À PROPOS DE L'HEPTAGONE RÉGULIER ET DE SA CONSTRUCTION

Baptiste GORIN

Il est bien connu que la construction de l'heptagone régulier à la règle non graduée et au compas est impossible. L'objet de cette note est de donner deux constructions, la première, approchée, la seconde, exacte, en utilisant la règle marquée et le compas (construction de Neusis).

I. Impossibilité de la construction

Théorème (Gauss - 1801). — *Le polygone régulier à n côtés est constructible à la règle et au compas si, et seulement si, l'entier n a une décomposition en facteurs premiers de la forme :*

$$n = 2^m F_1 F_2 \cdots F_k$$

où $F_1, \ldots, F_k$ sont des nombres de Fermat premiers distincts[1].

Théorème (Wantzel - 1837). — *Tout nombre constructible est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et son degré est une puissance de 2.*

Autrement dit, tout nombre constructible est racine d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ irréductible sur $\mathbb{Q}$ et dont le degré est une puissance de 2.

Pour une démonstration de ces deux théorèmes, on se reportera sur [1] et [2].

Corollaire I.3. — *L'heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas.*

Démonstration

Première démonstration. — 7 est un nombre premier qui n'est pas un nombre de Fermat.
D'après le théorème de Gauss, l'heptagone n'est pas constructible.

Deuxième démonstration. — Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On a $z^7 = 1$, d'où :

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

En divisant par z^3, il vient :

$$z^3 + \frac{1}{z^3} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0$$

soit :

$$2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1 = 0$$

Comme $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ et $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, on en déduit que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est racine du polynôme P avec :

$$P(X) = 8X^3 + 4X^2 - 4X - 1$$

Si P admet une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ (avec p et q premiers entre eux), alors, nécessairement, p divise 1 et q divise 8. Ainsi, les seules racines possibles sont : $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$.
On vérifie qu'aucune de ces valeurs n'est racine de P.
Ainsi, P est irréductible sur $\mathbb{Q}$ de sorte que $\frac{1}{8}P$ est le polynôme minimal de $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ sur $\mathbb{Q}$.

D'après le théorème de Wantzel, $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ et par conséquent l'heptagone ne sont pas constructibles.

C.Q.F.D.

[1] Le n-ième nombre de Fermat est $F_n = 2^{2^n} + 1$. Les seuls nombres de Fermat premiers connus à ce jour sont $F_0 = 3$, $F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257$ et $F_4 = 65537$.

II. Une construction approchée

Considérons de nouveau le polynôme P avec $P(X) = 8X^3 + 4X^2 - 4X - 1$.

La fonction polynômiale P' est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $I = \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Ainsi, pour tout $x \in I$, on a :

$$6 = P'\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant P'(x) \leqslant P'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

On en déduit en particulier que la fonction P est croissante sur I.
On a $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right), \frac{4+\sqrt{5}}{10} \in I$ et :

$$0 = P\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right) < P\left(\frac{4+\sqrt{5}}{10}\right) = \frac{43\sqrt{5}-96}{125}$$

donc : $\frac{4+\sqrt{5}}{10} > \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.
Par l'inégalité des accroissements finis, il vient :

$$6\left(\frac{4+\sqrt{5}}{10} - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right) \leqslant P\left(\frac{4+\sqrt{5}}{10}\right) - P\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right) = \frac{43\sqrt{5}-96}{125}$$

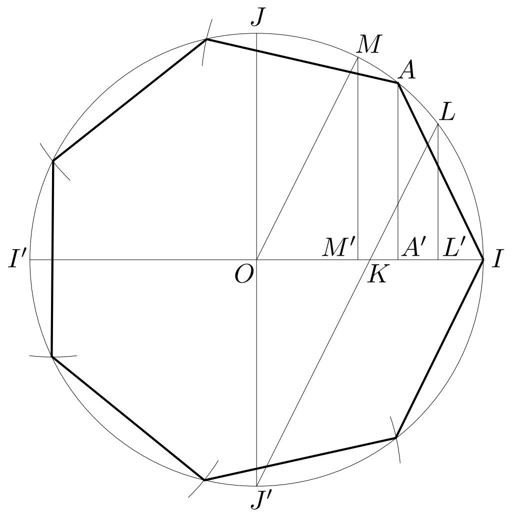
Donc :

$$0 < \frac{4+\sqrt{5}}{10} - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \leqslant \frac{43\sqrt{5}-96}{750}$$

Ainsi, $\frac{4+\sqrt{5}}{10}$ est une valeur approchée de $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ à 10^{-3} près.

