La géométrie du compas

Constructions au compas - Théorème de Mohr-Mascheroni

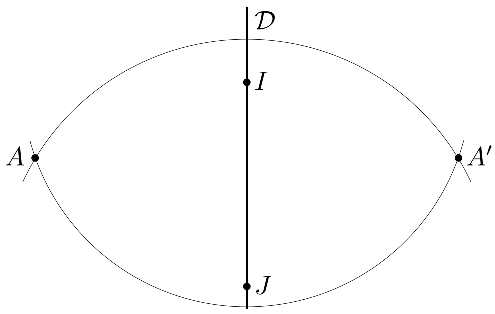
Baptiste GORIN

Dans les treize livres des *Éléments*, les constructions géométriques étudiées par Euclide s'effectuent à la règle et au compas uniquement.
Certains problèmes de construction à l'aide de ces seuls instruments se sont révélés impossible ; il en est ainsi de la quadrature du cercle, de la duplication du cube et de la trisection de l'angle.
Par ailleurs, il s'avère que si la construction d'un point à la règle et au compas peut être réalisée, seul le compas suffit pour le construire.
Cette note s'intéresse à la géométrie du compas.
Des constructions effectuées à l'aide du compas, qu'elles soient élémentaires, classiques ou célèbres, sont tout d'abord présentées avant de démontrer le théorème de Mohr-Mascheroni.

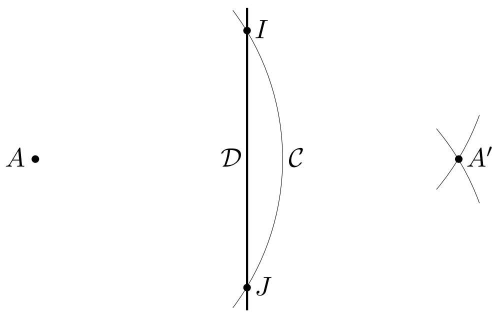
I. Constructions au compas

Construction I.1

Étant donnés une droite $\mathcal{D}$ et un point A, construire, au compas, le symétrique de A par rapport à $\mathcal{D}$.
Première construction
Soient I et J deux points de $\mathcal{D}$.
Les cercles de centres I et J passant par A se coupent en A' (et A).
Le point A' est le symétrique de A par rapport à $\mathcal{D}$.

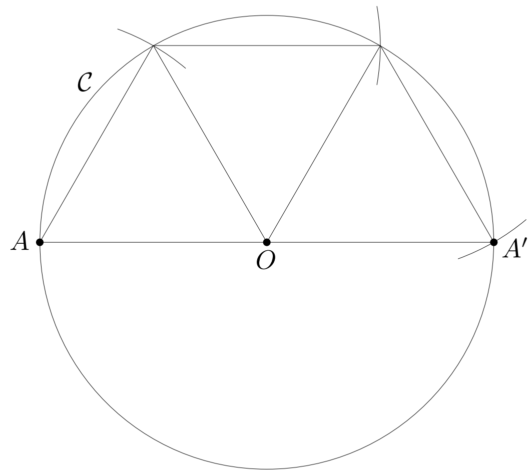


Deuxième construction
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre A et de rayon R coupant $\mathcal{D}$ en I et J.
Les cercles de centres I et J et de rayon R se coupent en A et A'.
Le point A' est le symétrique de A par rapport à $\mathcal{D}$.



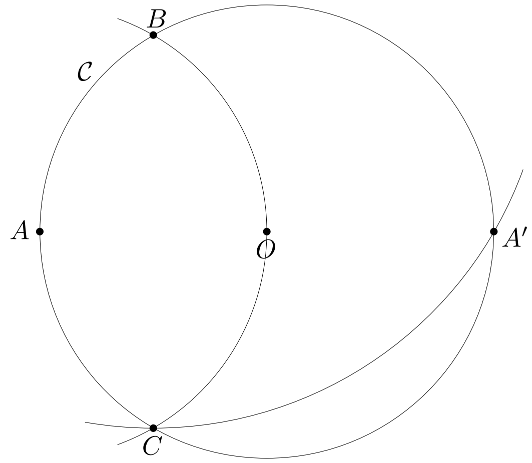
Construction I.2

Étant donnés deux points A et O, construire, au compas, le symétrique de A par rapport à O.
Première construction
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O passant par A.
À partir du point A, reporter sur le cercle $\mathcal{C}$ trois fois la longueur OA.
Le point A' obtenu est le symétrique de A par rapport à O.



En effet, la construction fait apparaître trois triangles équilatéraux de sorte que les points A, O et A' sont alignés.

Deuxième construction
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O passant par A.
Le cercle de centre A passant par O coupe $\mathcal{C}$ en B et C.
Le cercle de centre B passant par C coupe $\mathcal{C}$ en A' (et C).
Le point A' est le symétrique de A par rapport à O.



En effet, le cercle $\mathcal{C}$ est circonscrit au triangle équilatéral $A'BC$.

Construction I.3

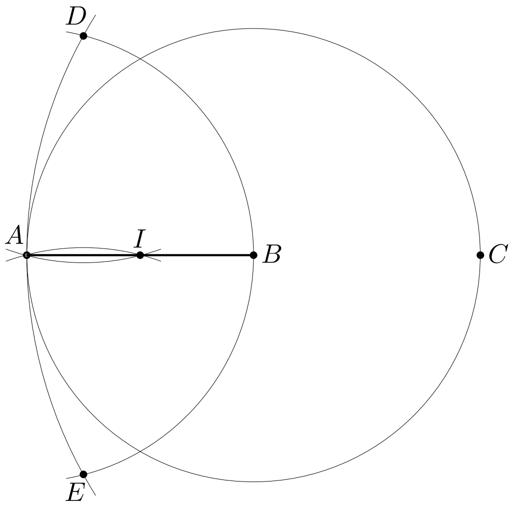
Étant donné un segment $[AB]$, construire, au compas, un segment de longueur nAB.

