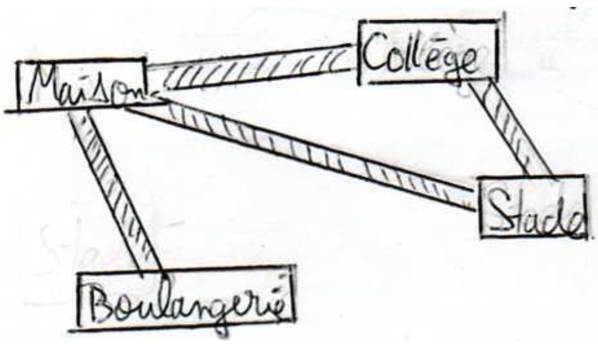
1) Représentation dissociée de Leeana, 6^e.



2) Représentation simpliste de Lydia, 6^e.



3) Représentation réaliste de Tonjona, 5^e.



4) Représentation sous forme d'un graphe d'Ophélie, 5^e.

On réalise que l'ensemble des connaissances cumulées tout au long des années prend toute son ampleur ici : en effet, là où une personne « formatée » à utiliser les graphes par exemple ira directement à l'essentiel, les élèves, eux, en font une représentation plus réaliste (on le voit aux itinéraires, à la précision dans le dessin des routes avec leurs pointillés, aux dessins des maisons ...).

On peut regarder plus en détail ces quatre types de représentation :

Le **schéma 1** est intéressant et montre qu'il manque peut-être une consigne supplémentaire dans l'énoncé afin de le rendre plus compréhensible. En effet, on peut s'imaginer que l'élève pouvait soit penser qu'il existait plusieurs maisons, collèges et stades, ou tout simplement qu'il en a fait des itinéraires, sans liens entre eux.

Le **schéma 2** donne une solution où tous les lieux sont reliés entre eux, et où les trajets particuliers indiqués dans l'énoncé ne sont pas pris en compte. Cette représentation n'est bien entendu pas fausse, mais elle montre que l'élève n'a pas compris explicitement le terme de « schéma modélisant ».

Pour le **schéma 3**, quelques élèves s'approprient complètement les trajets en proposant le leur, plus ou moins détaillé, mais plutôt réaliste en indiquant les lieux par leur nom propre.

Le dernier **schéma 4** ressemble à ce sur quoi cette séance devait aboutir.

Dans le tableau suivant sont indiqués, pour chaque classe, le pourcentage d'élèves ayant dessiné des représentations ressemblant aux schémas 1, 2, 3 ou 4 :

Classe	schéma 1	schéma 2	schéma 3	schéma 4
sixième	14 %	36 %	0 %	50 %
cinquième	5 %	30 %	25 %	40 %
quatrième	0 %	17 %	0 %	83 %

On se doit de manipuler ces statistiques avec précaution, l'effet de groupe pouvant entraîner un même schéma pour plusieurs élèves proches dans la classe !

On remarque tout comme la première activité une différence sensible entre les différents niveaux, la classe de quatrième ayant déjà commencé, semble t-il, à intégrer la notion de graphe (ou encore sont plus malins et ont repéré, en retournant la feuille, un graphe similaire à celui demandé ici !)

Cette activité donne de nouveau lieu à des interrogations et à un questionnement collectif : certains vont dessiner au tableau et l'on peut ensuite partager au sujet des différentes représentations.

Classe de sixième en action…

Le schéma 1 donne lieu à des remarques du type : « Mais pourquoi tu as mis plusieurs maisons ? », « Il manque des routes ! ».

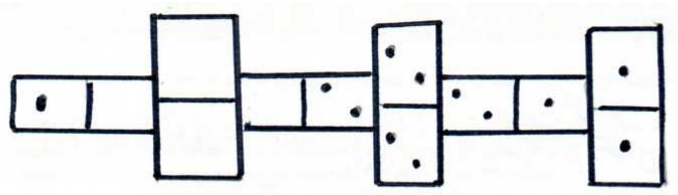
Le passage du schéma 3 de type géographique au schéma 4 de type graphe pose la question essentiellement des distances et des routes : en leur faisant simplifier au maximum le schéma 3, ils arrivent à un graphe dont les distances entre les sommets sont les mêmes que les distances sur leur dessin. Et le fait de tracer un trait directement du stade par exemple à la maison les perturbe, comme le dit Tonjona : « mais il n'existe pas de route là ! ».

✎ **Activité n°3 :** les élèves ayant déjà commencé l'activité avant qu'elle ne soit expliquée construisent un « chemin » de dominos, comme ils auraient pu le faire dans le vrai jeu.

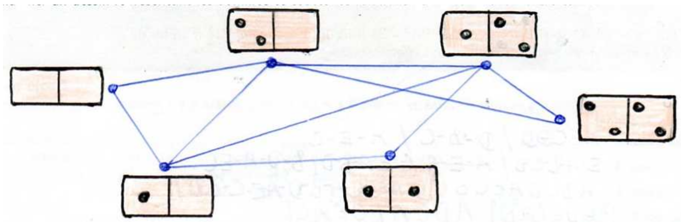
Ceci n'était pas faux, et pas non plus inintéressant, mais montre qu'ils n'ont pas bien lu l'énoncé et sont surtout très imprégnés de leur vécu à propos du jeu de domino.

J'ai donc décidé de leur dessiner au tableau les sommets (les dominos), ils leur restait à faire les liens entre eux.

C'est l'occasion de commencer à parler de chemin comme outil pour aller vers une solution pour un vrai jeu de domino. Le concept même de chemin, comme objet de savoir sera défini dans une autre séance.



Tonjona, 5^e, dessine une vraie partie de dominos.



Soumayah, 4^e, dessine les dominos puis les relie entre eux suivant leurs compatibilités.

4 Deuxième séance : vocabulaire

4.a Présentation de la séance

La deuxième séance est une séance où l'on introduit le vocabulaire nécessaire, passage obligé afin de pouvoir ensuite poursuivre avec le reste du chapitre. Ce nouveau vocabulaire est toujours suivi d'un exemple pour plus de compréhension.

On définit tout d'abord la notion de **graphe, sommet et arêtes** en insistant sur le fait qu'un graphe représente surtout des relations entre objets.

Ensuite, viennent les définitions de **l'ordre, du degré et des arêtes adjacentes**.

Puis celle de **chaîne et cycle**, vocabulaire plus spécifique aux séances qui suivront.

Enfin, les élèves se mettent en position de chercheur et tentent de conjecturer le lemme des poignées de mains en utilisant un tableau de données.

Si le temps le permet, on peut s'attarder sur la résolution de quelques exercices.

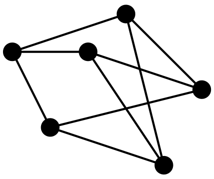
Résumé de la séance

- **Durée de la séance :** une heure.
- **Connaissances mathématiques :** numérotation, parité, tableau.
- **Vocabulaire abordé :** graphes, sommets, arêtes, ordre, degré, adjacent, chaîne et cycle.
- **Outils utilisés :** $\emptyset$.

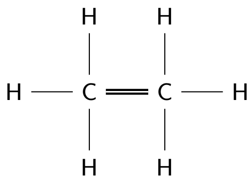
II. Vocabulaire des graphes

Définition 1
*Un **graphe** est un ensemble de points reliés par des segments.*
*Les points sont appelés **sommets** du graphe, et les segments sont des **arêtes**.*

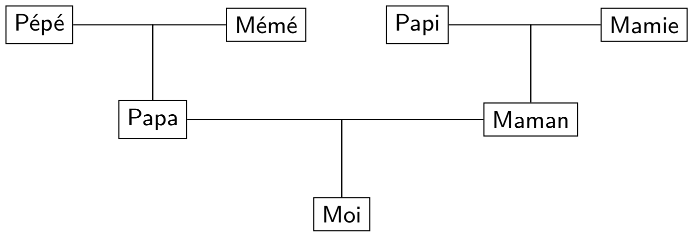
Exemple 1



Graphe quelconque

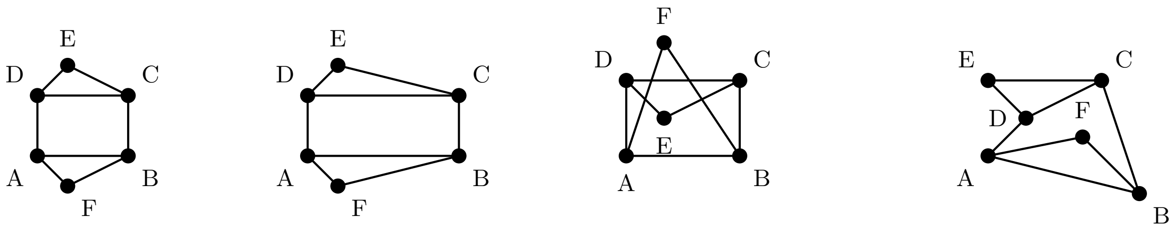


Molécule de l'éthane



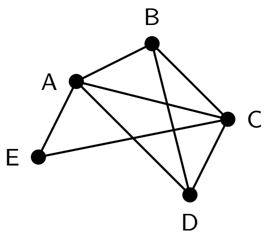
Arbre généalogique

Remarque 1
La position des sommets et la longueur des arêtes n'a pas d'importance : ces quatre graphes représentent la même situation.



Définition 2
*On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de ses sommets.*
*Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont il est une extrémité.*
*Deux sommets reliés par une arête sont dits **adjacents**.*

Exemple 2



Ce graphe comporte ... sommets, c'est donc un graphe d'ordre ....

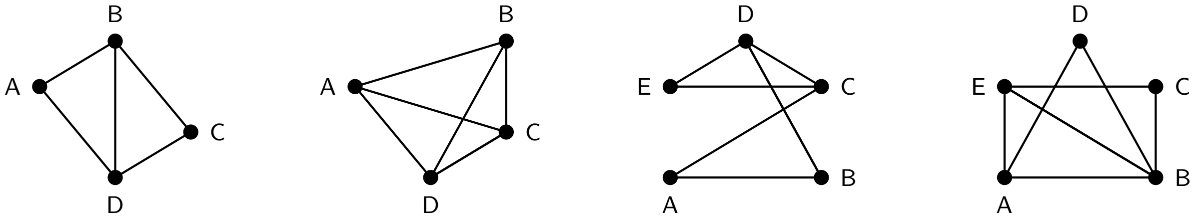
- Du sommet A partent 4 arêtes. Le degré du sommet A est donc 4 .
- Du sommet B partent ... arêtes. Le degré du sommet B est donc ....
- Du sommet C partent ... arêtes. Le degré du sommet C est donc ....
- Du sommet D partent ... arêtes. Le degré du sommet D est donc ....
- Du sommet E partent ... arêtes. Le degré du sommet E est donc ....

Définition 3
*Une **chaîne** est une suite quelconque d'arêtes consécutives. Sa **longueur** est le nombre d'arêtes qu'elle comporte.*
*Un **cycle** est une chaîne qui ne comporte pas deux fois la même arête et dont les deux extrémités sont confondues.*

Exemple 3
À partir de l'exemple 2, donner :

- Une chaîne de longueur 2 : ....
- Une chaîne de longueur 4 : ....
- Une chaîne de longueur 10 : ....
- Un cycle de longueur 3 : ....
- Un cycle de longueur 5 : ....

Activité 4
Pour chacun des graphes suivants, remplir le tableau suivant :



Graphe 1 Graphe 2 Graphe 3 Graphe 4

	Degré de A	Degré de B	Degré de C	Degré de D	Degré de E	Somme des degrés des sommets	Nombre d'arêtes
Graphe 1							
Graphe 2							
Graphe 3							
Graphe 4							

Que remarque-t-on ?

Propriété 1 (Lemme des poignées de mains)
....
....

Exemple 4
Anaïs, Bruno, Chloé, Déborah et Emmanuel se sont donné RDV au cinéma. Ils se sont dit bonjour en faisant « chek ». Combien de « checks » ont été échangés ?

On commence par tracer un graphe représentant la situation :
- On nomme les 5 amis A, B, C, D et E que l'on les représente par des ....
- On relie chaque paire de copains par une ....

Tous les sommets sont d'ordre ....
Il y a ... sommets donc, la somme des degrés des sommets vaut ....
D'après la propriété 1, on en conclut que le nombre d'arêtes est : ....

Conclusion : ... checks ont été échangés.

Graphe

Exercices

Exercice 1
Dessiner un graphe d'ordre 4 à 5 arêtes, puis un autre à 6 arêtes, et enfin un dernier à 7 arêtes.

Exercice 2
Un graphe d'ordre 5 est tel que les 4 premiers sommets ont pour degrés respectifs 4 - 2 - 1 - 2.
Quel peut-être le degré du cinquième sommet ? Dessiner un tel graphe.

Exercice 3
Dessiner un graphe dont les sommets correspondent aux chiffres de 2 à 9.
Relier deux sommets du graphe lorsque l'un est multiple de l'autre. Que constate-t-on ?

4.b Analyse a priori

Ici, on choisit un schéma classique de cours ; une phase introductive a été faite la séance précédente.