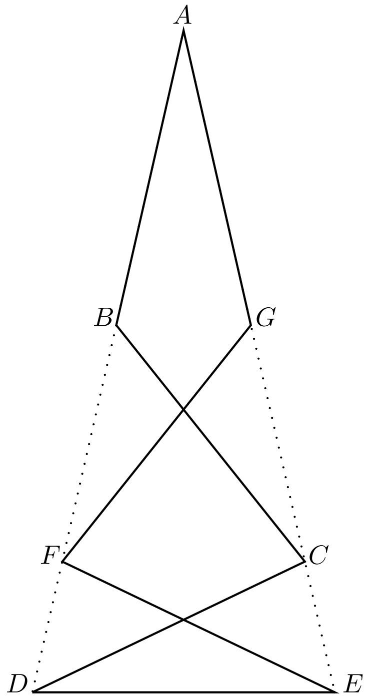
Construction

Considérons le cercle unité $\mathcal{C}$ de centre O et de diamètres perpendiculaires $[II']$ et $[JJ']$.
Soit K le milieu du segment $[OI]$. La droite $(J'K)$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en L ; la parallèle à $(J'K)$ passant par O coupe le cercle $\mathcal{C}$ en M.
Notons L' et M' les projetés orthogonaux de L et M sur (OI).
Alors le milieu A' du segment $[L'M']$ vérifie : $OA' = \frac{4+\sqrt{5}}{10}$.
Le point d'intersection A du cercle $\mathcal{C}$ avec la perpendiculaire à (OI) passant par A est, avec I, un sommet de l'heptagone cherché.



III. Construction de Neusis

La figure ci-dessous est telle que :
- $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GA = 1$
- A, B, F et D sont alignés
- A, G, C et E sont alignés



Lemme 1. — $\widehat{DAE} = \dfrac{\pi}{7}$

Démonstration
Notons $\alpha = \widehat{DAE}$.
Le triangle ABC étant isocèle en A, on a : $\widehat{BAC} = \widehat{ACB} = \alpha$ et $\widehat{CBA} = \pi - 2\alpha$.
Il vient : $\widehat{DBC} = 2\alpha$.
Le triangle BCD étant isocèle en C, on a : $\widehat{DBC} = \widehat{CDB} = 2\alpha$ et $\widehat{BCD} = \pi - 4\alpha$.
Le triangle EAD étant isocèle en A, on a : $\widehat{EDA} = \widehat{AED} = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$.
Il vient : $\widehat{EDC} = \dfrac{\pi - 5\alpha}{2}$.
Le triangle CDE étant isocèle en D, on a : $\widehat{DCE} = \widehat{CED} = \dfrac{\pi + 5\alpha}{4}$.
Comme :

$$\widehat{ACE} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD} + \widehat{DCE}$$

soit :

$$\pi = \alpha + \pi - 4\alpha + \frac{\pi + 5\alpha}{4}$$

on obtient : $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$.

C.Q.F.D.

Lemme 2. — $BE = \sqrt{2}$

Démonstration
Comme $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$, il vient :
- $\widehat{EDC} = \dfrac{\pi}{7}$; ainsi les triangles GAB, CDE et DEF sont isométriques, donc $BG = DF = CE$.
- $\widehat{FBC} = \widehat{BCF} = \dfrac{2\pi}{7}$; ainsi les triangles BFC et GCF sont isocèles en F et C respectivement, donc $BF = FC = CG$.