Construction
Posons $A_0 = A$ et $A_1 = B$.
Construire, pour $k = 2, \ldots, n$, le point A_k, symétrique de A_{k-2} par rapport à A_{k-1} (construction I.2).
Le segment $[AA_n]$ a pour longueur nAB.

Construction I.4

Construire, au compas, le milieu d'un segment $[AB]$ donné.

Construction
Soit C le symétrique de A par rapport à B (construction I.2).
Les cercles de centre A passant par B et de centre C passant par A se coupent en D et E.
Les cercles de centres D et E passant par A se coupent en I (et A).
Le point I est le milieu du segment $[AB]$.



Démonstration

Pour des raisons de symétrie, le point I appartient à la droite (AB).

Première démonstration. — Soient A' le symétrique de A par rapport à C et J le point d'intersection des droites (AB) et (DE).

J étant le pied de la hauteur issue de D dans le triangle DAA' rectangle en D, on a : $AD^2 = AJ \times AA'$.

Comme $AD = AB$ et $AA' = 4AB$, il vient : $AB = 4AJ$.

Or, J est le milieu du segment $[AI]$, donc $AB = 2AI$.

Ainsi I est le milieu du segment $[AB]$.

Deuxième démonstration. — Les triangles isocèles DAI et CDA ont un angle en commun ; ils sont donc semblables. D'où :

$$\frac{AI}{AD} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$$

Donc $AI = \dfrac{1}{2}AB$.

Ainsi I est le milieu du segment $[AB]$.

C.Q.F.D.

Construction I.5

Étant donnés une droite $\mathcal{D}$ et un point A, construire, au compas, le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.

Construction

Soit A' le symétrique de A par rapport à $\mathcal{D}$ (construction I.2).

Soit H le milieu du segment $[AA']$ (construction I.4).

Le point H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.

Construction I.6

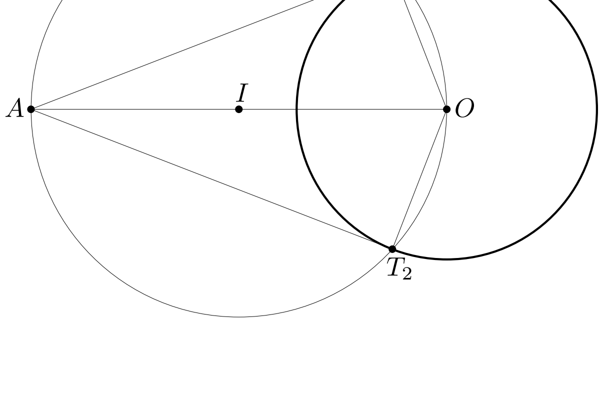
Étant donnés un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un point A extérieur à $\mathcal{C}$, construire, au compas, les points de tangence à $\mathcal{C}$.

Construction

Soit I le milieu du segment $[AO]$ (construction I.4).

Le cercle de centre I passant par A coupe $\mathcal{C}$ en T_1 et T_2.

T_1 et T_2 sont les points de tangence à $\mathcal{C}$.

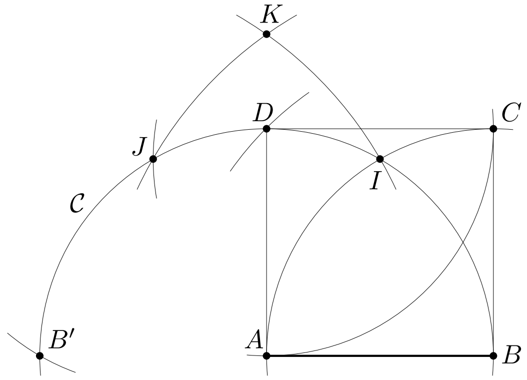


En effet, les triangles AOT_1 et AOT_2 sont rectangles en T_1 et T_2 respectivement, donc leur cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse $[AO]$.

Construction I.7

Construire, au compas, un carré dont un coté $[AB]$ est donné.

Construction
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A passant par B.
Soient I, J et B' les points de $\mathcal{C}$ obtenus en reportant trois fois la longueur AB à partir de B. B' est alors le point diamétralement opposé à B (construction I.2).
Les cercles de centre B passant par J et de centre B' passant par I se coupent en K.
Le cercle de centre B et rayon AK coupe $\mathcal{C}$ en D.
Les cercles de centre D passant par A et de centre B passant par A se coupent en C (et A).
Le quadrilatère $ABCD$ est un carré.



Démonstration
Dans le triangle $JB'B$ rectangle en J, on a : $BJ = AB\sqrt{3}$.
Dans le triangle KAB, rectangle en K, on a : $AK^2 = BK^2 - AB^2 = BJ^2 - AB^2 = 2AB^2$.
Par suite, $BD = \sqrt{2}AB$ est la diagonale d'un carré de côté AB.

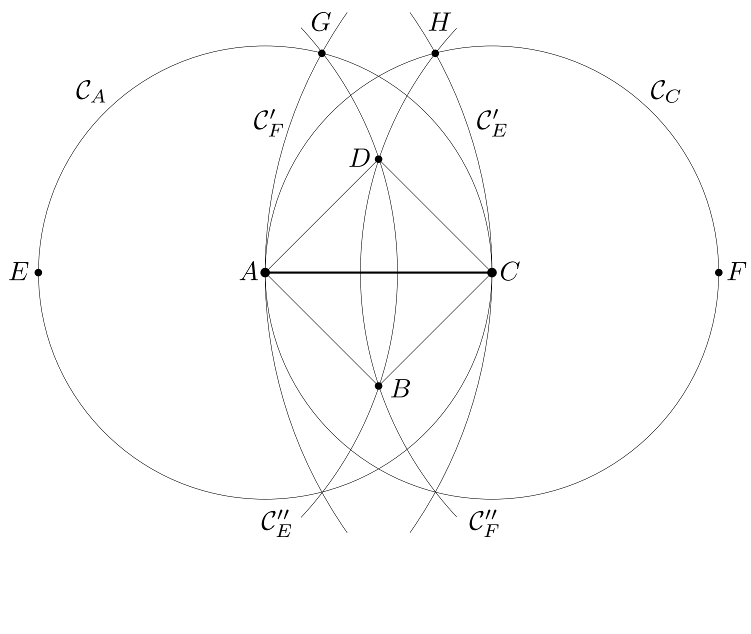
C.Q.F.D.

