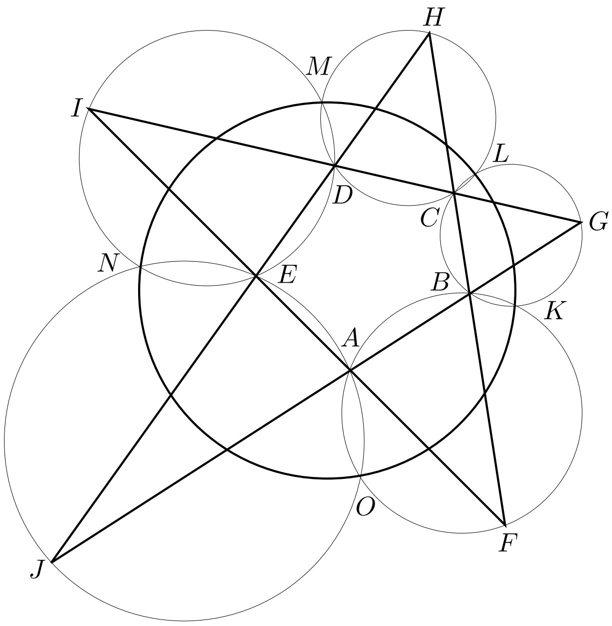
Pentagramme de Miquel

Soit $ABCDE$ un pentagone convexe prolongé en un pentagramme $FGHIJ$ ($F = (AE) \cap (BC), G = (AB) \cap (CD), \ldots$). Soit K (resp. L, M, N, O) le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABF et BCG (resp. BCG et CDH, CDH et DEI, DEI et EFJ, EFJ et ABF).
Les points K, L, M, N et O sont cocycliques.



Démonstration
Montrons que les points K, L, N et O sont cocycliques, *i.e.* que $\widehat{OKL} + \widehat{ONL} = \pi$.
Or :

$$\widehat{OKB} = \pi - \widehat{OAB} = \widehat{OAJ} = \widehat{ONJ}$$

et

$$\widehat{BKL} = \widehat{BGL} = \widehat{JGL}$$

Donc :

$$\widehat{OKL} + \widehat{ONL} = \widehat{OKB} + \widehat{BKL} + \widehat{ONL} = \widehat{ONJ} + \widehat{JGL} + \widehat{ONL} = \widehat{JGL} + \widehat{LNJ}$$

Il faut donc montrer la cocyclicité des points G, L, N et J. Or, si on trace le cercle passant par ces points, on constate qu'il passe également par le point D. On a, d'une part :

$$\widehat{JGL} = \widehat{BGL} = \pi - \widehat{BCL} = \widehat{HCL} = \widehat{HDL} = \pi - \widehat{LDJ}$$

de sorte que les points G, J, L et D sont cocycliques, et d'autre part :

$$\widehat{GJN} = \widehat{AJN} = \pi - \widehat{AEN} = \widehat{NEI} = \widehat{NDI} = \pi - \widehat{GDN}$$

de sorte que les points G, J, N et D sont cocycliques.
Ainsi les points G, L, D, N et J sont cocycliques.
Donc $\widehat{OKL} + \widehat{ONL} = \pi$.
On prouve de même la cocyclicité des points K, L, M et O.
Finalement, les points K, L, M, N et O sont cocycliques.

C.Q.F.D.

Baptiste GORIN