Posons $a = BG$ et $b = CF$.
Les triangles ABG, AFC et ADE étant semblables, on a : $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1+b}{b} = \dfrac{1+a+b}{1}$

De $\dfrac{1}{a} = 1 + a + b$ et $\dfrac{1+b}{b} = 1 + a + b$, il vient : $a^2 + ab + a = 1$ et $b^2 + ab = 1$.
En sommant ces deux inégalités, on obtient : $a^2 + b^2 + 2ab + a = 2$.
Soit H le projeté orthogonal de B sur $[DE]$. Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles BDH et EBH donne :

$$BH^2 = BE^2 - EH^2 = BD^2 - DH^2$$

soit :

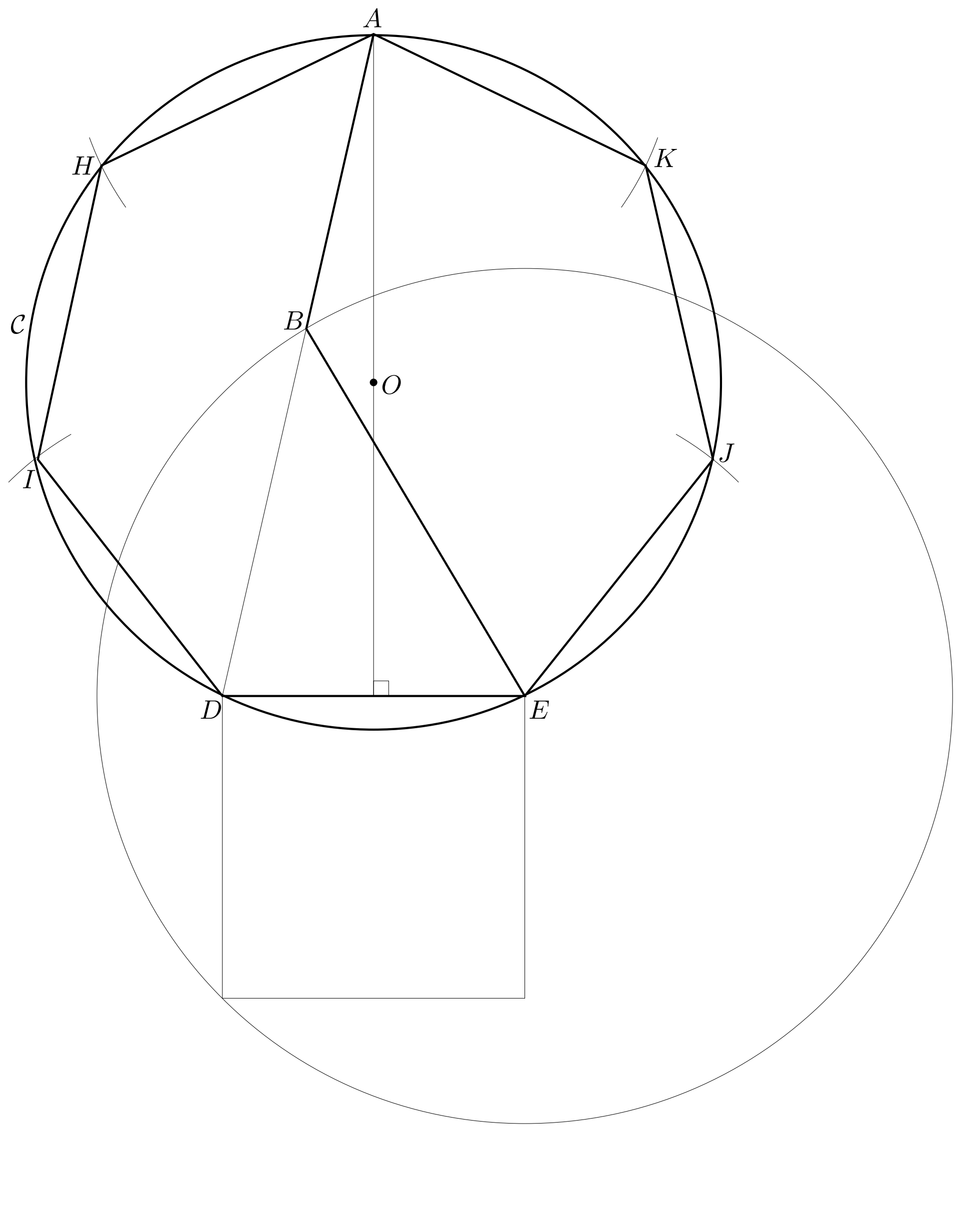
$$BE^2 - \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 = (a+b)^2 - \left(\frac{1-a}{2}\right)^2$$

D'où : $BE^2 = a^2 + b^2 + 2ab + a$.
D'après ce qui précède, on obtient finalement : $BE = \sqrt{2}$.

