Jeux de Nim

Baptiste GORIN

Les jeux de Nim sont des jeux de stratégie pure à deux joueurs. Il en existe de nombreuses variantes.

Les premières traces proviennent de Chine où le jeu porte le nom de *fan-tan* ; il est également connu en Afrique sous le nom de *tiouk-tiouk*.
Provenant du mot allemand « nimm » signifiant « prends », le nom actuel a été donné par le mathématicien anglais Charles Leonard Bouton en 1901 qui découvrit un algorithme de résolution du jeu (classique à plusieurs rangées).

Cette note nous permet d'étudier principalement trois variantes qui constitueront des applications originales de la divisibilité, de l'écriture d'un entier en base 2 (et plus généralement en base k) et de l'écriture d'un entier dans la base de Fibonacci.

I Jeu classique à une rangée

I.1 Description du jeu

On considère une rangée de pions. Chacun leur tour, deux joueurs prélèvent au maximum p pions ($p \geqslant 2$).
Le joueur qui prend le dernier pion a gagné.

I.2 Stratégie gagnante

Si le nombre initial de pions est un multiple de $p+1$, on doit laisser notre adversaire jouer le premier, sinon on débute la partie.
Ensuite, à chaque tour, on doit laisser à notre adversaire un nombre de pions multiple de $p+1$.

I.3 Démonstration

Désignons par G (resp. P) le joueur gagnant (resp. perdant).
Pour son dernier retrait, G doit disposer d'au plus p pions ; P aura donc pris le $(p+1)^{\text{e}}$ pion. G devra donc avoir laissé $p+1$ pions à P.
Ainsi, pour son avant dernier retrait, G doit retirer le $(p+2)^{\text{e}}$ pion, donc disposer d'au plus $(p+1)+p = 2p+1$ pions ; P aura donc pris le $2(p+1)^{\text{e}}$ pion.
De proche en proche, on en déduit que G doit laisser à P un nombre de pions multiple de $p+1$.

I.4 Variante inverse

Description du jeu

Le joueur qui prend le dernier pion a perdu.

Stratégie gagnante

Si le nombre initial de pions est un multiple de $p+1$ augmenté de 1), on doit laisser notre adversaire jouer le premier, sinon on débute la partie. Ensuite, à chaque tour, on doit laisser à notre adversaire un nombre de pions de la forme $k(p+1)+1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

II Jeu classique à plusieurs rangées

Ce jeu a été popularisé en 1961 par le film d'Alain RESNAIS, *L'année dernière à Marienbad*, au point de prendre le nom de « jeu de Marienbad ».
Dans le film, le héros gagne toutes ses parties et finit par dire : « je puis perdre mais je gagne toujours ».

II.1 Description du jeu

On considère plusieurs rangées de pions. Chacun leur tour, deux joueurs prélèvent des pions dans une rangée.
Le joueur qui prend le dernier pion a gagné.

II.2 Stratégie gagnante

Supposons que l'on ait k rangées de pions, la i^{e} rangée contenant n_i pions ($1 \leqslant i \leqslant k$). Écrivons $n_1, \ldots, n_k$ dans le système binaire : il existe $\alpha_{i,j} \in \{0;1\}$ tels que

$$n_i = \sum_{j=0}^{p} \alpha_{i,j} 2^j \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Considérons la matrice A à k lignes et $p+1$ colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,p} & \cdots & \alpha_{1,0} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k,p} & \cdots & \alpha_{k,0} \end{pmatrix}$$

Pour $j \in [\![0;p]\!]$, soit s_j la somme des coefficients de la colonne d'indice j :

$$s_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i,j}$$

Si la position initiale est telle que s_j est paire pour tout $j \in [\![0;p]\!]$, on doit laisser notre adversaire jouer le premier, sinon on débute la partie.
Ensuite, à chaque tour, on doit laisser à notre adversaire une position telle que s_j soit paire pour tout $j \in [\![0;p]\!]$.

II.3 Démonstration et explication

On note :

- E l'ensemble des positions possibles au cours du jeu ;
- $\Gamma(x)$ l'ensemble des positions possibles issues de $x \in E$; si une position y est issue de x, on écrit $y \in \Gamma(x)$;
- $G = \{(x,y); x \in E, y \in \Gamma(x)\}$ le graphe sur E.