La première partie de la séance est consacrée à l'introduction du vocabulaire de manière progressive.
C'est le choix effectué pour présenter le plus rapidement possible le vocabulaire propre à la théorie des graphes afin de pouvoir passer à des applications plus complètes.

Elle est ponctuée d'exemples d'application dans le but de mieux faire passer et comprendre les différentes définitions.

Les **définitions 1 et 2** déterminent des notions assez rapidement assimilables par les élèves. En revanche, la **définition 3** sur les chaînes et cycles peut engendrer quelques difficultés :

- tout d'abord sur la longueur de la chaîne : une chaîne de longueur n ne comporte pas n mais $n+1$ sommets.
  Ici revient le fameux problèmes « des piquets et des intervalles » qui est souvent source d'erreurs pour les élèves... et pour les adultes !
- Ensuite sur la définition même de la chaîne : la transposition d'un vocabulaire de la vie courant (chaîne) faisant plus penser à quelque chose de fermé alors que la chaîne ne l'est pas forcément.

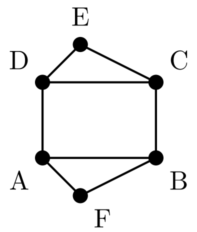
La suite de la séance permet de mettre en place différentes phases dans le but de déterminer le « Lemme des poignées de mains » :

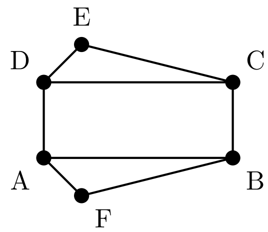
1. une phase d'action, ou de recherche où les élèves, seuls devant leur feuille, remplissent un tableau et cherchent à conjecturer une certaine propriété,
2. une phase de mise en commun où les élèves présentent leurs résultats : c'est la phase de formulation,
3. une phase de validation afin de se mettre d'accord sur le résultat, le vocabulaire...
4. une phase d'institutionnalisation par l'écriture de la propriété établie pas les élèves,
5. une phase de démonstration de manière collective et empirique,
6. et une phase d'application sur un exercice permettant de mettre en œuvre ce qu'ils viennent d'acquérir.

4.c Analyse a posteriori

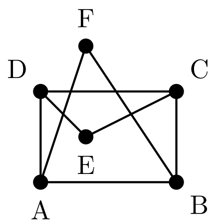
La séance commence par la définition d'un graphe. La **remarque** 1 « La position des sommets et la longueur des arêtes n'a pas d'importance » est intéressante car, contrairement à de nombreuses notions de géométrie où la longueur, les angles. . . ont beaucoup d'importance, ici, il y a justement une grande liberté de configuration.

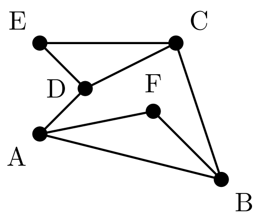
On entre avec les élèves dans une notion de relation entre objets, ce qui les perturbe légèrement : ils arrivent à exprimer le passage d'un graphe à l'autre, mais ne comprennent pas toujours immédiatement que deux graphes différents représentent en fait la même situation.

Prenons l'exemple du passage de 

à 

La « transformation physique » de l'un vers l'autre ne pose aucune difficulté : selon les élèves, on étire, ou on allonge, ou encore on agrandit la figure de gauche pour obtenir celle de droite.
En revanche, il est plus difficile pour eux de concevoir que ce sont les deux mêmes graphes et que la représentation n'est là, en fait, que pour aider à la compréhension en interprétant seulement des relations sans se soucier de la forme.

Il est très important dans ce chapitre d'en comprendre la subtilité. Une fois acquise, le passage aux deux autres exemples 

et 

est trivial.

La **définition 2** ainsi que l'**exemple 2** sont compris assez rapidement.

La **définition 3** et l'**exemple 3** qui suivent sont sources d'erreurs entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes, qui ne sont pas égaux. Une chaîne de longueur 2 par exemple est « A - B » puisqu'il y a deux sommets ! Il faut donc relire à plusieurs reprises la définition afin que celle-ci soit assimilée.

Une difficulté supplémentaire apparaît pour les cycles : concentrés sur le nombre d'arêtes, ils en oublient la contrainte supplémentaire du cycle qui consiste à obtenir les deux mêmes sommets aux extrémités et à ne pas avoir une arête parcourue deux fois.
Pour un cycle, la recherche ne peut se faire au hasard. En effet, si pour une chaîne, l'élève peut partir de n'importe quel sommet et parcourir les arêtes dans n'importe quel ordre, ce n'est pas le cas pour un cycle. Il faut réfléchir en amont et anticiper ses déplacements sur le graphe car la solution n'est pas toujours possible en partant de n'importe quel sommet.

Une fois le fonctionnement compris, les élèves prennent plaisir à essayer de trouver « **le** cycle » que les autres n'ont pas encore débusqué !

Nous passons à l'**activité 4** pour laquelle quatre graphes sont représentés, et où il faut remplir un tableau récapitulant des degrés pour en déduire une propriété.

Dans les deux dernières colonnes du tableau, on obtient :

Somme des degrés des sommets	Nombre d'arêtes
10	5
12	6
12	6
14	7

Le coefficient de proportionnalité est très vite trouvé car il est relativement simple. Par contre, la formulation par une phrase en français est plus hasardeuse.

L'**exemple 4**, très (trop ?) dirigé, est souvent traité de manière intuitive, sans obligatoirement utiliser la démarche proposée. Les élèves utilisent une méthode de dénombrement directe.
La représentation par un graphe les aide à comprendre ce qu'il se passe.

Cet exemple aurait très bien pu être laissé en narration de recherche, pour terminer sur un exemple comportant un nombre de personnes tel qu'un graphe n'aurait pas pu être dessiné.

La partie **exercices** n'est traitée que partiellement par la seule classe de cinquième, plus vive et plus rapide. Les résultats obtenus ne sont donc pas significatifs.

5 Troisième séance : graphes planaires

5.a Présentation de la séance

Il s'agit de vérifier, par exploration et expérimentation sur des configurations données, si un graphe est planaire, ou non.
Cette séance est prévue sur une heure et utilise GeoGebra pour la bonne raison que c'est le logiciel qu'ils ont l'habitude de voir en classe et que quelques élèves ont déjà téléchargé chez eux (deux logiciels de géométrie dynamique sont présents sur les postes : GeoGebra et CaRMetal).

Pour cela, chaque élève dispose d'un feuille format A4 (voir page suivante) sur laquelle sont indiqués :

1. la définition du graphe planaire,
2. un exemple,
3. une activité, le coeur même de la manipulation par les élèves de l'outil informatique,
4. un problème utilisant les graphes.

Concernant la manipulation (activité), quatre graphes sont représentés, les élèves doivent pour chacun d'eux :

- placer les sommets,
- construire les arêtes,
- déplacer les sommets afin de voir si l'on peut « démêler » le graphe.

Compte tenu du contexte informatique du collège concernant les classes de sixième et quatrième, cette séance informatique sera collective à l'aide d'un vidéo projecteur dans ces deux classes.
Elle sera donc effectuée sous cette forme seulement avec la classe cinquième. C'est la première séance d'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique en salle informatique cette année scolaire.

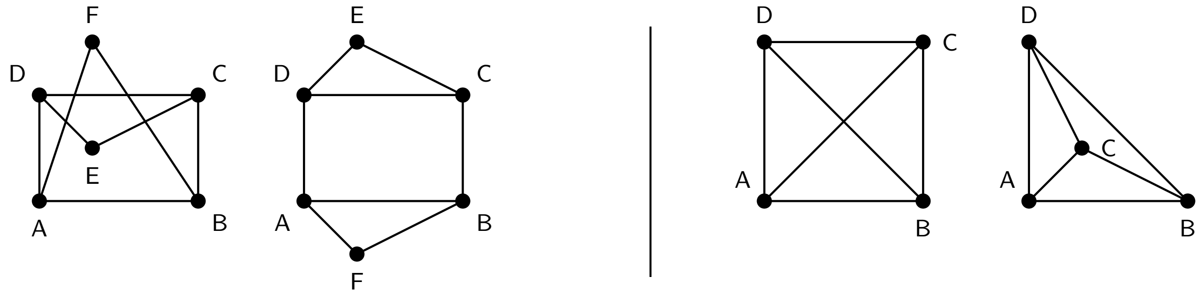
Résumé de la séance

- **Durée de la séance :** une heure.
- **Connaissances mathématiques :** graphe, sommet, arête.
- **Notion abordée :** graphes planaires.
- **Outils utilisés :** poste informatique + logiciel de géométrie dynamique.

III. Graphes planaires

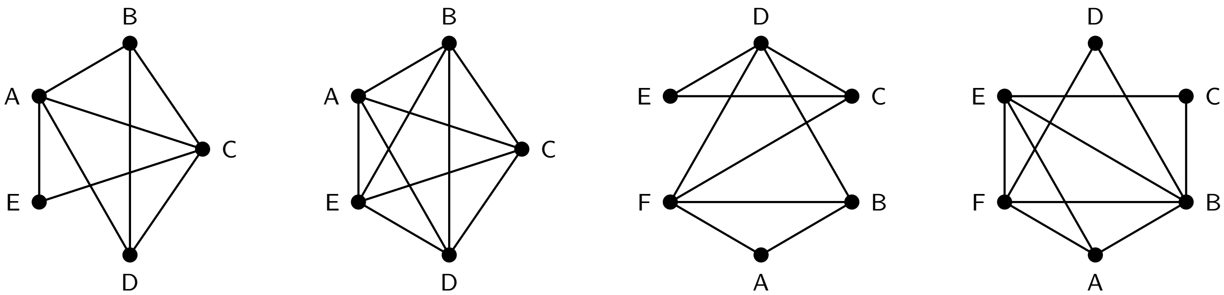
Définition 4
Un graphe ***planaire*** *est un graphe qui peut être dessiné dans le plan sans que ses arêtes ne se coupent.*

Exemple 5



On déplace les sommets E et F de manière à ce que le graphe 1 soit « démêlé ». (le point C dans le second graphe).

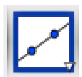
Activité 5
Les graphes suivants sont-ils planaires ?



Planaire	Planaire	Planaire	Planaire
Non planaire	Non planaire	Non planaire	Non planaire

Pour cela, nous allons utiliser un logiciel de géométrie dynamique :

- ☞ Placer les sommets en sélectionnant le bouton « Point » : 
- ☞ Placer les arêtes après sélection du bouton « Segment » : 

du menu 
- ☞ Déplacer les sommets en sélectionnant auparavant le « Pointeur » : 

Le coin du matheux 1
Trois familles de fermiers veulent chacune un chemin de leur ferme à la rivière, un chemin de leur ferme au moulin et un chemin de leur ferme au village.

1. (a) Combien y aura-t-il de chemins au total ?
   (b) Donner un exemple de graphe représentant cette situation.
2. Le problème, c'est que ces trois familles se détestent et ne doivent surtout pas se croiser, sous peine de bagarre !
   (a) Est-il possible de construire ces chemins de telle sorte qu'aucun ne se croise ?
   (b) Sinon, trouver une situation où l'on a un maximum de chemins. Combien en trouve-t-on ?
3. (a) Imaginez une solution pour que chacun des fermiers aie tout de même ses trois chemins.
   (b) Que remarquez-vous ?

5.b Analyse a priori

La manipulation proposée, quoique nouvelle, n'est pas très difficile. Pour cette raison, seuls les outils du logiciel sont donnés mais les manipulations ne sont pas détaillées afin de laisser un peu de liberté aux élèves.

Pour chacun des quatre graphes, chaque action effectué par l'élève est validée par l'enseignant (modélisation du graphe initial, puis du graphe final). On peut éventuellement leur demander le nombre minimum de mouvements à effectuer afin d'obtenir un graphe planaire dans les cas où ceci est possible.

Quelles sont les questions que les élèves peuvent se poser ?

Il y a les questions de type « fonctionnel » :

1. Où doit-on placer les points ?
2. Comment faire un segment ?
3. Comment déplacer un point ?
4. Comment faire lorsqu'un graphe est terminé pour passer au suivant ?

Et les questions de type réflexion comme « Comment savoir s'il y a impossibilité d'avoir un graphe planaire ? »

Pour les élèves les plus rapides, l'activité « Le coin du matheux 1 » est à leur disposition, à effectuer sur papier ou/et grâce à un logiciel, au choix.
L'exercice n'est pas forcément aisé, l'objectif est de voir jusqu'où les élèves sont capables d'aller, et s'ils arrivent à transposer une notion mathématique à une application concrète.

5.c Analyse a posteriori

Pour le séance en salle informatique, 17 postes sont disponibles pour 27 élèves. Certains décident de travailler seuls, d'autres en binômes.
Tous les élèves sont déjà allés en salle informatique et n'ont aucune difficulté à entrer sur leur session.
Dans l'ensemble, ils sont autonomes et trouvent seuls le logiciel approprié.
Néanmoins, sur certains postes, le lien GeoGebra est corrompu, ou le programme a été effacé. Je leur propose donc de travailler avec CaRMetal.