Remarque 1. — Cette construction permet répondre aux problèmes suivants :
- construire un carré inscrit dans un cercle donné ;
- étant donnés deux points A et B, construire un point K tel que (AK) et (AB) soient perpendiculaires.

Construction I.8

Construire, au compas, un carré dont deux sommets opposés A et C sont donnés.

Construction
On note $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_C$ les cercles de centres A et C et de rayon AC.
Soient E le symétrique de C par rapport à A et F le symétrique de A par rapport à C (construction I.2).
Les cercles $\mathcal{C}'_E$ et $\mathcal{C}'_F$ de centres E et F et de rayon $EC = FA$ coupent $\mathcal{C}_C$ et $\mathcal{C}_A$ en H et G.
Les cercles $\mathcal{C}''_E$ et $\mathcal{C}''_F$ de centres E et F et de rayon $EG = FH$ se coupent en B et D.
Le quadrilatère $ABCD$ est un carré.



Démonstration
En considérant le triangle AFG, on a :

$$\cos\left(\widehat{FAG}\right) = \frac{AF^2 + AG^2 - FG^2}{2AF \cdot AG} = \frac{1}{4}$$

Donc, dans le triangle EAG, il vient :

$$\begin{aligned} EG^2 &= AE^2 + AG^2 - 2AE \cdot AG \cos\left(\widehat{GAE}\right) \\ &= 2AC^2 + 2AC^2 \cos\left(\widehat{FAG}\right) \\ &= \frac{5}{2}AC^2 \end{aligned}$$

Or, la droite (BD) est la médiatrice des segments $[AC]$ et $[EF]$; donc, si I est le milieu (commun) de ces deux segments, on a :

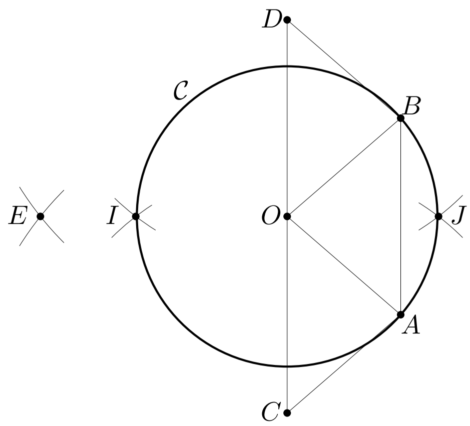
$$BI^2 = EB^2 - EI^2 = EG^2 - \frac{9}{4}AC^2 = \frac{5}{2}AC^2 - \frac{9}{4}AC^2 = \frac{1}{4}AC^2$$

Par suite : $BI = DI = \frac{1}{2}AC$.
Finalement $ABCD$ est un carré.

C.Q.F.D.

Construction I.9
Diviser, au compas, un arc de cercle en deux parties égales.

Construction
Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, A et B deux points de $\mathcal{C}$.
Soient C et D les points tels que $OBAC$ et $OABD$ soient des parallélogrammes.
Soit E le point d'intersection des cercles de centres C et D et de rayon $AD = BC$.
Soient enfin I et J les points d'intersection des cercles de centres C et D et de rayon OE.
Alors I et J appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ et divisent les petit et grand arcs de cercle $\widehat{AB}$ en deux parties égales.



Démonstration
La figure présentant un axe de symétrie auquel les points O, E, I et J appartiennent, il suffit de montrer que I et J sont sur le cercle $\mathcal{C}$.
Dans le parallélogramme $OBAC$, on a :

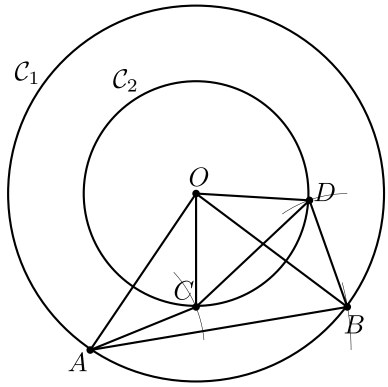
$$OA^2 + BC^2 = 2(OB^2 + OC^2)$$

soit : $BC^2 = 2AB^2 + R^2$.
Le triangle OCE étant rectangle en O, on a, d'après le théorème de Pythagore : $CE^2 = OC^2 + OE^2$.
Comme $CB = CE$, il vient : $OE^2 = AB^2 + R^2$.
Le triangle OCI étant rectangle en O, on a, d'après le théorème de Pythagore : $OI^2 = CI^2 - CO^2$.
D'après ce qui précède, il vient : $OI^2 = OE^2 - CO^2 = AB^2 + R^2 - CO^2 = R^2$.
Ainsi $OI = R$.
De même, on a $OJ = R$.
Ainsi I et J appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ et, par conséquent, divisent les petit et grands arcs de cercle $\widehat{AB}$ en deux parties égales.

C.Q.F.D.

Construction I.10
Étant données trois longueurs a, b et c, construire, au compas, la longueur d telle que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Construction
Premier cas : $b < 2a$
Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les cercles de centres O et de rayons respectifs a et c.
Soient $A, B \in \mathcal{C}_1$ tels que $AB = b$ (A et B existent puisque $c < 2a$).
Soit ℓ une longueur telle que $\ell > |a - c|$.
Les cercles de centres A et B et de rayon ℓ coupent $\mathcal{C}_2$ en C et D.
Alors $CD = d$.