Définition. — *Soit K une partie de E. K est un noyau du graphe de E si :*

- *pour tout $x \in K$, $\Gamma(x) \cap K = \varnothing$;*
- *pour tout $x \notin K$, $\Gamma(x) \cap K \neq \varnothing$.*

Remarque. — La première condition signifie que si x est une position appartenant au noyau alors toutes les positions issues de x seront hors du noyau ; autrement dit, quel que soit le coup joué, la position sera hors du noyau.
La seconde condition signifie que si x est une position hors du noyau alors il existe une position issue de x appartenant au noyau ; autrement dit, il existe un coup amenant une position appartenant au noyau.

Théorème. — *Soit K l'ensemble des positions telles que s_j est paire pour tout $j \in [\![0,p]\!]$.
Alors K est un noyau.*

Démonstration
Soit $x \in K$. Alors s_j est paire pour tout $j \in [\![0;p]\!]$. Supposons que le joueur enlève n pions dans la $i_0{}^{\text{e}}$ rangée. Dans la position y alors obtenue, le nombre n'_{i_0} de pions de la $i_0{}^{\text{e}}$ rangée sera alors strictement inférieur à n_{i_0} et au moins un chiffre de l'écriture binaire de n_{i_0} sera modifié. Soit α_{i_0,j_0} un tel chiffre. Alors $\alpha'_{i_0,j_0} = 1 - \alpha_{i_0,j_0}$ et $\alpha'_{i,j_0} = \alpha_{i,j_0}$ pour tout $i \in [\![1;k]\!], i \neq i_0$. Donc $s'_{j_0} = s_{j_0} + 1$ est impair de sorte que $y \notin K$.
Soit $x \notin K$. Alors l'ensemble $J = \{j \in [\![0;p]\!]; s_j \text{ est impair}\}$ est non vide. Soit j_0 le plus grand élément de J. Il existe $i_0 \in [\![1;k]\!]$ tel que $\alpha_{i_0,j_0} = 1$. Posons $\alpha'_{i_0,j} = \alpha_{i_0,j}$ pour tout $j \notin J$ et $\alpha_{i_0,j} = 1 - \alpha_{i_0,j}$ pour tout $j \in J$. Alors $n'_{i_0} = \sum\limits_{j=0}^{p} \alpha'_{i_0,j} 2^j$ est strictement inférieur à n_{i_0}. Ainsi, dans la position y obtenue en enlevant $n = n_{i_0} - n'_{i_0}$ pions dans la $i_0{}^{\text{e}}$ rangée, il restera n'_{i_0} pions et s'_j sera paire pour tout $j \in [\![0;p]\!]$ de sorte que $y \in K$.

C.Q.F.D.

Désignons par G (resp. P) le joueur gagnant (resp. perdant).
D'après la remarque, si G laisse à P une position appartenant à K, alors P laissera à G une position n'appartenant pas à K quel que soit le coup joué ; ensuite, il existe un coup permettant à G d'obtenir une position appartenant à K.
Le jeu étant fini (puisqu'au moins un pion est enlevé à chaque coup), G aboutira nécessairement le premier à la position $\varnothing$ qui appartient à K, ce qui lui assure le gain du jeu.

II.4 Exemple de partie

Considérons une partie avec pour position initiale 3 rangées de $4, 7$ et 9 pions.

La matrice associée à cette position étant $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $(s_3, s_2, s_1, s_0) = (1, 2, 1, 2)$.
Cette position n'appartenant pas au noyau, débutons la partie.
Suivons la démonstration du théorème précédent afin d'obtenir une position du noyau.
Enlevons alors 6 pions de la 3[e] rangée. on obtient pour position 3 rangées de $4, 7$ et 3 pions.

Cette position appartient bien au noyau, sa matrice associée étant $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Supposons alors que notre adversaire enlève 2 pions de la 1re rangée. La position obtenue comporte 3 rangées de $2, 7$ et 3 pions.

La matrice associée à cette position étant $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $(s_2, s_1, s_0) = (1, 3, 2)$.

Enlevons alors 6 pions de la 2e rangée. On obtient pour position 3 rangées de $2, 1$ et 3 pions.

Cette position appartient bien au noyau, sa matrice associée étant $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Supposons alors que notre adversaire enlève 1 pion de la 1re rangée. La position obtenue comporte 3 rangées de $1, 1$ et 3 pions.

La matrice associée à cette position étant $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $(s_1, s_0) = (1, 3)$.

Enlevons alors les 3 pions de la 3e rangée. On obtient pour position 2 rangées de 1 pion chacune.