Si l'on reprend la liste de questions de l'analyse a priori, il y a beaucoup de divergences entre les questions pressenties et la réalité :

1. Où peut-on placer les points ?
   Étonnamment, personne ne s'est posé la question... Le changement de cadre (passage de l'outil papier-crayon à l'outil informatique) montre que les rapports aux objets sont différents. En effet, dans le cadre du « papier-crayon », les élèves ont l'habitude de travailler avec des mesures, alors que dans un environnement informatique, cette notion de mesure semble inexistante.

2. Comment faire un segment ?
   Aucune question non plus sur ce point. En revanche, en vérifiant, on peut remarquer que certains élèves tracent des droites à la place des segments, ou encore des triangles en rejoignant trois points.

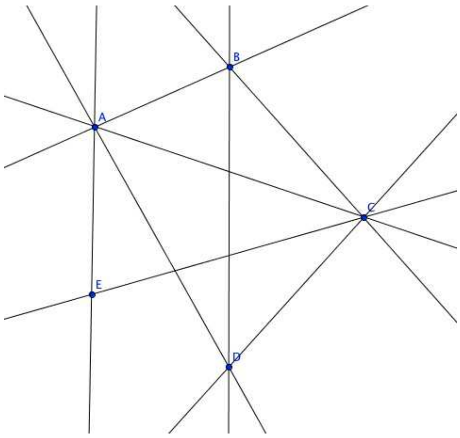
3. Comment déplacer un point ?
   Tous maitrisent ce point également.

4. Comment faire lorsqu'un graphe est terminé pour passer au suivant ?
   Enfin, une question posée telle quelle par les élèves !
   Le simple fait d'ouvrir une nouvelle feuille les gêne car ils n'ont plus la précédente figure sous les yeux. À noter que certains font deux graphes sur la même feuille afin « d'aller plus vite » : ceci leur permet de montrer deux graphes en même temps. Malgré le changement de support, les élèves gardent donc leur façon « papier-crayon » de gérer l'environnement.
   Un binôme fait les deux mêmes graphes afin d'en faire un chacun : c'est l'occasion de leur demander de travailler plutôt en collaboration, leur difficulté étant de se partager les tâches !
   Là aussi, le changement de support est intéressant dans le sens où la participation individuelle des élèves est accrue : lors d'un travail en classe en petits groupes, même si la recherche s'effectue à plusieurs, le compte rendu est souvent l'œuvre d'une seule personne alors que l'aspect ludique de l'informatique les pousse à « rendre chacun leur copie ».

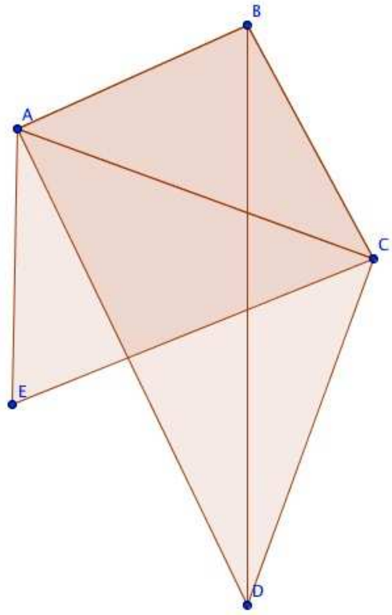
Concernant la question de savoir s'il y a impossibilité d'avoir un graphe planaire, les élèves sont bloqués et pensent ne pas y arriver, ils ne conçoivent pas forcément que c'est impossible (même si la question est de savoir si un graphe est planaire ou non), et ils imaginent qu'ils n'ont pas trouvé la solution.
C'est au moment où ils se posent la question de savoir si la solution existe qu'ils en déduisent que le graphe n'est pas planaire.
En revanche, lorsqu'ils veulent savoir « Pourquoi tel graphe n'est pas planaire ? », ou encore « Comment on peut savoir qu'un graphe est planaire ? », je n'ai aucun réponse à leur apporter à leur niveau.
Nous sommes ici dans un constat de rupture du contrat didactique, dans le sens où ce que l'on demande aux élèves n'a pas nécessairement de solution exploitable.

Pour les groupes ayant utilisé CaRMetal, aucun problème de prise en main. L'appropriation de l'interface du logiciel (assez sensiblement différente de celle de GeoGebra) parait naturelle car les icônes sont immédiatement accessibles sans menu.

Voici quelques copies d'écran d'élèves. Les deux premières montrent que les élèves n'ont pas trouvé l'outil « segment » situé dans un sous-menu du menu « droite passant par deux points ». Une solution est cependant trouvée :

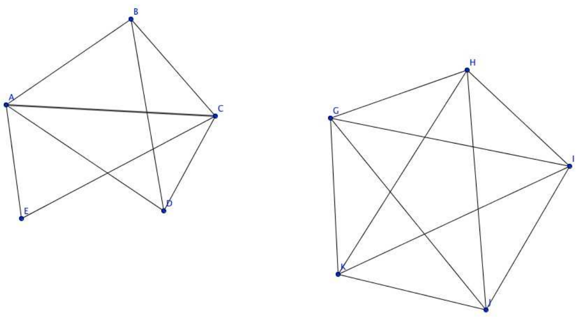


Anaïs construit un graphe... à l'aide de droites.

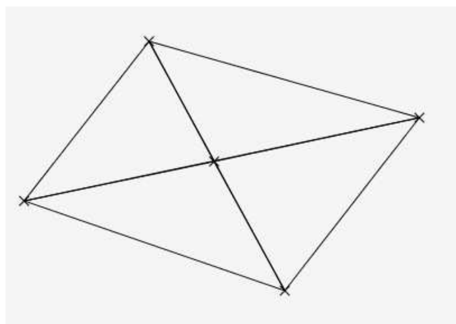


Soundary et Samia utilisent des triangles pour former les arêtes du graphe.

Les copies suivantes relèvent d'une certaine réflexion des élèves, soit en terme de gain de temps, soit en terme de solution :



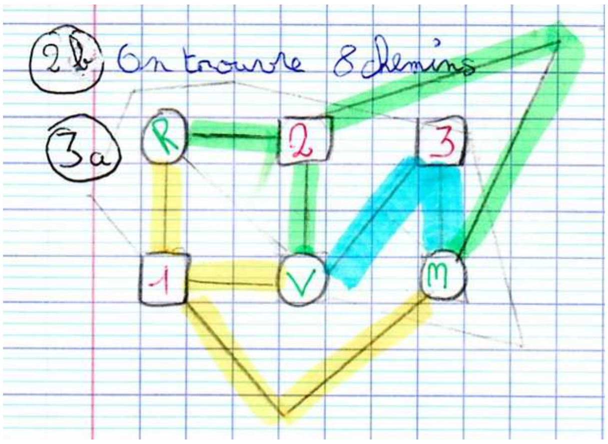
Edjmal et Istékidou proposent d'être validés sur deux graphes à la fois pour gagner en vitesse.



Nathan et Orian pensent avoir trouvé la solution au deuxième graphe en confondant certaines arêtes.

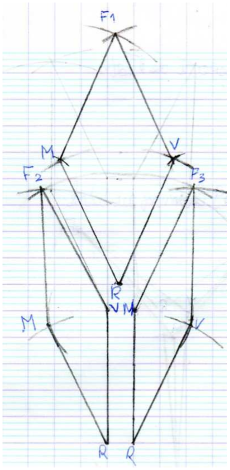
La résolution du problème des trois fermes sera faite à la maison, les élèves n'ayant pas eu le temps de le faire en classe. Quelques indications leur sont proposées : par exemple, ils peuvent commencer à dessiner trois fermes ainsi que les trois lieux que sont la rivière, le moulin et le village. Ensuite, à eux d'élaborer leurs propres expérimentations.

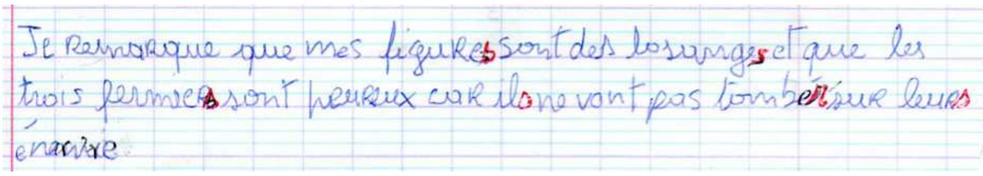
En sixième, peu de réponses bien formulées (ou plutôt bien représentées), les élèves semblent ne pas avoir très bien compris les consignes, surtout dans la deuxième question.
Un élève cependant simplifie les trajectoires en « déplaçant » une ferme, mais il ne propose pas la solution dans la bonne question !



Jordan propose une solution en utilisant huit chemins.

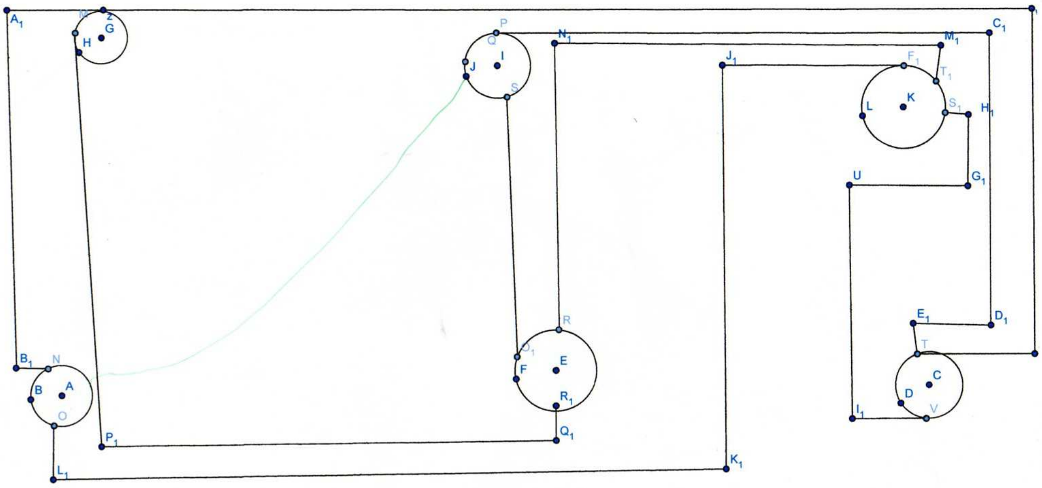
En cinquième, un peu plus de recherche. On retrouve une solution « dissociée » tout comme dans la première séance (activité 2).





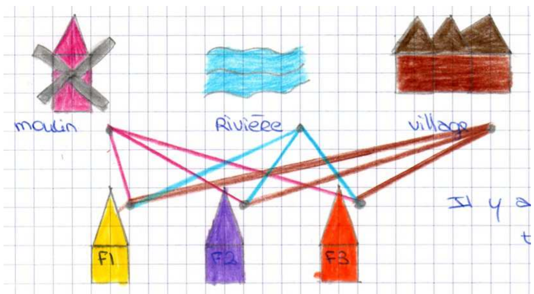
Fahad dessine la situation pour chacune des fermes. On retrouve chez cet élève (par ailleurs l'un des meilleurs de la classe), une représentation sous forme de losanges, comme si la situation n'était pas assez « mathématique ».

Une élève a fait la représentation sous GeoGebra (chez elle, ce qui sous-entend qu'elle a fait l'effort de le télécharger) et l'a imprimée. Cette même élève n'étant pourtant pas, d'habitude, toujours très consciencieuse dans son travail.

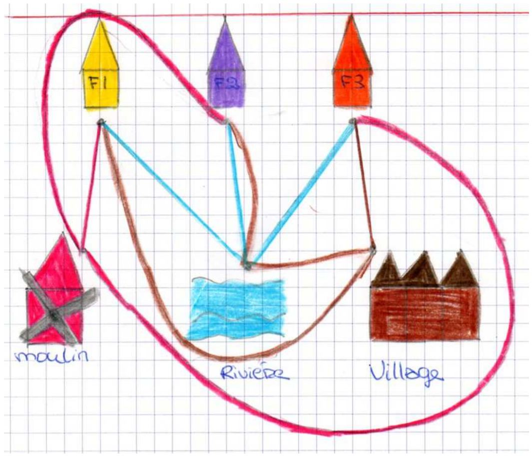


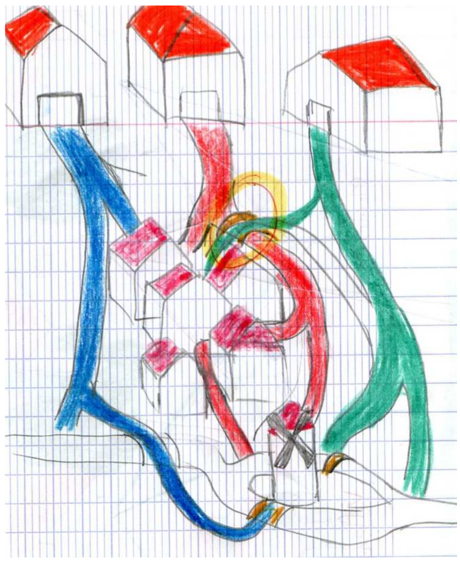
Emeline propose une version GeoGebra, avec huit chemins. Le chemin « manquant » est indiqué au stylo vert.

Enfin, en quatrième, dans la globalité de jolis dessins représentant bien la situation :



Karen nous montre sa solution pour les deux premières questions.