En effet, les triangles OAC et OBD sont isométriques de sorte les triangles isocèles OAB et OCD sont semblables ; d'où :

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}$$

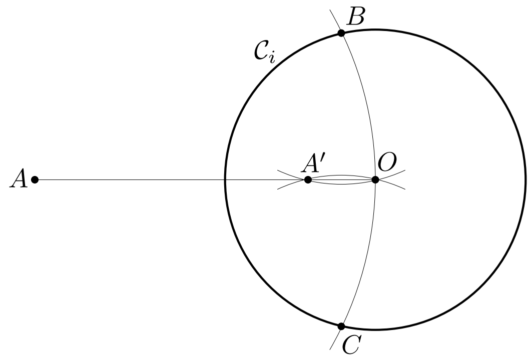
soit : $\frac{a}{b} = \frac{c}{CD}$.
On a bien $CD = d$.
Deuxième cas : $b \geqslant 2a$ et $c < 2a$
Il suffit de considérer l'égalité $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ au lieu de $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ et d'appliquer le premier cas.
Troisième cas : $b \geqslant 2a$ et $c \geqslant 2a$
Il suffit de construire une longueur na (construction I.3) telle que $b < 2(na)$ puis d'appliquer le premier cas en construisant la longueur d' telle que $\frac{na}{b} = \frac{c}{d'}$.
Alors $d = nd'$ (construction I.3).

Construction I.11
Diviser, au compas, un segment donné $[AB]$ en un segment de longueur $\frac{AB}{n}$.

Construction
Soit $C \in [AB)$ tel que $AC = nAB$ (construction I.3).
Soit d la longueur telle que $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{d}$ (construction I.10).
Alors $d = \frac{AB}{n}$.

Construction I.12
Construire, au compas, l'inverse A' d'un point A, le cercle d'inversion $\mathcal{C}_i$ étant donné par son centre O et son rayon R.

Première construction
Premier cas : $OA > \frac{R}{2}$
Soient B et C les points d'intersection de $\mathcal{C}_i$ et du cercle de centre A passant par O.
Les cercles de centres B et C passant par O se coupent en A' (et O).
Le point A' est l'inverse de A par rapport à $\mathcal{C}_i$.

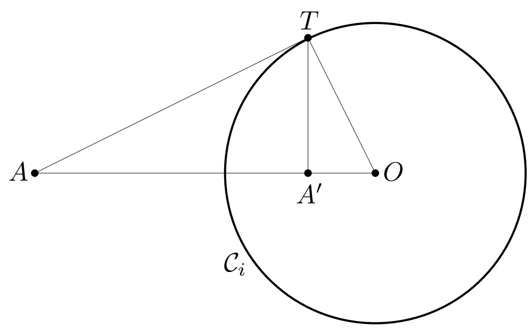


Pour des raisons de symétrie, le point A' appartient à la droite (OA).
Par ailleurs, les triangles isocèles ABO et $BA'O$ ont un angle en commun ; ils sont donc semblables. D'où :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OA'}$$

Soit : $OA \times OA' = OB^2 = R^2$.
A et A' sont donc inverses l'un de l'autre.
Deuxième cas : $OA \leqslant \dfrac{R}{2}$
Soit $A_1 \in [OA)$ tel que $OA_1 = nOA > \dfrac{R}{2}$ (construction I.3) et A'_1 l'inverse de A_1 par rapport à $\mathcal{C}_i$ (premier cas).
Soit $A' \in [OA)$ tel que $OA' = nOA'_1$ (construction I.3).
Le point A' est l'inverse de A par rapport à $\mathcal{C}_i$.
En effet, on a : $OA \times OA' = \dfrac{OA_1}{n} \times nOA'_1 = OA_1 \times OA'_1 = R^2$.

Deuxième construction
Premier cas : $OA = R$
A et A' sont confondus.
Deuxième cas : $OA > R$
Soit T un point de tangence $\mathcal{C}_i$ (construction I.6).
Soit A' la projection orthogonale de T sur la droite (OA).
Le point A' est l'inverse de A par rapport à $\mathcal{C}_i$.



En effet, les triangles rectangles TAO et $A'TO$ sont semblables : d'où :

$$\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA'}$$

Soit : $OA \times OA' = OT^2 = R^2$.
A et A' sont donc inverses l'un de l'autre.
Troisième cas : $OA < R$
Soient $A_1 \in [OA)$ tel que $OA_1 = nOA > R$ (construction I.3) et A'_1 l'inverse de A_1 par rapport à $\mathcal{C}_i$ (deuxième cas).
Soit $A' \in [OA)$ tel que $OA' = nOA'_1$ (construction I.3).
Le point A' est l'inverse de A par rapport à $\mathcal{C}_i$.

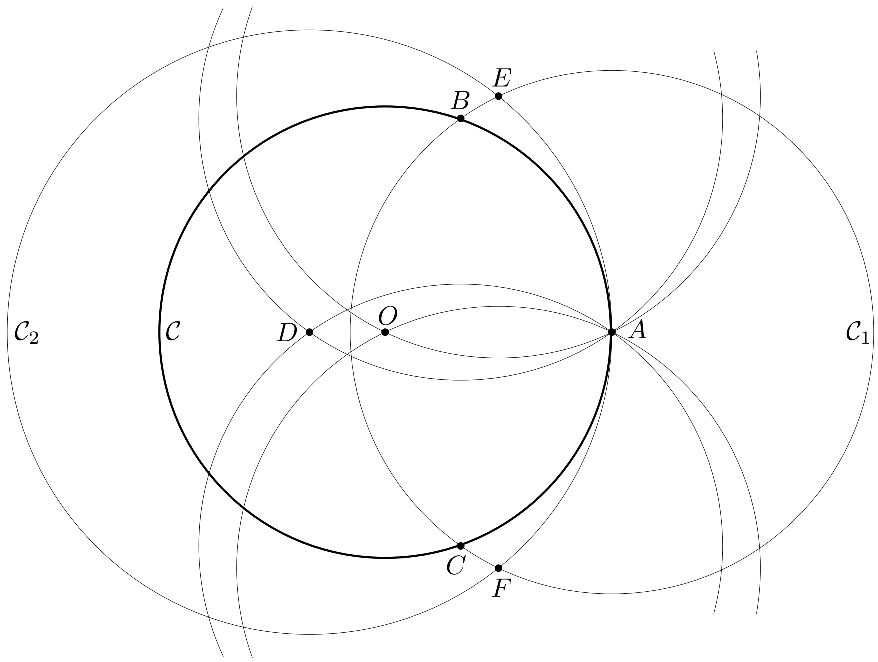
Construction I.13

À son retour de la campagne d'Italie, Napoléon Bonaparte signala à l'Académie des Sciences l'oeuvre du mathématicien italien Lorenzo Mascheroni (1750-1800) et présenta notamment le problème suivant :

Construire, au compas, le centre O d'un cercle $\mathcal{C}$ donné sans son centre

Pierre Simon de Laplace (1749-1827) aurait dit alors : « nous attendions tout de vous, général, sauf des leçons de géométrie ».