Cette position appartient bien au noyau, sa matrice associée étant $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il est alors clair que l'on va prendre le dernier pion, donc obtenir le gain de la partie.

II.5 Variante inverse

Description du jeu

Le joueur qui prend le dernier pion a perdu.

Stratégie gagnante

On doit jouer comme dans le jeu « classique ». Et, dès que possible, on doit laisser à notre adversaire uniquement des rangées en nombre impair et ne contenant qu'un seul pion.

Exemple de partie

Considérons une partie avec pour position initiale 4 rangées de $1, 3, 5$ et 7 pions.

La matrice associée à cette position étant $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $(s_2, s_1, s_0) = (2, 2, 4)$.

Cette position appartenant au noyau, laissons notre adversaire débuter la partie et supposons qu'il enlève le pion de la 1re rangée.

La position obtenue comporte 3 rangées de $3, 5$ et 7 pions.

La matrice associée à cette position étant $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $(s_2, s_1, s_0) = (2, 2, 3)$.

Enlevons alors 1 pion de la 3e rangée. On obtient pour position 3 rangées de $3, 5$ et 6 pions.

Cette position appartient bien au noyau, sa matrice associée étant $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Supposons alors que notre adversaire enlève 3 pions de la 2e rangée. La position obtenue comporte 3 rangées de $3, 2$ et 6 pions.

La matrice associée à cette position étant $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $(s_2, s_1, s_0) = (1, 3, 1)$.

Enlevons alors 5 pions de la 3e rangée. On obtient pour position 3 rangées de $3, 2$ et 1 pions.

Cette position appartient bien au noyau, sa matrice associée étant $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Supposons alors que notre adversaire enlève 2 pions de la 1re rangée. La position obtenue comporte 3 rangées de $1, 2$ et 1 pions.

Enlevons alors 1 pion de la 2e rangée. On obtient pour position 3 rangées de 1 pion chacune. Il est alors clair que l'adversaire va prendre le dernier pion, donc perdre la partie.

II.6 Une autre variante

Description du jeu

On considère plusieurs rangées de pions. Chacun leur tour, deux joueurs prélèvent des pions dans k rangées maximum ($k \in \mathbb{N}^*$).

Le joueur qui prend le dernier pion a gagné.

Stratégie gagnante

Reprenons les notations précédentes.
Si la position initiale est telle que s_j est multiple de $k+1$ pour tout $j \in [\![0;p]\!]$, on doit laisser notre adversaire jouer le premier, sinon on débute la partie.
Ensuite, à chaque tour, on doit laisser à notre adversaire une position telle que s_j soit multiple de $k+1$ pour tout $j \in [\![0;p]\!]$.

Exemple de partie

Considérons une partie avec pour position initiale 5 rangées de $1, 3, 4, 7$ et 9 pions et au cours de laquelle on peut enlever des pions dans 2 rangées maximum.

La matrice associée à cette position étant $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $(s_3, s_2, s_1, s_0) = (1, 2, 2, 4)$.

Cette position n'appartenant pas au noyau, débutons la partie.
Enlevons alors 3 pions de la 5$^{\text{e}}$ rangée. on obtient pour position 5 rangées de $1, 3, 4, 7$ et 6 pions.

Cette position appartient bien au noyau, sa matrice associée étant $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Supposons alors que notre adversaire enlève le pion de la 1$^{\text{re}}$ rangée et 2 pions de la 4$^{\text{e}}$ rangée. La position obtenue comporte 4 rangées de $3, 4, 5$ et 6 pions.

La matrice associée à cette position étant $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $(s_2, s_1, s_0) = (3, 2, 2)$.

Enlevons alors 2 pions de la 1$^{\text{re}}$rangée et 1 pion de la 4$^{\text{e}}$ rangée. On obtient pour position 4 rangées de $1, 4, 5$ et 5 pions.

Cette position appartient bien au noyau, sa matrice associée étant $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Supposons alors que notre adversaire enlève le pion de la 1$^{\text{re}}$ rangée et 3 pions de la 3$^{\text{e}}$ rangée. La position obtenue comporte 3 rangées de $4, 2$ et 5 pions.

La matrice associée à cette position étant $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $(s_1, s_0) = (2, 1, 1)$.

Enlevons alors 2 pions de la 1$^{\text{re}}$ rangée et 3 pions de la 3$^{\text{e}}$rangée. On obtient pour position 3 rangées de 2 pions chacune.