Romain est le seul élève ayant pensé à utiliser des ponts.

Pour conclure, le fait de pouvoir modéliser ainsi une notion qu'ils avaient manipulée auparavant seulement sur papier permet de donner du sens, et notamment au fait qu'un graphe ne soit pas une « figure figée », mais bien un ensemble de points muni de relations entre eux.

Cependant, le choix d'un travail sur les graphes planaires n'était peut-être pas si pertinent en l'absence d'un critère exploitable en collège pour les graphes non planaires. D'ailleurs, cette partie n'existe pas non plus en terminale ES.

6

Quatrième séance : graphes et chemins

6.a Présentation de la séance

La séance abordée concerne les chemins, et en particulier les chaînes et cycles eulériens.

Elle commence avec une activité ludique : est-il possible de dessiner une figure sans jamais lever le crayon ?

Puis, le fameux problème des ponts de Königsberg est abordé, ceci amenant à la définition d'une chaîne et d'un cycle eulérien.

Une question est ensuite posée : certains graphes peuvent-ils être tracés en une seule fois ? A-t-on un moyen pour le savoir à coup sûr ?
Afin d'élaborer une démarche, chaque élève teste une certain nombre de graphes. Il dispose d'une pochette transparente et d'un feutre effaçable. L'objectif est de trouver un « chemin » permettant de tracer les graphes en une seule fois, sans jamais repasser deux fois par la même arête.

Cette activité permet également de remplir un tableau menant au débat collectif sur les conditions d'existence d'une telle chaîne ou d'un tel chemin.

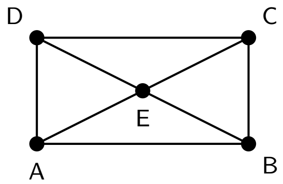
Enfin, on se pose la question de l'existence (ou non) d'une promenade autour des ponts de Königsberg.

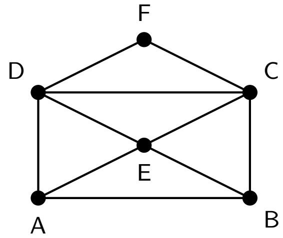
Résumé de la séance

- **Durée de la séance :** une heure.
- **Connaissances mathématiques :** degré, sommets, chaîne, cycle, parité.
- **Notion abordée :** graphes eulériens.
- **Outils utilisés :** pochette transparente + crayon effaçable.

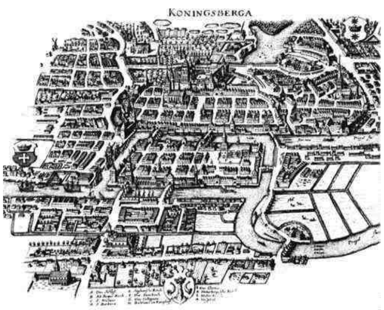
IV. Graphes et chemins

Activité 6
Peut-on dessiner l'enveloppe suivante (ouverte ou fermée) sans lever le crayon et en passant une et une seule fois sur chaque trait ?

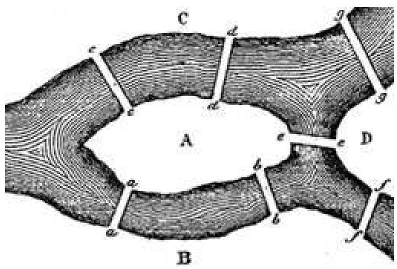




Un peu d'histoire ...
Au 18^{e} siècle, un casse-tête est populaire chez les habitants de Königsberg (appelée plus tard Kaliningrad, Russie) : est-il possible de se promener dans la ville en ne passant qu'une et une seule fois par chacun des sept ponts de Königsberg ? C'est le célèbre mathématicien Léonard Euler (1707-1783) qui résout le premier ce problème, en utilisant pour la première fois la notion de graphe.



Ancien plan de Königsberg



Plan de la rivière

Graphe

Définition 5
*Une **chaîne eulérienne** est une chaîne composée de **toutes** les arêtes prises **une et une seule fois**.*
*Un **cycle eulérien** est un cycle composé de **toutes** les arêtes prises **une et une seule fois**.*
*Un graphe possédant un cycle eulérien est un **graphe eulérien**.*

Exemple 6
Les graphes page suivante peuvent-il être tracés en une seule fois ?

Activité 7
En utilisant les graphes de l'exemple 6, compléter le tableau suivant :

	Graphe 1	Graphe 2	Graphe 3	Graphe 4	Graphe 5	Graphe 6	Graphe 7
Degré de A							
Degré de B							
Degré de C							
Degré de D							
Degré de E							
Nombre de sommets d'ordre pair							
Nombre de sommets d'ordre impair							
Chaîne eulérienne ?							
Cycle eulérien ?							

Peut-on émettre une conjecture ?

Propriété 2

– Un graphe possède une chaîne eulérienne si et seulement si ....

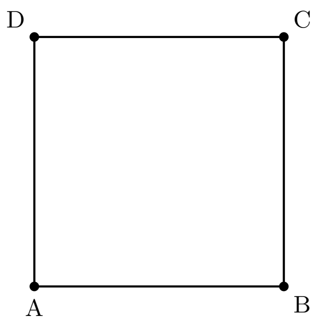
....

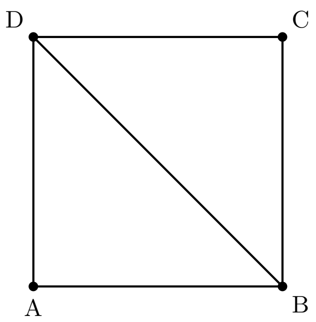
– Un graphe possède un cycle eulérien si et seulement si ....

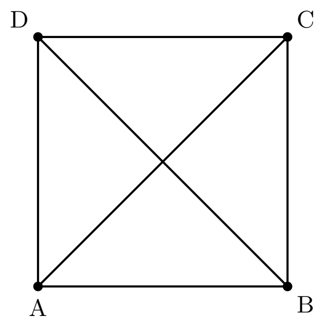
Le coin du matheux 2

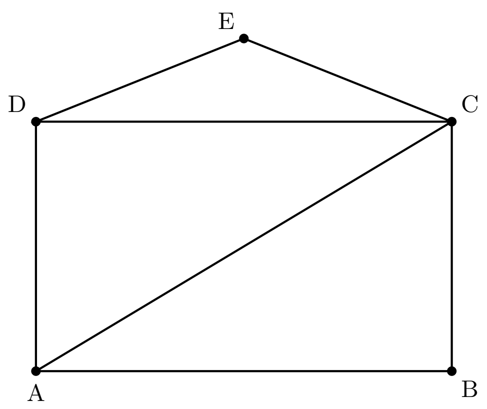
La promenade de Königsberg existe-t-elle ? ....

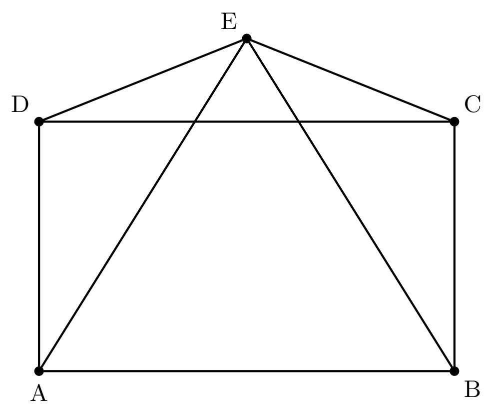
À l'aide d'une pochette transparente et d'un feutre effaçable, dire pour chacun des dessins suivants si l'on peut les tracer en une et une seule fois sans lever le crayon (si cela est possible, numéroter les arêtes dans l'ordre).

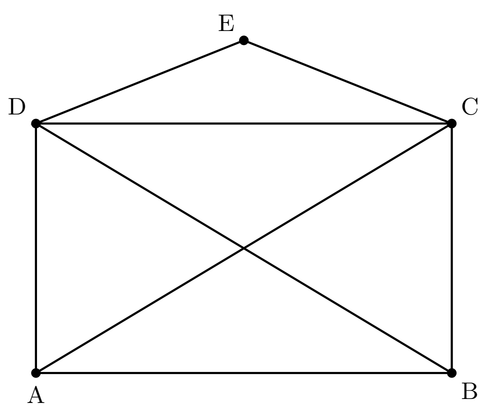


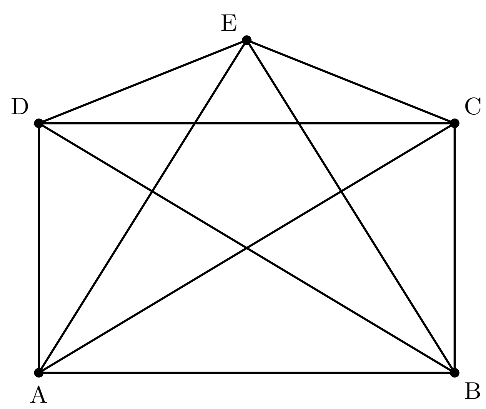








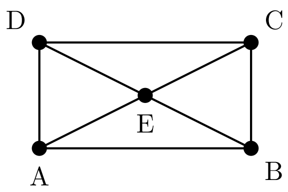


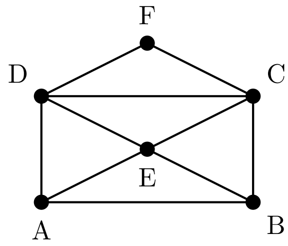


6.b Analyse a priori

Avec cette séance, on aborde de vraies questions mathématiques, avec des réponses mathématiques :
« Est-il toujours possible de trouver un chemin permettant de parcourir toutes les arêtes d'un graphe une et une seule fois ? »

Activité 1 : « Peut-on dessiner l'enveloppe suivante sans lever le crayon et en passant une et une seule fois sur chaque trait ? »





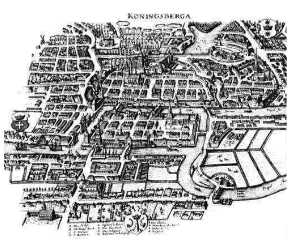
Cette activité d'introduction est une activité de dévolution qui doit permettre de captiver l'attention des élèves sur un aspect mathématique en utilisant un dessin. Les élèves doivent réfléchir, pour l'instant sans outil mathématique spécifique, tout simplement en essayant, de trouver un chemin permettant dans les deux cas de dessiner les figures.

C'est l'occasion d'étudier la manière dont les élèves appréhendent ce type de problème : au hasard ? En réfléchissant ? Par tests successifs ?

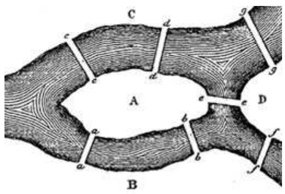
Comment vont-ils réagir au fait que le premier n'est pas possible ? Comment s'en apercevoir facilement ?

Le **rappel historique** qui suit permet de mettre la naissance des graphes dans leur contexte : on montre ainsi l'utilité des mathématiques dans le but de résoudre un vrai problème de la vie courante.

Cette partie doit permettre aux élèves de distinguer différentes représentations d'un même lieu : le passage de l'ancien plan au plan de la rivière dans un premier temps.



Ancien plan de Königsberg



Plan de la rivière

Afin de mieux en comprendre la construction, il est demandé aux élèves de distinguer sur le plan de la ville la rivière (en la traçant en bleu par exemple), ainsi que les différents ponts de la ville.
Ils peuvent également faire le lien avec avec les noms donnés aux ponts (a, b, c, d, e et f) et ainsi utiliser ces deux plans dans les deux sens.

Dernière étape, construire le graphe correspondant aux différents secteurs de la ville (A, B, C et D) et des ponts qui jalonnent la rivière.
C'est le passage d'un plan « réel » à une représentation mathématique plus simple. Ici encore, comment les élèves vont-ils représenter ce graphe ? Vont-ils penser à représenter **tous** les ponts ? Comment gérer deux ponts accédant aux mêmes quartiers de la ville (par exemple entre A et C) ?

Après la **définition 5** d'une chaîne et d'un cycle eulérien, on passe de manière plus concrète dans le thème de cette séance : les élèves possèdent sept graphes différents qu'ils doivent tracer en une seule fois (**Exemple 6**).

Pour ce faire, aucune théorie n'étant pour l'instant donnée, ils doivent tester des chemins. Dans le meilleur des cas, ils arriveront à trouver directement la solution. Dans d'autres cas, il y arriveront au bout de quelques essais, et dans d'autres cas, il ne pourront pas trouver de solution pour la bonne raison que trouver un tel chemin n'est pas possible !

Les élèves n'aiment pas, en général, faire des erreurs : l'utilisation du crayon de papier, surtout chez les plus jeunes, le montre.
Dans cette activité, ils ont « le droit de se tromper » en utilisant une pochette transparente dans laquelle ils glissent leur fiche.
Grâce a un crayon effaçable et un chiffon (un morceau de papier essuie-tout, un mouchoir, un morceau de tissu. . .), ils peuvent alors chercher, effacer, puis laisser la trace de leur réponse sur la pochette transparente lorsqu'ils en sont satisfaits.

Le premier graphe est très simple, et ne demande aucune réflexion, cela permet de mettre en place l'activité.