Première construction
Soient A et B deux points du cercle $\mathcal{C}$.
Le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A passant par B recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en C.
Les cercles de centres B et C passant par A se coupent en D (et A).
Le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre D passant par A coupe $\mathcal{C}_1$ en E et F.
Les cercles de centre E et F passant par A se coupent en O, centre du cercle $\mathcal{C}$.



Cette construction a été fournie par Napoléon. Cependant, on pense que l'auteur de cette solution est Mascheroni et que celle-ci a été soufflée à l'empereur par Gaspard Monge (1746-1818).

Démonstration
Soit O' le point obtenu par la construction précédente.
Notons que la figure admet un axe de symétrie, à savoir la droite à laquelle les points A, D, O et O' appartiennent.
De plus, tous les points de la figure appartiennent au même demi-plan déterminé par la tangente à $\mathcal{C}$ en A.
Première démonstration. — Soient I le point d'intersection de (BC) et (AD), J le point d'intersection de (EF) et $(O'A)$. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[AO']$.
Montrons que O' coïncide avec le centre O du cercle $\mathcal{C}$, autrement dit que J est le milieu de $[AO]$.
Notons R, R_1 et R_2 les rayons respectifs des cercles $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
I appartient à l'axe radical des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$, dont a la même puissance par rapport à ceux deux cercles :

$$IO^2 - R^2 = IA^2 - R_1^2$$

soit :

$$\begin{aligned} IA^2 - IO^2 &= R_1^2 - R^2 \\ IA^2 - (OA - IA)^2 &= R_1^2 - R^2 \\ 2 \times OA \times IA - OA^2 &= R_1^2 - R^2 \end{aligned}$$

donc : $AI = \dfrac{R_1^2}{2OA} = \dfrac{R_1^2}{2R}$.

De même, J appartient à l'axe radical des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, donc : $AJ = \dfrac{R_1^2}{2R_2}$.

Or, I est le milieu du segment $[AD]$, donc $AI = \dfrac{R_2}{2}$.

Par suite, on a : $IA = \dfrac{R_1^2}{2R} = \dfrac{R_2}{2}$, soit $R_1^2 = RR_2$.
Finalement : $AJ = \dfrac{R_1^2}{2R_2} = \dfrac{R}{2}$, autrement dit J est le milieu du segment $[AO]$.
Deuxième démonstration. — Les triangles OAB et BDA sont isocèles en O et B respectivement. Comme ils ont l'angle $\widehat{BAO}$ en commun, ils sont donc semblables. D'où :

$$\frac{AO}{AB} = \frac{AB}{AD}$$

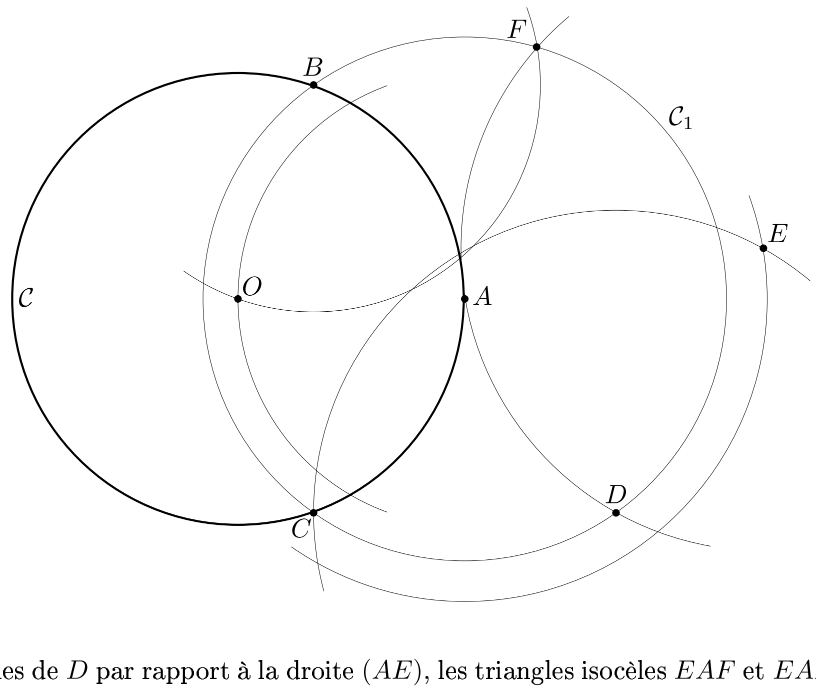
soit : $AB^2 = AD \times AO$.
Les triangles $EO'A$ et DAE sont isocèles en E et D respectivement. Comme ils ont l'angle $\widehat{EAO'}$ en commun, ils sont donc semblables. D'où :

$$\frac{AO'}{AE} = \frac{AE}{AD}$$

soit : $AE^2 = AD \times AO'$.
Or, B et E appartiennent au cercle $\mathcal{C}_1$, donc $AB = AE$.
D'où : $AO' = AO$.
Comme les point A, O et O' sont alignés et appartiennent à un même demi-plan, on en conclut que les points O et O' sont confondus.

C.Q.F.D.