C.Q.F.D.

Construction

On trace le segment $[DE]$ de longueur 1 (qui sera un des côtés de l'heptagone), sa médiatrice puis le cercle de centre E et de rayon $\sqrt{2}$.
La construction de Neusis consiste à marquer sur la règle deux points A et B tels que $AB = DE = 1$ puis à faire glisser cette règle en plaçant A sur la médiatrice de $[DE]$ et B sur le cercle de centre D et rayon $\sqrt{2}$, ces deux points étant alignés avec D.
Ainsi $\widehat{DAE} = \dfrac{\pi}{7}$.
Le centre O du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à l'heptagone est le point d'intersection des médiatrices de $[AD]$ et $[DE]$.
La construction des autres sommets H, I, J et K s'effectue en reportant la longueur DE à partir de A, D, E.



Références

[1] J.-C. Carrega, *Théorie des Corps - La Règle et le Compas*, Hermann
[2] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses
[3] C. Johnson - *A construction for a regular heptagone*, Math. Gaz. 59, 17-1, 1975

Compléments sur l'heptagone

Proposition. — *On a :* $\mathcal{A}(ADI) = \dfrac{\sqrt{7}}{4}R^2$ *où R est le rayon du cercle circonscrit.*

Démonstration
Notons A' et E' les milieux respectifs des segments $[DE]$ et $[AD]$.
On a : $\sin\left(\widehat{DOA'}\right) = \dfrac{DA'}{DO}$, soit : $\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right) = \dfrac{1}{2R}$.
On en déduit en particulier que $R > 1$.
Calculons à présent la longueur AD de deux manières.
D'une part, en se plaçant dans le triangle rectangle ADA', on a : $AD = \dfrac{DA'}{\cos\left(\widehat{A'DA}\right)}$.

D'autre part, en se plaçant dans le triangle isocèle OAD, on a : $AD = 2AE' = 2OA\sin\left(\widehat{AOE'}\right)$.
Ainsi :

$$AD = \frac{1}{2\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)} = 2R\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned}
& 4R\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 1 \\
\iff\ & 4R\left(3\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) - 4\sin^3\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(4\cos^3\left(\frac{\pi}{7}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) = 1 \\
\iff\ & 4R\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\left(3 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(1 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) = 1
\end{aligned}$$

Comme $\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right) = \dfrac{1}{2R}$, on en déduit que :

$$\frac{(3R^2-1)(R^2-1)\sqrt{4R^2-1}}{R^5} = 1$$

En élevant cette égalité au carré, on en déduit que R est solution positive de l'équation :

$$\begin{aligned}
& 35R^{10} - 105R^8 + 112R^6 - 54R^4 + 12R^2 - 1 = 0 \\
\iff\ & (5R^4 - 5R^2 + 1)(7R^6 - 14R^4 + 7R^2 - 1) = 0 \\
\iff\ & (5R^4 - 5R^2 + 1)(7R^2(R^2-1)^2 - 1) = 0
\end{aligned}$$

Comme $R > 1$, nécessairement R vérifie : $7R^2(R^2-1)^2 = 1$
Donc : $\dfrac{1}{R^2-1} = \sqrt{7}R$.
Finalement, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(ADI) &= \frac{DI \times DA \times \sin\left(\widehat{ADI}\right)}{2} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)}{4\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}{2 - 8\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)} \\
&= \frac{R}{4(R^2-1)} \\
&= \frac{\sqrt{7}}{4}R^2
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Corollaire. — *On a :* $\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$

Démonstration
$\dfrac{\pi}{7}$, $\dfrac{2\pi}{7}$ et $\dfrac{4\pi}{7}$ sont les mesures des angles $\widehat{IAD}$, $\widehat{ADI}$ et $\widehat{DIA}$ dans le triangle ADI.
Or, dans un triangle ABC, on a : $\sin(\widehat{A})\sin(\widehat{B})\sin(\widehat{C}) = \dfrac{\mathcal{A}(ABC)}{2R^2}$.
Le corollaire est alors une conséquence de la proposition 3.

C.Q.F.D.