Lorsqu'une solution existe, on peut imaginer que les élèves finiront par la trouver. En revanche, deux des sept graphes ne sont pas possibles à dessiner sans lever le crayon. Jusqu'où les élèves vont-ils pousser leurs investigations dans ce cas ?

Une fois le chemin trouvé (ou non), il leur est demandé d'écrire l'ordre des arêtes en notant chacune d'elle par son rang d'apparition. Cela permettra par la suite de comparer les solutions obtenues et de voir qu'il n'y a pas unicité de la solution.

Après un retour collectif, chaque élève indique sur sa feuille de papier initiale l'ordre d'apparition des arêtes pour son dessin personnel en retirant la feuille de la pochette transparente et en s'en servant comme brouillon, la trace restant sur la pochette.

Tout ceci a bien sûr un objectif : en déduire des conditions nécessaires et suffisantes quant à l'existence d'une chaîne ou d'un cycle Eulérien.

La derrière **activité (7)** de la séance doit permettre justement de trouver ces conditions. À priori, cette partie aurait pu se faire dans le cadre d'un problème ouvert, mais la tâche est ardue et le temps compté.
L'utilisation du tableau permet de mettre les élèves sur la voie en leur faisant indiquer le degré de chaque sommet, le nombre de sommets d'ordre pair et impair, et la présence ou non d'une chaîne ou d'un cycle eulérien.

Le nombre d'exemples n'étant pas forcément significatif, le compte rendu sera fait collectivement. La difficulté ici est de faire le tri entre toutes les informations récoltées : doit on considérer les degrés des sommets ? Le nombre de sommets pairs ou impairs ? Quel lien peut-on trouver ? Comment l'expliquer ?

Une fois la **propriété 2** établie, la résolution du problème des ponts de Königsberg est triviale.

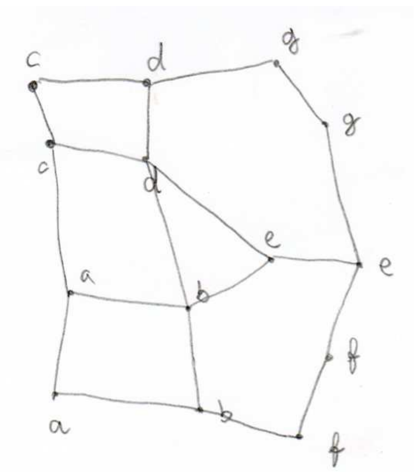
6.c Analyse a posteriori

Activité 6 : la « lettre ouverte » peut être dessinée sans lever le crayon, les élèves le voient assez rapidement. La « lettre fermée », impossible à dessiner en une seule fois pose plus de problèmes aux élèves : ils ont l'impression un instant d'être en échec car il n'y arrivent pas, et sont presque soulagés lorsque je leur annonce qu'il est normal qu'il n'y arrivent, puisque c'est impossible !
Certains sont sûrs d'avoir trouvé une solution malgré tout. Ils sont invités à venir nous la montrer au tableau ce qui se traduit bien évidemment par un échec.
Le fait même d'essayer de trouver cette solution malgré tout montre bien qu'ils ne sont pas encore en possession de la justification, mais qu'ils ont envie de la connaitre.

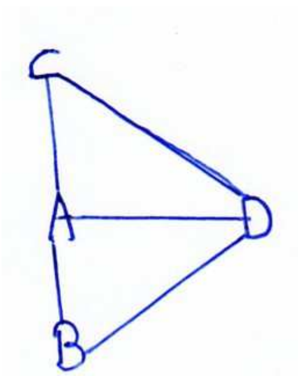
Les élèves semblent quelque part frustrés par le fait de ne pas savoir les raisons pour lesquelles ils peuvent ou pas dessiner la lettre.
L'impression qu'ils donnent est qu'ils perçoivent le fait qu'une propriété mathématique existe, mais que celle-ci est d'une nature différente de ce qu'ils connaissent.

Vu le questionnement des élèves, il aurait été plus judicieux de placer la lettre ouverte à gauche et la lettre fermée à droite pour commencer par une réussite et ensuite se poser des questions sur la lettre fermée.

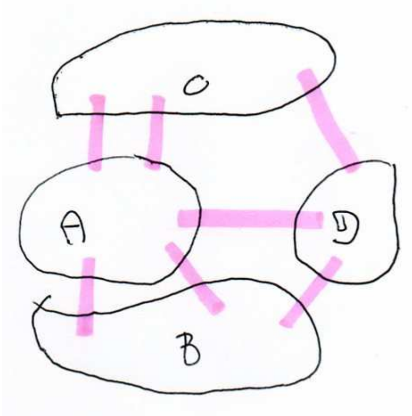
Un peu d'histoire : le passage du plan de la ville au plan de la rivière provoque quelques difficultés de représentation. Parmi les erreurs rencontrées, voici quelques graphes « originaux » :



Lucas, 5e, propose un sommet par extrémité de pont.



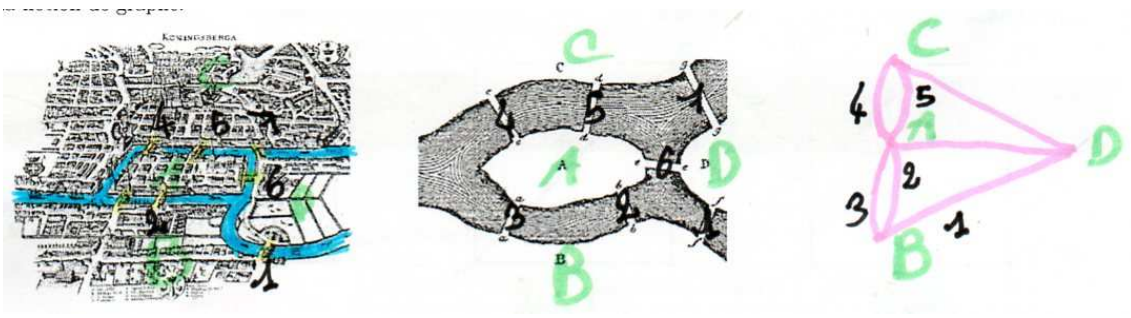
Leeana, 6e, oublie les ponts reliant les mêmes secteurs de la ville.



Chloé, 4e, recopie le plan en remplaçant les quartiers par des sommets et les ponts par des arêtes d'une manière très personnelle !

- **Lucas** reprend le plan de la rivière, mais il a du mal à faire son choix parmi la multiplicité des informations (nombre de lettres). Le dessin en lui même fait apparaître les arêtes (les ponts), il choisit donc d'indiquer dans son graphe les extrémités des ponts et d'y ajouter quelques chemins entre eux.
- **Leeana** oublie les ponts qui apparaissent en double. Il est vrai que, jusque là, nous n'avions jamais parlé d'arête multiple, et toujours représenté les arêtes sous forme de segments. Elle n'est donc pas sensée savoir comment les représenter. Il est même possible que, par exemple, l'arête menée de C à A corresponde pour elle à deux chemins superposés…
- **Chloé** n'arrive pas à se détacher du plan de la rivière et le « recopie ». Malgré tout, sa représentation est en soit très intéressante, puisque les sommets, les arêtes et les relations apparaissent tous.

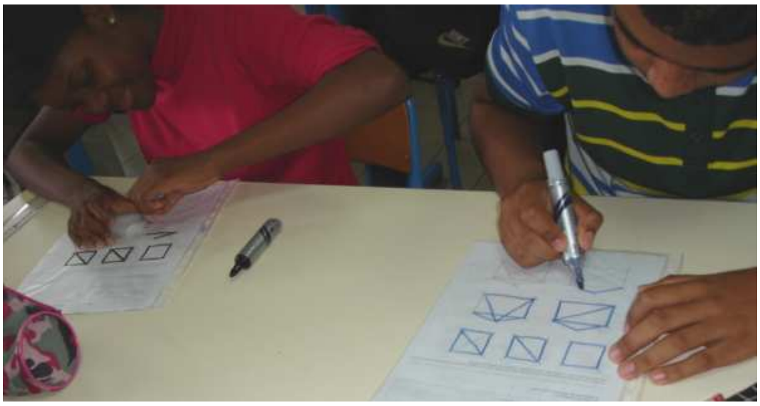
On se rend compte grâce à la copie de Fabien, 4^e, de l'organisation différente des lieux suivant la représentation. Et il faut admettre que le passage du plan de la ville au graphe directement est très intéressant, mais demande néanmoins un certain recul.



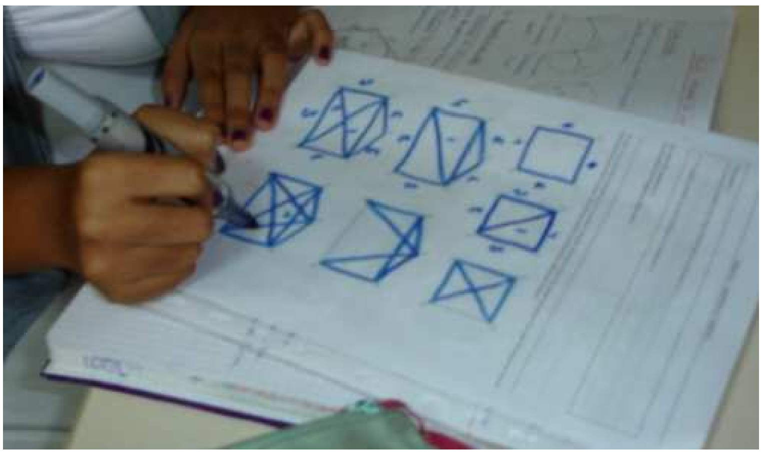
Exemple 6 : l'activité avec pochette transparente rencontre un franc succès. Le changement de contrat didactique (on a « le droit » de se tromper, car on peut effacer et recommencer tant que l'on veut) ici est bénéfique : ils font quelque chose dont ils n'ont pas forcément l'habitude, et ont le droit à l'erreur.
Ils peuvent tester et re-tester des chemins jusqu'à trouver la bonne solution. Une fois trouvée, ils notent l'ordre des arêtes sur la pochette transparente.

De plus, la difficulté n'est pas extrême, mais le défi aiguise la curiosité des élèves : « Vais-je réussir à trouver une solution ? »

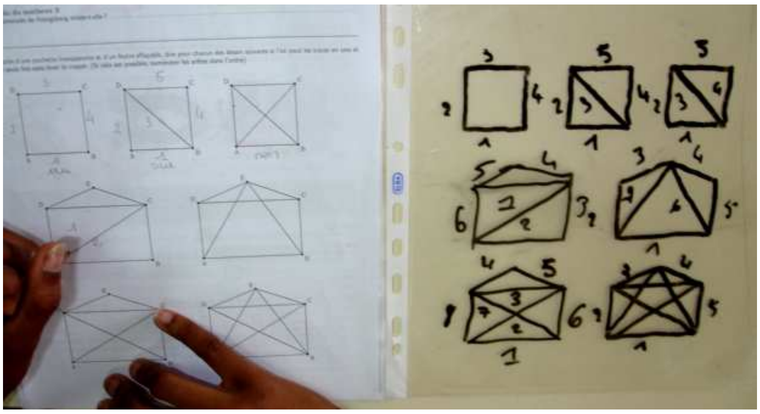
- **Première étape :** tester des chemins, effacer et recommencer si nécessaire.



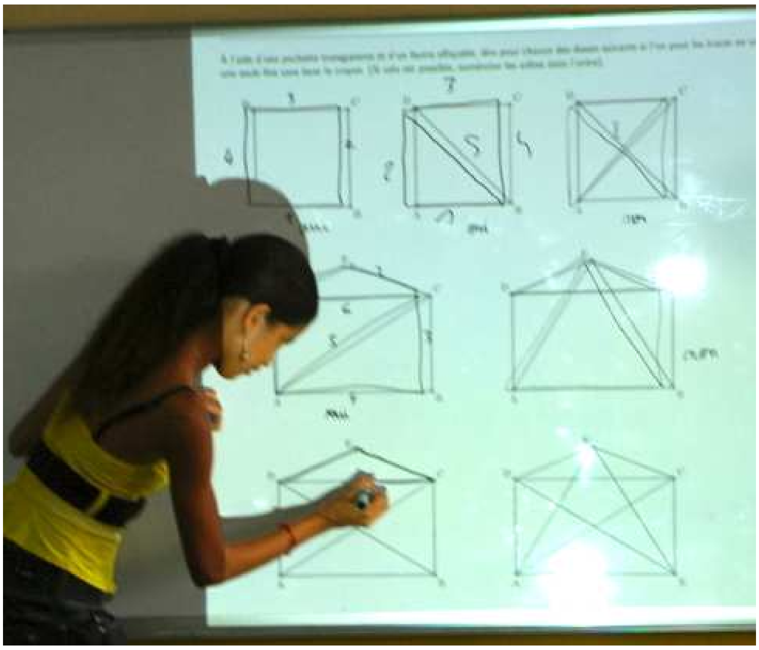
- **Deuxième étape :** numéroter les arêtes. À noter que cette étape aurait dû être faite en même temps que la première, mais, l'aspect ludique ayant dominé, les élèves ont oublié dans un premier temps cette étape.



- **Troisième étape :** recopier le « brouillon de recherche » sur la feuille initiale en sortant la feuille de la pochette.