Deuxième construction
Soient A et B deux points du cercle $\mathcal{C}$.
Le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A passant par B recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en C.
Soit D le point de $\mathcal{C}_1$ diamétralement opposé à B (construction I.2).
Les cercles de centres A et D et de rayon CD se coupent en E.
Le cercle de centre E et de rayon CD coupe $\mathcal{C}_1$ en F (et D).
La longueur BF est égal au rayon du cercle $\mathcal{C}$.
Les cercles de centre A et B et de rayon BF se coupent en O, centre du cercle $\mathcal{C}$.



Démonstration
F étant le symétriques de D par rapport à la droite (AE), les triangles isocèles EAF et EAD sont isométriques.
On a :

$$\begin{aligned}\widehat{FAB} &= \pi - \widehat{DAE} - \widehat{EAF} \\ &= \pi - 2\widehat{EAF} \\ &= \widehat{FEA}\end{aligned}$$

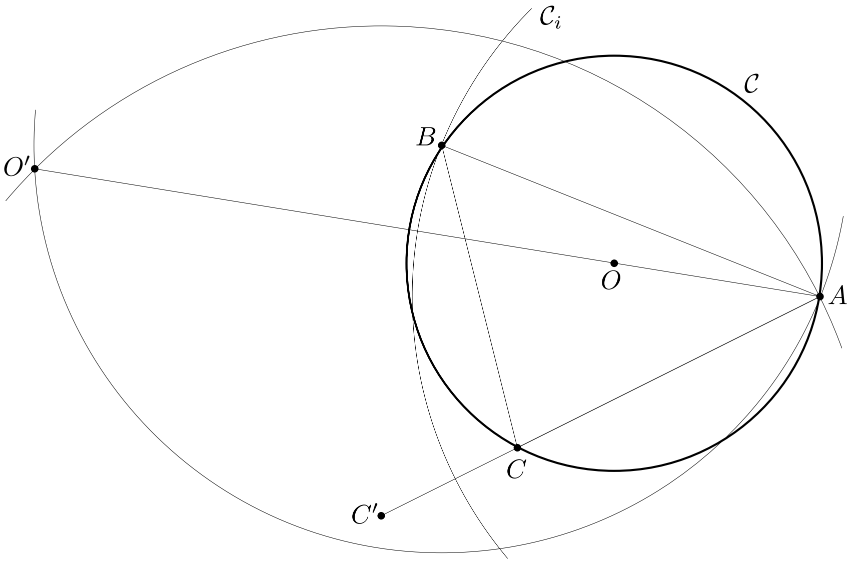
Le triangle ABF étant isocèle en A, on en déduit que les triangles ABF et EAF sont semblables.
Donc : $\dfrac{BF}{AF} = \dfrac{AF}{AE}$
Comme $AE = CD$, il vient : $AF^2 = CD \times BF$.
Soit H le pied de la hauteur issue de de A dans le triangle ABC. On a :

$$AB \times BC \times CA = 4R\mathcal{A}(ABC)$$

où R désigne le rayon du cercle inscrit au triangle ABC.
Comme $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{AH \times BC}{2}$, on obtient : $AB \times AC = 2R \times AH$.
Les triangles HAB et CDB rectangles en H et C respectivement étant semblables, on a : $AH = \dfrac{1}{2}CD$.
Donc : $AB \times AC = AB^2 = R \times CD$.
B et F appartenant au cercle $\mathcal{C}_1$, on a $AB = AF$, donc $CD \times BF = R \times CD$.
Ainsi $BF = R$.

C.Q.F.D.

Troisième construction
Soient A, B et C trois points du cercle $\mathcal{C}$.
Soient $\mathcal{C}_i$ le cercle de centre A passant par B et i l'inversion correspondante.
Soit C' l'inverse de C par i (construction I.12).
Les cercles de centres B et C' passant par A se coupent en A et O'.
L'inverse de O' par i est le centre O du cercle $\mathcal{C}$.



Démonstration
Les inverses de B et C par i sont B et C' respectivement.
On en déduit que les inverses des cercles de centres B et C' passant par A sont les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$.
En considérant les points d'intersection, on en déduit que l'inverse de O' est le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

C.Q.F.D.

Remarque 2. — Pour cette troisième construction, seule la donnée de trois points du cercle suffit à construire le centre ; le tracé du cercle est inutile.

II. Théorème de Mohr-Mascheroni

En 1797, dans *La geometria del compasso*, Lorenzo Mascheroni démontre que tout point constructible à la règle et au compas est constructible au compas seul.
Or, il s'avère que le mathématicien danois Georg Mohr a démontré ce résultat en 1672 dans *Euclides danicus* (Euclide le danois), ouvrage perdu et ignoré, retrouvé en 1928 chez un bouquiniste de Copenhague par un étudiant en mathématiques.

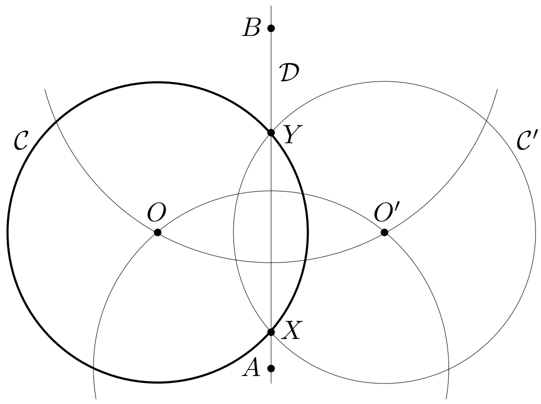
Théorème (Mohr-Mascheroni). — *Tout point constructible à la règle et au compas est constructible au compas seul.*

Démonstration
Il suffit de montrer que les points suivants sont constructibles au compas uniquement :
• les points d'intersection de deux cercles déterminé chacun par son centre et son rayon (construction II.1) ;
• les points d'intersection d'un cercle donné par son centre et son rayon et d'une droite donnée par deux points (construction II.2) ;