Cette position appartient bien au noyau, sa matrice associée étant $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Supposons alors que notre adversaire enlève 1 pion de la 1$^{\text{re}}$ rangée. La position obtenue comporte 3 rangées de $1, 2$ et 2 pions.

La matrice associée à cette position étant $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $(s_1, s_0) = (2, 1)$.

Enlevons alors 1 pion des 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ rangées. On obtient pour position 3 rangées de 1 pion chacune.
Il est alors clair que l'on va prendre le dernier pion, donc obtenir le gain de la partie.

III Fibonacci nim

III.1 Description du jeu

On considère une rangée de pions. Le premier joueur peut prélever tous les pions sauf un. Ensuite, chacun leur tour, les deux joueurs prélèvent jusqu'au double des pions enlevés par l'adversaire au coup précédent.
Le joueur qui prend le dernier pion a gagné.

III.2 Stratégie gagnante

Définition (suite de Fibonacci). — *La suite de Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par* $F_0 = F_1 = 1$ *et la relation de récurrence :*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Remarque. — Les premiers nombres de Fibonacci sont $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89$.

Théorème (de représentation de Zeckendorf). — *Tout nombre entier positif est la somme de nombres de Fibonacci distincts, cette décomposition étant unique si elle ne comporte pas deux nombres de Fibonacci consécutifs.*
Ainsi, tout $n \in \mathbb{N}^*$ *s'écrit de manière unique*

$$n = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k F_k$$

avec $\varepsilon_k \in \{0;1\}$ *et* $\varepsilon_k\varepsilon_{k+1} = 0$ *pour tout* k.
On notera $n = \overline{\varepsilon_p\varepsilon_{p-1}\ldots\varepsilon_1}^Z$.

Exemple. — On a $74 = 55 + 13 + 5 + 1 = F_9 + F_6 + F_4 + F_1 = \overline{100101001}^Z$.

Si le nombre initial de pions est un nombre de Fibonacci, on doit laisser notre adversaire jouer le premier, sinon on débute la partie.
Ensuite, à chaque tour, si $n = \overline{\varepsilon_p\varepsilon_{p-1}\ldots\varepsilon_1}^Z$ est le nombre de pions présents et si $i = \min\{k \in [\![1;n]\!] ; \varepsilon_k = 1\}$, on doit enlever F_i pions (afin de supprimer le 1 le plus à droite dans la représentation de Zeckendorf de n).

III.3 Démonstrations et explication

Démonstration (du théorème de représentation de Zeckendorf)
Montrons, par récurrence sur n, l'existence d'une telle représentation.
Pour $n \in \{1;2;3\}$, on a $n = F_n$.
Pour $n = 4$, on a $n = 3 + 1 = F_3 + F_1$.
Supposons que tout entier inférieur à n admet une représentation de Zeckendorf.
Si $n + 1$ est un nombre de Fibonacci, le résultat est immédiat.
Sinon il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $F_p < n + 1 < F_{p+1}$. Soit alors $n' = n + 1 - F_p$.
Comme $n' < n$, n' admet une représentation de Zeckendorf d'après l'hypothèse de récurrence.
De plus, on a $n' < F_{p+1} - F_p = F_{p-1}$ de sorte que $n + 1$ admet également une représentation de Zeckendorf.
Pour démontrer l'unicité de la représentation de Zeckendorf, nous aurons besoin du lemme suivant :

> **Lemme.** — *Soient* I *une partie finie de* $\mathbb{N}^*$ *ne contenant pas deux entiers consécutifs et* $n = \max I$.
> *Alors*
>
> $$\sum_{i\in I} F_i < F_{n+1}$$
>
> **Démonstration**
> Montrons le résultat par récurrence sur n.
> Le résultat est évident pour $n = 1$ et $n = 2$.
> Pour $n = 3$, la somme $\sum\limits_{i\in I} F_i$ est majorée par $F_1 + F_3 = 4$ qui est strictement inférieure à $F_4 = 5$.
> Supposons le résultat acquis jusqu'à un rang n fixé et montrons le au rang $n + 1$.
> Soit $I' = I \setminus \{n+1\}$. On a :
>
> $$\begin{aligned}\sum_{i\in I} F_i &= F_{n+1} + \sum_{i\in I'} F_i \\ &< F_{n+1} + F_{1+\max I'} \\ &\leqslant F_{n+1} + F_n \\ &= F_{n+2}\end{aligned}$$
>
> **C.Q.F.D.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et I et J deux parties finies de $\mathbb{N}^*$ ne contenant pas deux entiers consécutifs tels que