- **Quatrième étape :** retour collectif. Certains élèves proposent leur solution, d'autres possèdent une autre solution, preuve de la non unicité du chemin. Quelques élèves se posent même la question du nombre de solutions.



Activité 7 : l'objectif est d'essayer de trouver une relation entre le nombre de sommets d'ordre pair et impair et l'existence ou non d'un chemin ou d'un cycle eulérien.

La phrase « Nombre de sommets d'ordre pair/impair » est difficilement comprise au premier abord.
La proximité de « nombre » et « d'ordre » (qui est aussi un nombre !) provoque dans un premier temps une sucharge cognitive. La notion de « parité », qui n'est pas toujours bien assimilée, ajoute également un poids à cette surcharge.

De ce fait, certains élèves n'arrivant pas à en comprendre le sens, tombent dans la facilité de demander sans réfléchir ou de ne rien faire. Cette surcharge cognitive dégrade peu a peu la dévolution du problème qui redevient une situation dans laquelle les élèves se replacent dans un contrat didactique standard d'attente de la solution.

Une fois l'exemple du graphe 1 fait ensemble, cela ne pose plus de problème, preuve que ce n'était pas l'aspect mathématique qui était mis en cause, mais bien la compréhension de l'énoncé (comme souvent d'ailleurs !).

Voici les résultats obtenus pour les quatre dernières lignes :

	Gphe 1	Gphe 2	Gphe 3	Gphe 4	Gphe 5	Gphe 6	Gphe 7
Nombre de sommets d'ordre pair	4	2	0	3	1	3	5
Nombre de sommets d'ordre impair	0	2	4	2	4	2	0
Chaîne eulérienne ?	oui	oui	non	oui	non	oui	oui
Cycle eulérien ?	oui	non	non	non	non	non	oui

Le passage à la conjecture est très difficile, et par manque de temps, je leur donne d'emblée quelques pistes de réflexion.
Ici, le contrat d'aller au bout d'une situation socio-constructiviste construite avec précision n'est pas rempli. La difficulté de la séance n'a donc pas été suffisamment prise en compte dans l'analyse a priori. Il aurait certainement fallu, par exemple, prévoir des questions intermédiaires afin de laisser aux élèves l'opportunité de trouver par eux même la solution.

Nous continuons donc sur un débat collectif, beaucoup plus dirigé.
C'est aussi l'occasion de revenir sur l'imbrication du sens de chaîne et cycle : si on a un cycle eulérien, **alors** on a une chaîne eulérienne (particulière).
Nous avons deux noms dont l'un est un cas particulier de l'autre. Ce lien est intéressant. Le vocabulaire a souvent pour eux un sens strict : un rectangle ne peut pas être un carré puisque c'est... un rectangle ! Et pire, comment un carré peut-il être à la fois un losange **et** un rectangle ?
En effet, les élèves voient ces figures comme des « formes » et pas comme des figures ayant certaines propriétés.

Le cas du cycle eulérien est relativement bien conjecturé : « Il faut un 0 dans le nombre de sommets d'ordre impair », que l'on traduit par « Tous les sommets sont d'ordre pair. »
Le cas de la chaîne est plus complexe par la diversité des résultats obtenus. Le faible nombre de cas traités n'est pas non plus suffisant pour faire émettre de vraies déductions.
Par exemple, certains affirment « On n'a pas de chaîne eulérienne lorsqu'il y a quatre sommets d'ordre impair. » Ceci n'est pas faux et même pertinent du point de vue lecture du tableau, mais que se passerait-il si l'on avait cinq, six,... sommets d'ordre impair ?

On effectue donc collectivement une preuve très pragmatique au sens de Balachev, de type empirisme naïf (généralisation après quelques cas).

Voici l'extrait d'un échange en quatrième à ce propos :

Professeur - Si l'on veut un cycle Eulérien, pour chaque sommet, il faut nécessairement un chemin qui y arrive, et un autre qui en repart. Que se passe-t-il pour le point de départ et d'arrivée ?

Élève 1 - C'est le même.

Professeur - Oui, et que peut-on en déduire ?

Élève 1 - Qu'il y a aussi un chemin qui part et un autre qui y arrive.

Professeur - Un seul ?

Élève 1 - Oui !

Professeur - Et si l'on prend l'exemple du graphe 7 ?

Élève 1 - Ah ben... ça marche aussi, donc il faut qu'il y en ait deux qui arrivent et deux qui repartent !

Élève 2 - Ou trois, ou quatre, ou plein ! (qui arrivent et qui repartent).

Professeur - Donc peut-on trouver une règle ?

Pas de réponse

Professeur - Regardez les dernières lignes du tableau...

Élève 2 - Il n'y a pas de sommet d'ordre impair.

Professeur - Et donc ?

Élève 2 - Il n'y a que des sommets d'ordre pair. Ah oui, c'est normal puisqu'il y a toujours un chemin qui arrive et un qui part !!!

Cet échange est intéressant : on remarque au départ que dans un cycle eulérien, le nombre de sommets d'ordre impair est nul.
Lorsque l'on essaie de le démontrer, après quelques phrases, la conjecture est complètement occultée pour laisser place à la réflexion. Voyant que celle-ci a du mal à aboutir, il faut redonner place à ce que les élèves avaient conjecturé au début !

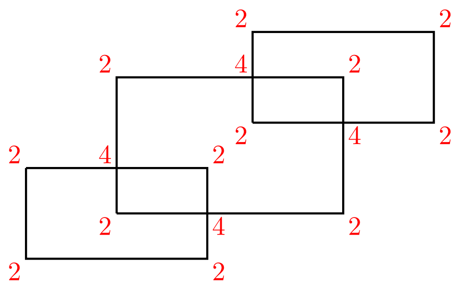
Contrairement à ce que je pensais, le cas de la chaîne n'est finalement pas si difficile à faire comprendre. En reprenant le fil de la discussion précédente, les élèves finissent par trouver ce qui fait la différence avec le cycle : le départ n'étant pas le même que l'arrivée, on peut ajouter à chacun une arête ! ! !

D'où la **Propriété 2**.

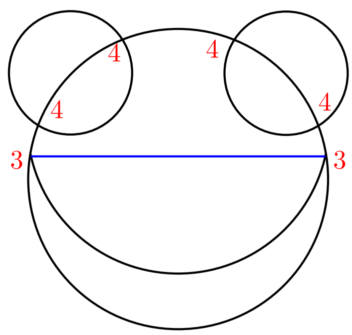
On remarque également que la propriété donne une méthode fiable afin de savoir si un graphe admet une chaîne ou un cycle eulérien, bien sûr, mais aussi une méthode pour construire un tel chemin :

- pour un graphe dont les sommets sont tous d'ordre pair, le cycle peut partir de n'importe quel sommet et parcourir les arêtes dans n'importe quel ordre ;
- pour un graphe dont tous les sommets sauf deux sont d'ordre pair, la chaîne doit nécessairement commencer et finir par un sommet d'ordre impair.

Quelques exemples au tableau permettent de bien mettre en place ces deux critères :

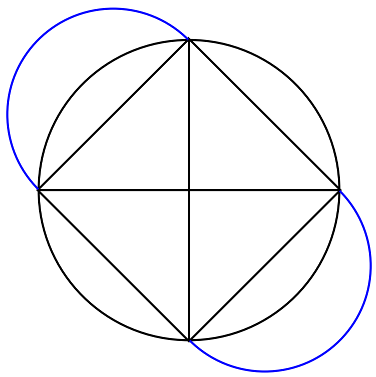


ce graphe ne comporte que des sommets d'ordre pair (2 pour les coins, 4 pour les intersections), il peut donc être dessiné sans lever le crayon en partant de n'importe où ;



ce graphe possède 2 sommets d'ordre impair seulement. On peut donc le dessiner sans lever le crayon en partant de l'un de ces deux sommets.

« Comment le transformer en un graphe eulérien ? »
En ajoutant une arête entre les deux sommets d'ordre impair (en bleu), ce qui les rendra d'ordre pair ;



ce dernier graphe comporte 4 sommets d'ordre impair à chaque sommet du carré, il est donc impossible de la dessiner en une seule fois.

« Comment le transformer en un graphe eulérien ? »
En ajoutant une arête entre deux sommets d'ordre impair, on peut trouver une chaîne eulérienne, et en ajoutant une deuxième arête entre les deux derniers sommets d'ordre impair, on obtient un graphe eulérien (attention toutefois à ne pas créer d'autres croisements !).

Enfin, la réponse au problème des ponts du Königsberg parait maintenant évidente ! ! !

7
Cinquième séance : graphes et couleurs

7.a Présentation de la séance

Dernière séance de la série, elle traite de la coloration des graphes.

Après quelques définitions (colorer un graphe, nombre chromatique), les élèves réfléchissent sur le minimum et le maximum de couleurs à appliquer à une graphe.

Tout d'abord sur des exemples simples comportant cinq sommets au maximum, puis dans le cas général avec n sommets. Ce sera l'occasion d'introduire la notion de graphe complet.

Puis les élèves travaillent en groupes sur une narration de recherche faisant intervenir le dénombrement (compter le nombre d'arêtes dans un graphe complet).

Enfin, nous revenons sur une des applications importantes de la théorie des graphes : la coloration des cartes, et notamment celle de la carte des commune de la Réunion en utilisant l'algorithme de Dijkstra.

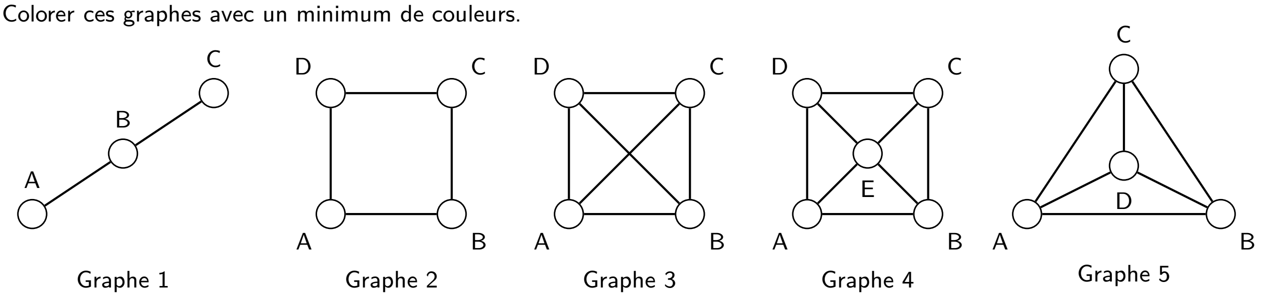
Résumé de la séance

- **Durée de la séance :** 1h30.
- **Connaissances mathématiques :** minimum, maximum, ordre décroissant et alphabétique.
- **Notion abordée :** coloration d'un graphe, nombre chromatique, graphe complet.
- **Outils utilisés :** crayons de couleurs, vidéo-projecteur.

V. Graphes et couleurs

Définition 6
Colorer *un graphe, c'est associer une couleur à chaque sommet de façon que deux sommets adjacents soient colorés dans des couleurs différentes.*

Exemple 7
Colorer ces graphes avec un minimum de couleurs.



Définition 7
*Le **nombre chromatique** d'un graphe est le nombre minimal de couleurs permettant de le colorer.*

Exemple 8
Donner le nombre chromatique de chacun des graphes de l'exemple 6 :

	Graphe 1	Graphe 2	Graphe 3	Graphe 4	Graphe 5
Nombre chromatique					

On peut se poser les questions suivantes :

1. De combien de couleurs, au maximum, peut-on colorer un graphe d'ordre 3 ? ....
2. De combien de couleurs, au maximum, peut-on colorer un graphe d'ordre 4 ? ....
3. De combien de couleurs, au maximum, peut-on colorer un graphe d'ordre 5 ? ....
4. De combien de couleurs, au maximum, peut-on colorer un graphe d'ordre n ? ....
5. Donner un cas pour lequel le nombre chromatique d'un graphe est égal à son ordre : ....

   ....