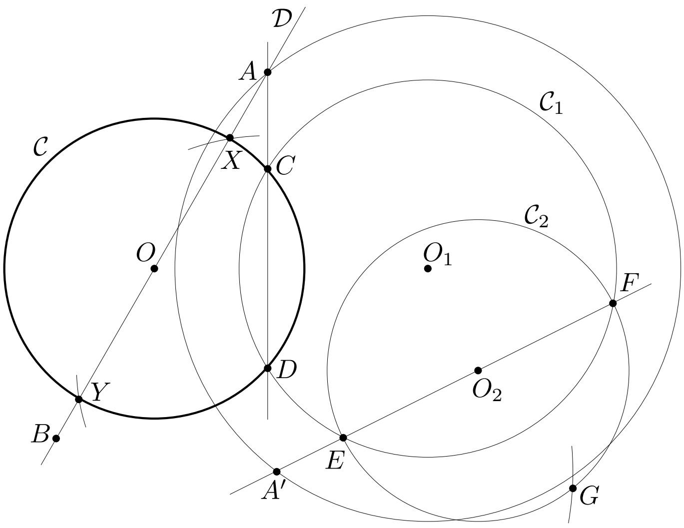
• les points d'intersection de deux droites déterminées chacune par deux points (construction II.3).
Construction II.1
Il n'y a rien à démontrer.

Première démonstration

Construction II.2
Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R et $\mathcal{D}$ une droite déterminée par deux points A et B.
Notons X et Y les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
Premier cas : O n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$
Les cercles de centre A et B passant par O se recoupent en O', symétrique de O par rapport à $\mathcal{D}$.
Soit alors $\mathcal{C}'$ le symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.
X et Y sont alors les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.



Deuxième cas : O appartient à la droite $\mathcal{D}$.
Soient $C \in \mathcal{C}$ et D le deuxième point d'intersection de $\mathcal{C}$ et (AC) (premier cas).
Soit $\mathcal{C}_1$ un cercle de centre O_1 passant par C et D et de rayon R_1 supérieur à R.
On considère deux points E et F de $\mathcal{C}_1$ tels que $EF = 2R$ (la longueur $2R$ est constructible à partir de deux points diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$).
Soit A' un point d'intersection de la droite (EF) avec le cercle de centre O_1 passant par A (premier cas).
Soient O_2 le milieu du segment $[EF]$ (contruction I.5) et $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre O_2 passant par E.
On considère un point G de $\mathcal{C}_2$ tel que $A'G = AD$.
Les points X et Y sont alors déterminés par : $X, Y \in \mathcal{C}, DX = EG, DY = FG$.



En effet, la puissance de A par rapport au cercle $\mathcal{C}$ est égale à :

$$AX \times AY = AC \times AD$$

La puissance de A par rapport au cercle $\mathcal{C}_2$ est égale à :

$$AC \times AD = AO_1^2 - R_1^2 = A'O_1^2 - R_1^2 = A'E \times A'F$$

On en déduit que $AX \times AY = A'E \times A'F$.
Il s'ensuit que la configuration déterminée par les points A, X, O, Y et D est isométrique à celle déterminée par

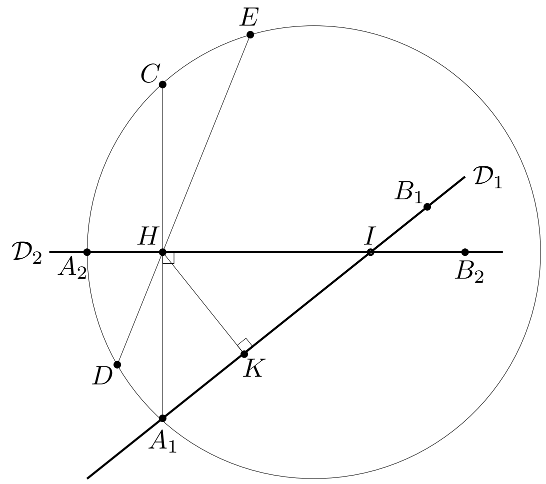
A', E, O_2, F et G.

Construction II.3

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites déterminées par les points A_1 et B_1 d'une part, A_2 et B_2 d'autre part.
Notons I leur point d'intersection.

Première méthode

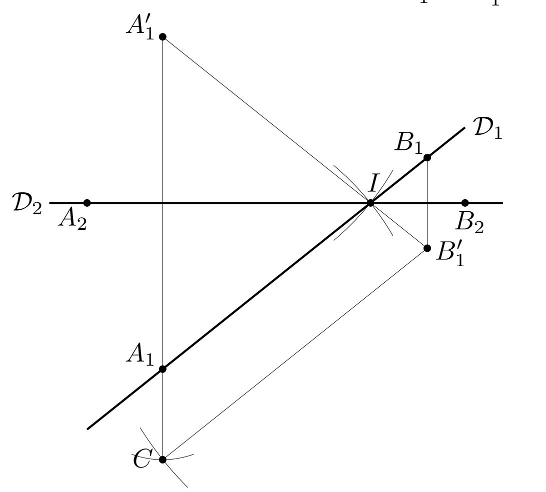
Soient H le projeté orthogonal de A_1 sur $\mathcal{D}_2$ et K le projeté orthogonal de H sur $\mathcal{D}_1$ (construction I.4).
On a : $A_1H^2 = A_1K \times A_1I$.
Construisons la longueur $\ell = A_1I$: soient C le symétrique de A_1 par rapport à H (construction I.2), $\mathcal{C}'$ un cercle passant par A_1 et C, $D \in \mathcal{C}'$ tel que $HD = A_1K$, et E le second point d'intersection de $\mathcal{C}'$ et (HD) (construction II.1). Alors $HE = \ell$.
En effet : $HA_1^2 = HA_1 \times HC = HD \times HE = A_1K \times HE$; il vient : $HE = A_1I = \ell$.



I est alors le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}_1$ et du cercle de centre A_1 et de rayon ℓ (deuxième cas de la construction II.2).