$$n = \sum_{i\in I} F_i = \sum_{j\in J} F_j.$$

Soient $I' = I \setminus (I \cap J)$ et $J' = J \setminus (I \cap J)$.
Supposons que $I' \neq \varnothing$ et $J' \neq \varnothing$ de sorte que l'on a $\sum\limits_{i \in I'} F_i = \sum\limits_{j \in J'} F_j$.
Si $i_0 = \max I'$ et $j_0 = \max J'$ avec $i_0 < j_0$ (I' et J' étant disjoints par définition), d'après le lemme, on a

$$\sum_{i \in I'} F_i < F_{i_0+1} \leqslant F_{j_0} \leqslant \sum_{j \in J'} F_j,$$

ce qui est absurde.
Par conséquent, $I' = \varnothing$ ou $J' = \varnothing$.
Supposons $I' = \varnothing$ et $J' \neq \varnothing$ de sorte que I est un sous-ensemble strict de J.
On a alors $\sum\limits_{i \in I} F_i < \sum\limits_{j \in J} F_j$, ce qui est absurde.
Ainsi $I' = \varnothing$ et $J' = \varnothing$, soit $I = J$.

C.Q.F.D.

Soit (n, x) une position du jeu, n désignant le nombre de pions présents et x le nombre maximum de pions que l'on peut retirer au prochain coup.
Un coup sera noté $(n, x) \to (n-k, 2k)$ avec $1 \leqslant k \leqslant \min(n, x)$.

Lemme. — *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_p}$ la représentation de Zeckendorf de n (avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$). Soient $x \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leqslant x < F_{i_1}$ et $F_{j_1} + F_{j_2} + \cdots + F_{j_k}$ la représentation de Zeckendorf de $F_{i_1} - x$ (avec $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$).*
Alors $F_{j_1} + F_{j_2} + \cdots + F_{j_k} + F_{i_2} + F_{i_3} + \cdots + F_{i_p}$ est la représentation de Zeckendorf de $n - x$.
De plus, $2x \geqslant F_{j_1}$.

Démonstration

Il est clair que $F_{j_1} + F_{j_2} + \cdots + F_{j_k} + F_{i_2} + F_{i_3} + \cdots + F_{i_p}$ est la représentation de Zeckendorf de $n - x$.
Montrons que $2x \geqslant F_{j_1}$.
De $F_{i_1} > 1$, on déduit que $i_1 \geqslant 2$.
Si $i_1 = 2$, alors nécessairement $x = 1$ et $F_{j_1} = F_{i_1} - x = 1$. On a bien $2x \geqslant F_{j_1}$.
Si $i_1 = 3$, alors $x = 1$ ou $x = 2$. Si $x = 1$, alors $F_{j_1} = F_{i_1} - x = 2$; si $x = 2$, alors $F_{j_1} = F_{i_1} - x = 1$. Dans les deux cas, on $2x \geqslant F_{j_1}$.
Si $i_1 = 4$, alors $x \in [\![1; 4]\!]$. Si $x = 1$, alors $F_{i_1} - x = 4 = F_3 + F_1$ de sorte que $F_{j_1} = 1$; si $x = 2$, alors $F_{j_1} = F_{i_1} - x = 3$; si $x = 3$, alors $F_{j_1} = F_{i_1} - x = 2$; si $x = 4$, alors $F_{j_1} = F_{i_1} - x = 1$. Dans tous les cas, on a $2x \geqslant F_{j_1}$.
Supposons à présent $i_1 \geqslant 5$.
Si $1 \leqslant F_{i_1} - x \leqslant F_{i_1 - 1}$, alors

$$\begin{array}{rcl}
F_{i_1} & \leqslant & x + F_{i_1-1} \\
& = & x + F_{i_1} - F_{i_1-2} \\
& \leqslant & 2x + F_{i_1-1} - F_{i_1-2} \\
& = & 2x + F_{i_1-3} \\
& = & 2x + F_{i_1} - F_{i_1-1} - F_{i_1-4} \\
& \leqslant & 3x - F_{i_1-4} \\
& \leqslant & 3x
\end{array}$$

d'où

$$2x \geqslant F_{i_1} - x = F_{j_1} + F_{j_2} + \cdots + F_{j_k} \geqslant F_{j_1}.$$