Définition 8
*On dit qu'un graphe est **complet** lorsque chaque sommet est relié par une arête à tous les autres sommets.*

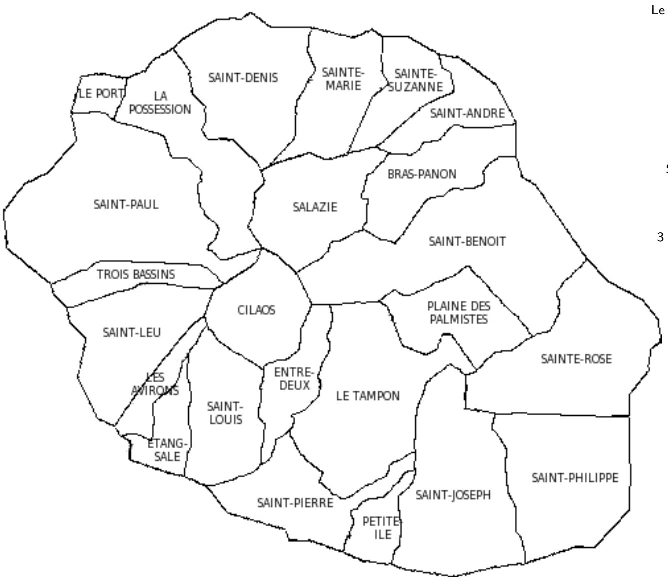
Narration de recherche :

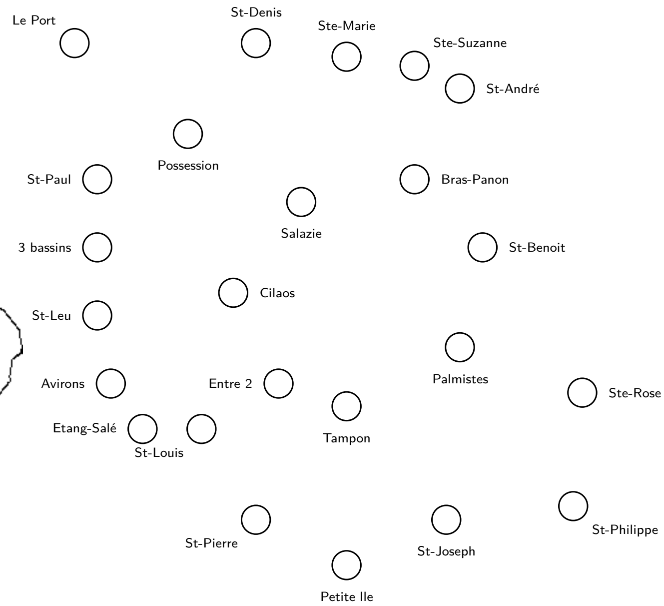
1. Construire le graphe complet à 3 sommets. Combien y a-t-il d'arêtes ?
2. Construire le graphe complet à 4 sommets. Combien y a-t-il d'arêtes ?
3. Construire le graphe complet à 5 sommets. Combien y a-t-il d'arêtes ?
4. Construire le graphe complet à 6 sommets. Combien y a-t-il d'arêtes ?
5. Déterminer une formule donnant le nombre d'arêtes dans un graphe complet à n sommets.

Une application importante de la coloration des graphes a été le problème du coloriage des cartes qui fut posé pour la première fois dans les années 1850 : quatre couleurs suffisent-elles pour colorier une carte de géographie quelconque de façon que deux pays ayant un bout de frontière en commun soient coloriés dans deux couleurs différentes ?
Il ne fut résolu pour la première fois en 1976 par un ordinateur.

Le coin du matheux 3

Le but est de colorier la carte de la Réunion avec un minimum de couleurs . . .





1. À côté de la carte ont été placés les sommets d'un graphe correspondants aux différentes communes de la Réunion. Tracer les arêtes reliant les communes qui ont un morceau de frontière en commun.

2. Compléter le tableau suivant indiquant le degré de chaque sommet :

Les Avirons		Plaine Palmistes		Sainte-Marie		Saint-Paul	
Bras-Panon		Le Port		Sainte-Rose		Saint-Philippe	
Cilaos		La Possession		Sainte-Suzanne		Saint-Pierre	
Entre-Deux		Saint-André		Saint-Joseph		Salazie	
L'Etang-Salé		Saint-Benoit		Saint-Leu		Le tampon	
Petite-Ile		Saint-Denis		Saint-Louis		Trois-Bassins	

3. Classer dans l'orde décroissant des degrés, puis par ordre alphabétique les 24 communes de l'île :

1.		7.		13.		19.	
2.		8.		14.		20.	
3.		9.		15.		21.	
4.		10.		16.		22.	
5.		11.		17.		23.	
6.		12.		18.		24.	

4. Colorer le premier sommet de la liste en rouge.

5. En parcourant la liste dans l'ordre croissant, colorer en rouge tous les sommets qui ne sont pas adjacents au premier sommet, sauf s'ils sont adjacents entre eux.

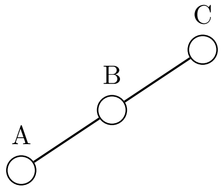
6. On revient en arrière dans le tableau et on s'intéresse au premier sommet de la liste non encore coloré. On le colore en vert puis on colore de la même couleur les sommets non encore colorés qui ne lui sont pas adjacents et qui ne sont pas adjacents entre eux.

7. On revient en arrière comme à la question 6 et on continue ainsi de suite avec la couleur bleue, puis noire.

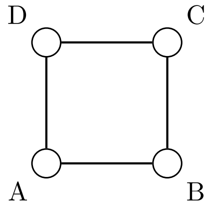
8. En déduire une coloration de la carte d'origine avec quatre couleurs.

7.b Analyse a priori

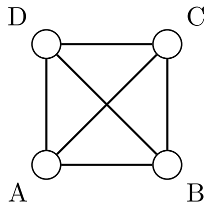
Cette première partie commence avec la coloration de graphes simples en un minimum de couleurs. L'objectif est que les élèves arrivent à trouver ce minimum, et surtout qu'il arrivent à l'expliquer.



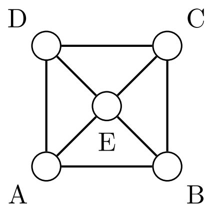
Le premier graphe est simple : bien sûr, on peut le colorer en trois couleurs, et ce n'est pas possible de le colorer en une seule couleur, mais peut-on utiliser deux couleurs ?



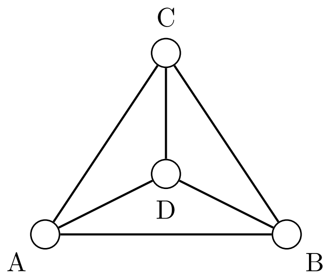
Ce deuxième graphe admet au maximum quatre couleurs. Peut-on faire moins : trois, ou même deux ?



Le graphe 3 est un graphe complet puisque tous les sommets sont reliés entre eux. Donc, obligatoirement, les élèves doivent utiliser autant de couleurs que de sommets.



Contrairement au graphe précédent, le graphe 4 n'est pas complet et pourra être coloré en trois couleurs seulement. L'adjonction d'un sommet n'ajoute donc pas forcément une couleur au graphe



Ce dernier graphe est complet d'ordre quatre, on ne peut donc pas avoir moins de quatre couleurs.

L'ensemble de cet exercice amène à la **définition 7** sur le nombre chromatique. On peut faire remarquer qu'il n'est pas lié directement au nombre de sommets.

Nous ne parlons pas ici d'encadrement du nombre chromatique avec des collégiens. Un cas cependant permet de déterminer directement le nombre chromatique : celui des graphes complets.

Pour amener à cette **définition 8**, on se pose la question de la relation qu'il y a entre le maximum de couleur d'un graphe et le nombre de sommets avec la question suivante :

« De combien de couleurs, au maximum, peut-on colorer un graphe d'ordre $3, 4, 5$ et n ? ».

L'introduction d'une variable doit avoir un effet différent suivant les classes : en 6^e, c'est une nouveauté. En 5^e, nous avons déjà travaillé un peu sur le calcul littéral. En 4^e, le calcul littéral fait complètement partie du programme.

Pour compléter le travail sur les graphes complets, un problème de recherche est proposé aux élèves : en binômes, ils doivent déterminer la formule générale donnant le nombre d'arêtes dans un graphe complet à n sommets en partant des graphes complets à $3, 4, 5$ et 6 sommets.
pour sûr, ce genre de travail est difficile pour des élèves de collège, mais très intéressant : on peut imaginer par exemple une recherche à la maison, une première mise en commun par petits groupes, puis un mixage des groupes afin de mettre au point une solution. Cependant, je pense n'avoir pas beaucoup de temps à y consacrer lors de cette séance. La recherche sera très certainement collective.

Dernière activité : **le coin du matheux 3** et la coloration de la carte de la Réunion en un minimum de couleurs. On utilise pour cela l'algorithme de Welsh et Powell. La tâche est complexe dans le sens où il y a besoin de plusieurs étapes successives. Tout est détaillé sur la fiche élève :

Première étape : construire un graphe représentant les liens entre les communes (liens correspondant aux frontières). Pour ce faire, les sommets sont déjà indiqués. Les élèves vont-ils dessiner les arêtes de manière chaotique, ou vont-ils adopter une règle afin de ne pas en oublier ?

Deuxième étape : déterminer le degré de chaque sommet. Cette étape ne devrait pas poser de problème aux élèves qui commencent à être habitués au terme « degré ».

Troisième étape : classer les communes dans l'ordre décroissant des degrés, puis par ordre alphabétique. Deux petites difficultés dans cette étape : l'ordre décroissant (cette notion de croissance et décroissance n'est pas toujours assimilée, quel que soit la niveau !), et, pour un même degré, l'ordre alphabétique (quoique ici, le tableau de l'étape deux ayant été construit suivant l'orde alphabétique, il ne devrait pas y avoir plus de problème que ça).

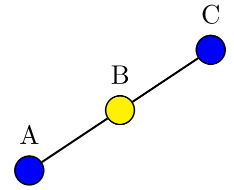
Quatrième étape : application de l'algorithme. Peut se faire collectivement au moins pour le début. On débute par le premier sommet, que l'on colorie en rouge, puis on colorie de la même couleur tous les sommets non adjacents au premier, ni adjacents entre eux, tout ceci en suivant l'ordre établit à l'étape précédente.
Beaucoup d'aller-retour entre la lecture du tableau et le graphe, coloré au fur et à mesure. Il ne faut oublier aucune des conditions et avancer de manière méthodique.

Cinquième et dernière étape : à partir de la coloration du graphe, passer à la coloration de la carte. L'important n'étant pas forcément de colorier chaque commune de la même couleur que le sommet correspondant, mais plutôt de percevoir la notion de « regroupement » de communes d'une même couleur. On vérifie par exemple qu'avec l'algorithme, on obtient les quatre communes Trois-Bassins, Sainte-Suzanne, Plaine des Palmistes et Saint-Pierre d'une même couleur, mais peu importe la couleur !

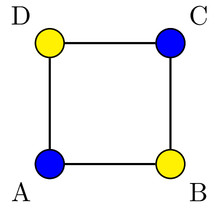
7.c Analyse a posteriori

Exemple 7 : la coloration des graphes de cet exemple introduit quelques erreurs : certains colorient les graphes avec autant de couleurs que de sommets, d'autres utilisent moins de couleurs, mais ne font pas obligatoirement attention aux sommets qui pourraient être adjacents.
Il faut donc à cette étape reprendre quelques définitions (adjacent, colorer un graphe) avant de pouvoir poursuivre.

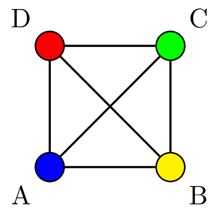
Le premier graphe est fait de manière collective de manière à poser les règles de la coloration : les élèves ont très vite l'idée de commencer à colorer le sommet B du milieu, ce qui est le début de l'algorithme de Dijkstra.



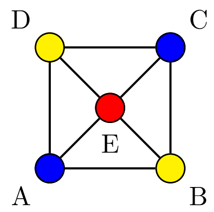
Pour ce graphe, deux cas se présentent : soit deux couleurs sont utilisées, soit quatre. Dans ce dernier cas, le simple fait de demander si l'on ne peut pas « faire mieux » implique une réflexion plus poussée de la part de l'élève, qui trouve rapidement la solution.



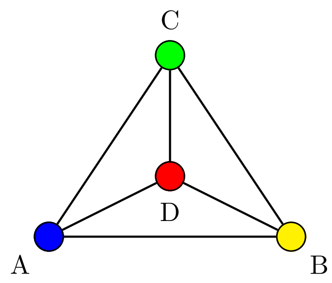
On ajoute deux arêtes au graphe précédent, ce qui en fait un graphe complet. Quelques élèves sont perturbés par le fait que, dans les deux premiers cas, deux couleurs avaient été utilisées seulement. Ils veulent en faire de même ici, ce qui n'est pas possible. Il faut même parfois leur poser explicitement la question « Mais pourquoi ne pas essayer avec une couleur supplémentaire ? »...



Voici le graphe qui a suscité le plus de difficultés car fréquemment, les élèves utilisent le graphe précédent et complètent le dernier sommet. Or, ici, cette méthode mène à une solution erronée puisqu'en ajoutant un sommet, les relations directes entre D et B, et entre A et C sont détruites.



Aucun problème pour ce graphe !



Pour conclure sur cet exemple, les cas les plus facilement résolus par les élèves sont les cas où l'on a un graphe complet (vocabulaire non encore utilisé avec les élèves).

C'est l'occasion justement de répondre aux questions concernant le maximum de couleurs utilisées pour colorer des graphes de différents ordres. La difficulté vient plus de l'utilisation de la variable que des questions elles-mêmes, puisque l'on sort du cadre numérique pour entrer dans le cadre algébrique.
Pour toutes les classes, mais surtout en sixième, cette notion de variable est difficile à appréhender, ce qui peut facilement se concevoir !

Par manque de temps, la narration de recherche se fait collectivement (et un peu rapidement !).

Pour chaque question, un élève vient dessiner le graphe au tableau, et compte de manière aléatoire le nombre d'arêtes. Au bout de quelques graphes, le comptage devenant plus délicat, nous essayons de trouver une méthode plus structurée en utilisant le degré de chaque sommet.