Deuxième méthode

Soient A_1' et B_1' les symétriques de A_1 et B_1 par rapport à la droite (A_2B_2) (construction I.1).
Soit C le point tel que $A_1B_1B_1'C$ soit un parallélogramme.
Soit d la longueur telle que $\dfrac{A_1'C}{A_1'A_1} = \dfrac{A_1'B_1'}{d}$ (construction I.10).
I est alors un des deux points d'intersection des cercles de centre A_1 et A_1' et de rayon d.



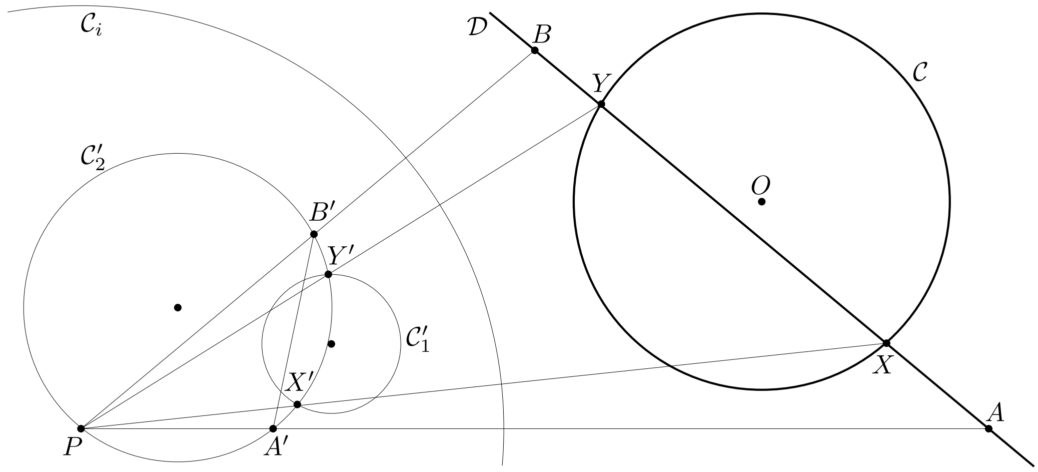
En effet, d'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{A_1'C}{A_1'A_1} = \dfrac{A_1'B_1'}{A_1'I}$.
Donc $A_1'I = A_1I = d$.

Deuxième démonstration

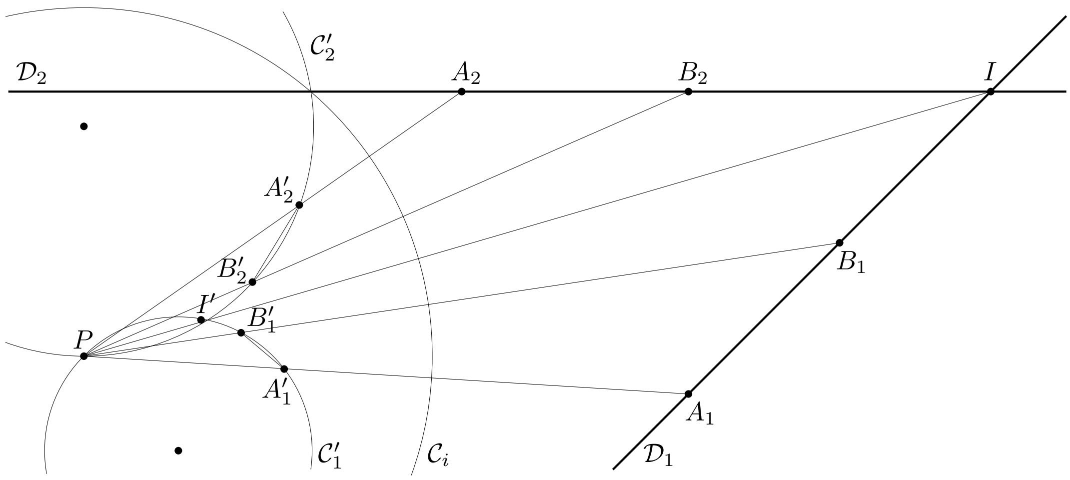
Construction II.2

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R et $\mathcal{D}$ une droite déterminée par deux points A et B.
Notons X et Y les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
Soient $\mathcal{C}_i$ un cercle ne contenant aucun élément de la figure, P son centre et i l'inversion par rapport à $\mathcal{C}_i$.
Soient A' et B' les inverses de A et B par i (construction I.12) et $\mathcal{C}_2'$ le cercle circonscrit au triangle $PA'B'$

(dont le centre est déterminé par la troisième construction I.13).
Soit $\mathcal{C}'_1$ l'inverse du cercle $\mathcal{C}$ par i (construit à partir des inverses de trois points de $\mathcal{C}$ et dont le centre est déterminé par la troisième construction I.13).
Soient X' et Y' les points d'intersection des cercles $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$.
Les points X et Y sont les inverses de X' et Y' par i (construction I.12).



En effet, le cercle $\mathcal{C}'_2$ est l'inverse de la droite $\mathcal{D}$ par i.
Donc, les points d'intersection des cercles $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$ ont pour inverses par i les points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$, à savoir X et Y.
Construction II.3
Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites déterminées par les points A_1 et B_1 d'une part, A_2 et B_2 d'autre part.
Notons I leur point d'intersection.
Soient $\mathcal{C}_i$ un cercle ne contenant aucun élément de la figure, P son centre et i l'inversion par rapport à $\mathcal{C}_i$.
Soient A'_1, B'_1, C'_1 et D'_1 les inverses de A, B, C et D par i (construction I.12).
Soient $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$ les cercles circonscrits aux triangle $PA'_1B'_1$ et $PC'_1D'_1$ (dont les centres sont déterminés par la troisième construction I.13).
Les cercles $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$ se coupent en I' (et P).
Le point I est l'inverse de I' par i (construction I.12).



En effet, les cercles $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$ sont les inverses des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ respectivement.
Donc, le point d'intersection I' des cercles $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$ a pour inverse par i le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, à savoir I.

C.Q.F.D.