Si $F_{i_1-1} < F_{i_1} - x < F_{i_1}$, montrons le résultat par récurrence sur k.
Si $k = 1$, on a $F_{i_1} - x = F_{j_1}$, donc $i_1 \geqslant j_1 + 1$. Alors

$$2x = 2(F_{i_1} - F_{j_1}) \geqslant 2(F_{j_1+1} - F_{j_1}) = 2F_{j_1-1} \geqslant F_{j_1}.$$

Supposons le résultat acquis à un rang k fixé et montrons le au rang $k+1$.
Comme

$$F_{i_1-1} < F_{i_1} - x = F_{j_1} + F_{j_2} + \cdots + F_{j_{k+1}} < F_{i_1}$$

le théorème de représentation de Zeckendorf de $F_{i_1} - x$ assure que $j_{k+1} = i_1 - 1$.
Alors

$$\begin{array}{rcl}
x & = & F_{i_1} - (F_{j_1} + F_{j_2} + \cdots + F_{j_{k+1}}) \\
& = & F_{i_1} - F_{i_1-1} - (F_{j_1} + F_{j_2} + \cdots + F_{j_k}) \\
& = & F_{i_1-2} - (F_{j_1} + F_{j_2} + \cdots + F_{j_k})
\end{array}$$

soit $F_{i_1-2} - x = F_{j_1} + F_{j_2} + \cdots + F_{j_k}$. Par hypothèse de récurrence, on a $2x \geqslant F_{j_1}$.

C.Q.F.D.

Théorème. — *Soit K l'ensemble des positions (n, x) telles que x permet de supprimer le 1 le plus à droite dans la représentation de Zeckendorf de n.*
Alors K est un noyau.

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ dont la représentation de Zeckendorf est $F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_p}$.
Soit $(n, x) \in K$. On a alors $x \geqslant F_{i_1}$.
Considérons alors le coup $(n, x) \to (n - F_{i_1}, 2F_{i_1})$.
La représentation de Zeckendorf de $n - F_{i_1}$ étant $F_{i_2} + \cdots + F_{i_p}$, on a $(n - F_{i_1}, 2F_{i_1}) \notin K$ puisque $2F_{i_1} < F_{i_2}$.
Soit $(n, x) \notin K$. On a alors $x < F_{i_1}$.
Si $F_{j_1} + F_{j_2} + \cdots + F_{j_k}$ est la représentation de Zeckendorf de $F_{i_1} - x$, alors, d'après le lemme, $F_{j_1} + F_{j_2} + \cdots + F_{j_k} + F_{i_2} + F_{i_3} + \cdots + F_{i_p}$ est la représentation de Zeckendorf de $n - x$.
De plus, comme $2x \geqslant F_{j_1}$, le coup $(n, x) \to (n - F_{j_1}, 2F_{j_1})$ est licite de sorte que $(n - F_{i_1}, 2F_{i_1}) \in K$.

C.Q.F.D.

III.4 Exemple de partie

Considérons une partie avec pour position initiale $(20, 19)$.
$20 = \overline{101010}^Z$ n'étant pas un nombre de Fibonacci, débutons la partie.
Retirons $F_2 = 2$ pions : $(20, 19) \to (18, 4)$.
Supposons que notre adversaire retire alors 2 pions : $(18, 4) \to (16, 4)$.
Comme $16 = \overline{100100}^Z$, retirons $F_3 = 3$ pions : $(16, 4) \to (13, 6)$.
Supposons que notre adversaire retire alors 4 pions : $(13, 6) \to (9, 8)$.
Comme $9 = \overline{10001}^Z$, retirons $F_1 = 1$ pion : $(9, 8) \to (8, 2)$.
Supposons que notre adversaire retire alors 2 pions : $(8, 2) \to (6, 4)$.
Comme $6 = \overline{1001}^Z$, retirons $F_1 = 1$ pion : $(6, 4) \to (5, 2)$.
Supposons que notre adversaire retire alors 1 pion : $(5, 2) \to (4, 2)$.
Comme $4 = \overline{101}^Z$, retirons $F_1 = 1$ pion : $(4, 1) \to (3, 2)$.
Supposons que notre adversaire retire alors 1 pion : $(3, 2) \to (2, 2)$.
On retire alors les 2 derniers pions pour obtenir le gain de la partie.