Cette méthode permet également de mettre sur la voie les élèves pour démontrer la formule du nombre d'arêtes d'un graphe complet d'ordre n $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$.

Le coin du matheux : coloriage de la carte de la Réunion.

La classe de cinquième a soulevé beaucoup de questions de type géographique. Les élèves venant tous ou presque du bas de la Rivière Saint-Denis, et plus particulièrement du quartier « Petite-Ile », beaucoup sont étonnés de voir la commune de Petite-Ile... au sud de l'île et pensent à une erreur d'énoncé !

De même, Mafate n'apparaît pas, ce qui les étonne. Une très grande proportion d'élèves ne sait pas que le cirque de Mafate est rattaché aux communes de la Possession et de Saint-Paul.

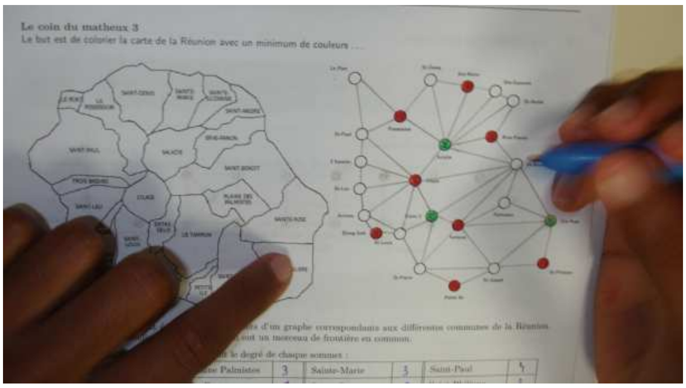
Ces questionnements mis à part, les élèves commencent à relier les sommets en débutant par leur commune (les sixièmes et quatrièmes de Sainte-Marie commencent par la commune de Sainte-Marie, les cinquièmes de Saint-Denis commencent par... Saint-Denis !). Ensuite, pas de méthodologie particulière : Salazie a la préférence de beaucoup car « C'est au milieu ! », ou « Il y a plein de communes autour. »

Dans un premier temps, les démarches des élèves sont naturellement assez aléatoires et ils ne montrent pas de signe de structuration de type algorithmique. Pour éveiller à une démarche plus organisée, je leur propose de s'intéresser aux communes limitrophes des communes traitées, tout en annotant ces commune afin de ne pas en oublier.

Le tableau des degrés des communes ne pose pas de difficulté, il s'agit juste d'un dénombrement issu d'une lecture du graphe précédent.

En revanche, le classement par ordre décroissant des degrés puis pas ordre alphabétique est un peu plus difficile. Le terme « décroissant » parce qu'ils en ont oublié le sens (ils savent que c'est un ordre, mais pas forcément si c'est du plus petit au plus grand, ou du plus grand au plus petit), et le terme « alphabétique » qui relève ici plus du français.
La difficulté est d'autant plus rude que beaucoup de commune commencent par « Saint- » ou « Sainte- », et qu'il faut donc aller loin dans le mot afin de connaître l'ordre alphabétique. Difficulté légèrement éclipsée puisque les communes ont déjà été placées dans l'orde alphabétique dans le tableau précédent.
L'activité est trop dirigée, j'aurais dû les laisser remplir ce fameux tableau seuls !

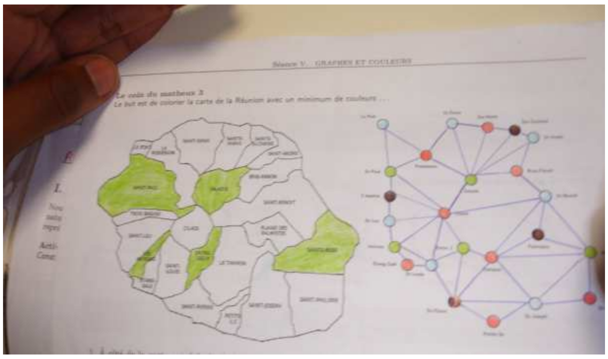
Enfin, nous passons à la question du coloriage, ce qu'attendaient beaucoup d'élèves, prêts à bondir sur leurs crayons de couleurs !
La mise en place de l'algorithme est faite de manière collective. Il faut être ici très rigoureux afin de n'oublier aucun sommet.



Il faut être très concentré car plusieurs informations doivent être prises en considération en même temps.

Une fois le graphe coloré, les élèves peuvent mettre de la couleur sur la carte de la Réunion. Le point important est la relation qu'il y a entre les communes ayant un sommet de même couleur : elles forment une sorte de « groupement » qu'il faut colorier identiquement. Ici, la couleur n'importe pas.

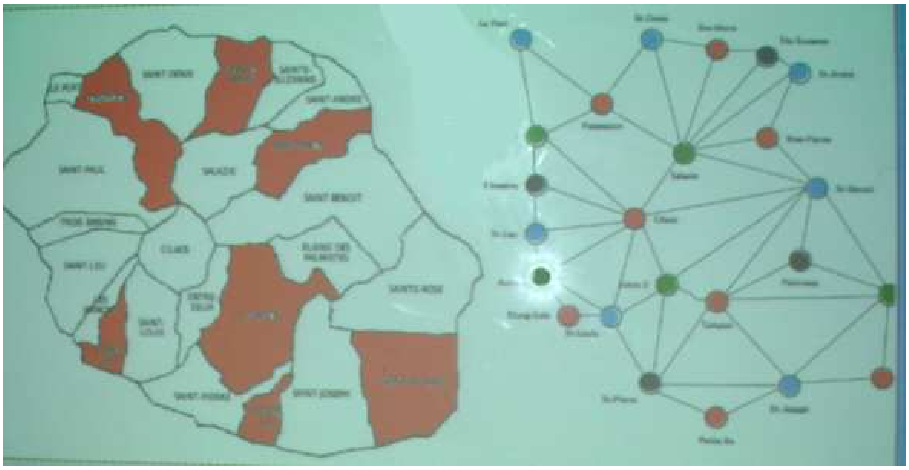
Là aussi, la fin de l'activité s'apparente à une activité de dévolution : il s'agit de faire en sorte que l'élève se sente responsable de l'obtention du résultat proposé, qu'il s'aperçoive que c'est lui qui, en cohérence avec le graphe, propose sa coloration.



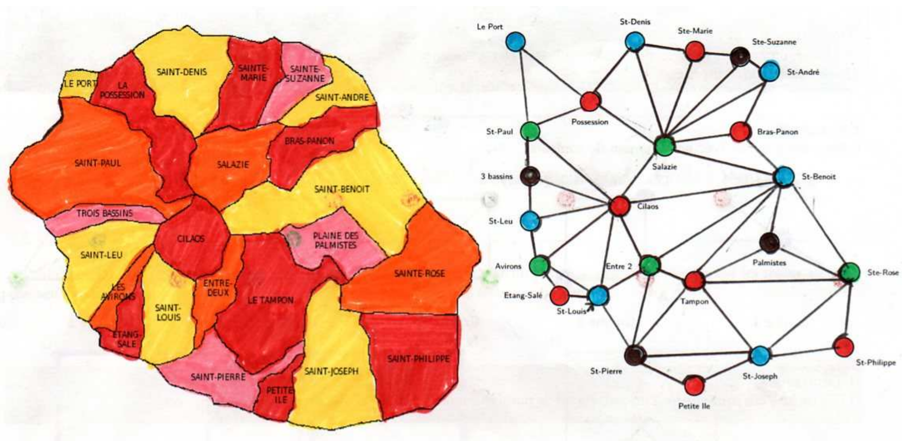
Cet élève reproduit scrupuleusement les mêmes couleurs que le graphe.

Celui-ci, n'ayant pas de crayon de couleur, propose d'effectuer des hachures.

De temps en temps, la coloration de la carte est actualisée au tableau afin de rassurer les élèves dans leur démarche.



La fin de l'heure est consacrée au coloriage, partie pendant laquelle les élèves sont très calmes et concentrés ! ! !



Ophélie, 5ᵉ, a fait le choix de ne pas utiliser les couleurs d'origine du graphe.

8
Conclusion

L'avènement des graphes, au 18^e siècle fut une révolution conceptuelle qui fit voler en éclats plus de deux millénaires de géométrie : en théorie des graphes, la « forme » n'a plus de réalité, c'est-à-dire que tous les repères géométriques hérités de la géométrie euclidienne classique deviennent caducs, au profit d'une notion unique, celle de « lien » entre les points.

Le travail d'Euler sur le problème des sept ponts n'a pas immédiatement suscité de « vocations ». Il fallut attendre plus d'un siècle pour que de nouveaux problèmes susceptibles d'être résolus par les graphes fassent leur apparition. En 1847, le physicien allemand Gustav Kirchhoff énonça les lois qui permettent de déterminer, dans un circuit électrique, l'intensité et le potentiel en différents points. Le circuit se décrit aisément par un graphe dont les sommets sont appelés « noeuds ».

En 1857, le Britannique Arthur Cayley s'intéressa aux arbres, c'est-à-dire aux graphes qui n'ont pas de cycle. Une de ses motivations était de compter le nombre de façons qu'il y a d'agencer des atomes de carbone et d'hydrogène dans l'espace pour constituer une molécule de la famille des alcanes : C_nH_{2n+2}.

Il y a actuellement plusieurs types d'applications, mais la principale se rencontre principalement en informatique. Les graphes sont une structure mathématique particulièrement bien adaptée à l'ordinateur, ils servent de « structure de données », c'est-à-dire qu'ils permettent d'organiser des ensembles d'objets (des noms, des nombres, des suites d'opérations...) de façon simple et pratique à exploiter. Par exemple, la méthode de compression utilisée pour créer un fichier au format « zip » est un algorithme inventé par l'Américain David Huffman en 1952, qui consiste en un codage des éléments du fichier à partir d'un arbre.

Pour toutes ces raisons, la question d'installer à moyen terme les graphes dans les curricula du collège ne semble pas complètement saugrenue. Tout comme les probabilités et les statistiques ont fait leur apparition il y a quelques années au lycée, puis au collège plus récemment, cette intrusion montre l'intérêt en général du renouvellement des curricula en adéquation avec le outils des problématiques sociales actuelles.

Expérience sur le terrain

Concernant ce premier test en collège, les différentes séances menées sur les graphes ont été accueillies plutôt favorablement par les élèves.
Ce que je regrette particulièrement est de ne pas avoir pris suffisamment de temps afin de traiter correctement toutes les séances : beaucoup de choses ont été faites de manière collective, et la part réflexion des élèves a été réduite.

Le nombre de concepts étudiés est sans aucun doute un peu ambitieux. Notamment, la partie « graphes planaires » aurait pu ne pas figurer dans ces séances.
Il est clair également que toutes les notions étudiées ici ne doivent pas figurer dans un seul niveau de classe, mais qu'il faut en effectuer une répartition intelligente.

Comme toute étude statistique, cette expérimentation au niveau de trois classes seulement n'est pas significative : les meilleurs résultats ont été observés dans la classe de cinquième (en tant habituel, c'est aussi la classe qui réussit le mieux et dont les élèves sont les plus motivés).

Il est intéressant de constater néanmoins que le thème a été plutôt accrocheur car ludique et très différent de ce qu'ils ont l'habitude de faire.

Perspectives

S'il fallait introduire des notions de graphes au collège, il pourrait par exemple se faire suivant le programme suivant :

- les premiers éléments des graphes, de par ses aspects ludiques, installent une véritable dévolution des problèmes rencontrés en classe de 6^e ;
- les notions de chaine et de cycle sont l'occasion, dès la classe de 5^e, de traiter de raisonnements mathématiques et d'aborder la distinction entre un cas général et un cas particulier ;
- la notion de chaine eulérienne est une ouverture vers d'autres démonstrations arithmétiques en classe de 4^e ;
- la colorisation pourrait être réservée à la classe de 3^e, en prenant le temps d'en détailler un algorithme.

Cependant, on peut se poser la question si ce « saupoudrage » des graphes à tous les niveaux du collège est bénéfique, ou s'il serait préférable de l'introduire dans des niveaux réduits (par exemple quatrième et troisième seulement ? ? ?).

Des curricula pourraient être élaborés par des commissions de spécialistes et être testés dans certaines académies, comme ce fut le cas pour l'introduction de l'algorithmique en classe de seconde.

Dans ce cas, les programmes de lycée seraient susceptibles également d'évoluer, en concordance avec ce qui se ferait au collège.

En Terminale ES, des changements sont d'ores et déjà en cours pour la rentrée prochaine : l'option mathématiques a disparu en première, et la spécialité à perdu 30 minutes, passant de 2 heures à 1h30. En revanche, toutes les sections inhérentes aux graphes sont maintenues, au détriment des équations cartésiennes de l'espace, des suites et des fonctions à deux variables, preuve de l'engouement pour la notion.

De même, l'enseignement de l'ISN (Informatique et Sciences du Numérique) comme quatrième spécialité offerte en terminale S à la rentrée 2012 implique l'utilisation de graphes en lien avec l'informatique : structuration et organisation de l'information (des documents unis par des liens hypertextes fournissent un exemple de classement de type graphe), algorithmique avec la recherche d'un chemin dans un graphe par un parcours en profondeur (DFS), les réseaux et le routage (de type arborescent et de type graphe).