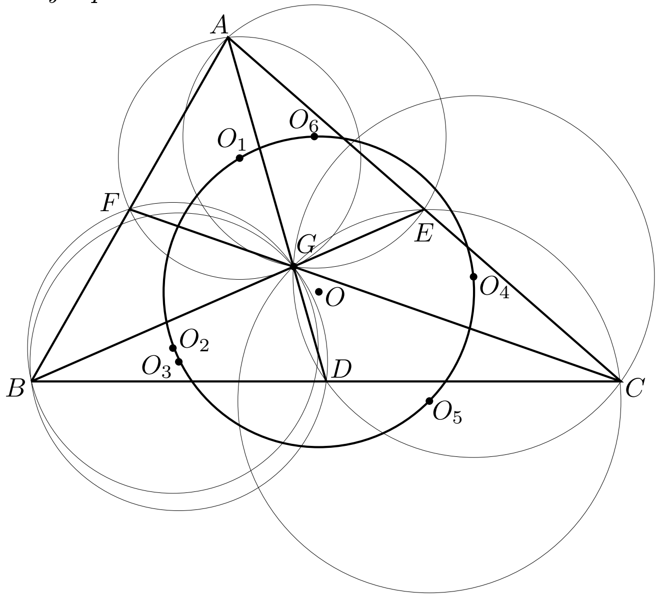
MÉDIANES ET CENTRES DES CERCLES CIRCONSCRITS

Soient ABC un triangle, D, E et F les milieux des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soient $O_1, \ldots, O_6$ les centres des cercles circonscrits aux triangles $AGF, FGB, BGD, DGC, CGE, EGA$.
Les points $O_1, \ldots, O_6$ sont cocycliques.



Démonstration
(O_1O_6) et (O_3O_4) sont les médiatrices des segments $[AG]$ et $[GD]$ respectivement. Donc les droites (O_1O_6) et (O_3O_4) sont parallèles.
De plus, la distances entre les droites (O_1O_6) et (O_3O_4) est égale à $\dfrac{AD}{2}$.
De même, les droites (O_1O_2) et (O_4O_5) sont parallèles et leur distance est égale à $\dfrac{CF}{2}$.
Soit K le point d'intersection des droites (O_1O_2) et (O_3O_4), L le point d'intersection de (O_4O_5) et (0_1O_6).
O_1KO_4L est un parallélogramme d'aire $\dfrac{1}{2}AD \times KO_4 = \dfrac{1}{2}CF \times KO_1$, d'où :

$$\frac{KO_4}{KO_1} = \frac{CF}{AD}$$

Considérons le triangle KO_2O_3. Comme $(KO_2)\perp(GF), (KO_3)\perp(GD), (O_2O_3)\perp(GB)$, on a :

$$\widehat{KO_2O_3} = \widehat{BGF} \qquad \widehat{KO_3O_2} = \widehat{BGD}$$

et

$$\widehat{O_2KO_3} = \pi - \widehat{KO_2O_3} - \widehat{KO_3O_2} = \pi - \widehat{BGF} - \widehat{BGD} = \widehat{AGF}$$

Soit M le point d'intersection de (AD) et de la parallèle à (BE) passant par C. On a :

$$\widehat{GCM} = \widehat{FGB} \qquad \widehat{CGM} = \widehat{AGF} \qquad \widehat{CMG} = \widehat{EGA} = \widehat{DGB}$$

Ainsi, les triangles MGC et O_3KO_2 sont semblables.
D'où :

$$\frac{KO_2}{KO_3} = \frac{GC}{GM} = \frac{CF}{AD}$$

Finalement, on a :

$$\frac{KO_2}{KO_3} = \frac{KO_4}{KO_1}$$

Ainsi, $KO_1 \times KO_2 = KO_3 \times KO_4$, de sorte que les points O_1, O_2, O_3, O_4 sont cocycliques.
On montre de même que les points O_2, O_3, O_4, O_5 et O_3, O_4, O_5, O_6 sont cocycliques.

C.Q.F.D.

Baptiste GORIN