

# LA DÉMONSTRATION, UNE APPROCHE HISTORIQUE ET CRITIQUE

Stéphane Gombaud, octobre 2007

## Introduction : démontrer et argumenter

Quel est le propre de la démonstration ? C'est un discours établissant une vérité nécessaire. C'est la production d'une conclusion, dans une forme de discours épurée qui se charge de remporter une adhésion universelle. On reconnaît ainsi une démonstration au fait qu'il s'agit d'un enchaînement rigoureux de propositions. Démontrer implique que celui qui raisonne ne laisse rien de côté et ne fasse intervenir rien d'inutile.

Démonstration : « *Déduction destinée à prouver la vérité de sa conclusion en s'appuyant sur des prémisses reconnues ou admises comme vraies* », André LALANDE, Vocabulaire technique et critique de la philosophie (1926).

Une réflexion sur la démonstration peut suivre différents chemins. Une enquête psychologique est sans conteste possible. Le discours démonstratif est pointilleux, scrupuleux, au contraire du discours ordinaire, véhicule de nos idées communes. Certes la rigueur honore ceux dont l'existence est appuyée sur des principes. Mais s'interroger sur cette rigueur n'est pas inutile, si cela nous conduit à distinguer le contrôle ou la constance de la manie ou de l'obsession, espèces de rigueur poussées à l'extrême, au point de devenir délirantes. Une enquête épistémologique est également possible. C'est elle que nous privilégierons. Avec sa définition, André LALANDE nous pousse à distinguer différentes formes d'inférence, à faire jouer l'opposition de la déduction et de l'induction. Pour avoir remarqué que la définition fait également intervenir une opposition entre démarche entreprise et résultat finalement obtenu, nous emprunterons un autre chemin, celui qui s'ouvre quand on s'efforce de poser la problématique de la validation d'une assertion. Démontrer, est-ce asséner une preuve ? Est-ce soutirer à autrui un consentement qui ne peut se refuser ?

Et l'on rencontre une sorte de dilemme.

Que dire de la démarche démonstrative sans exagérer la rupture avec le discours ordinaire, le bon sens ou l'opinion ? Est-elle une argumentation particulièrement réussie ou bien le contraire d'une argumentation, non par ce qu'elle dit mais par la façon dont elle le dit ?

Argumentation particulière ou si particulière que le terme même d'"argumentation" ne lui conviendrait pas, la démonstration diffère toujours de la communication ordinaire, celle que nous commettons quand nous voulons convaincre autrui voire nous convaincre nous-mêmes. La persuasion doit sans doute être identifiée comme le double de la démonstration. Mais la confusion menace... Le double est à la fois différent (il redouble, il est en plus) et similaire (il est copie, il entretient un rapport étroit avec l'original) ; le sosie ou le jumeau montrent que parfois il est très difficile de faire la part des choses ! Ainsi, celui qui identifierait démonstration et discours de persuasion se tromperait s'il croit pouvoir à bon droit évoquer la puissance de séduction des mots, le désir de convaincre, l'appui sur les passions qui sont *a priori* caractéristiques de l'art du rhéteur non de celui du savant. La démonstration n'est pas une ruse, un artifice trompeur ! Mais celui qui distinguerait radicalement deux types de discours se tromperait lui aussi, et peut-être plus gravement, en postulant l'existence d'un langage parfait opposé au langage ordinaire parce que lui seul obéirait vraiment à des règles. Qu'elle soit sophistiquée ou très simple, il reste sans doute une part de ruse dans la démonstration. Et dans le fait même de suivre des règles il y a sans doute une part d'impensé, d'arbitraire, de mystère.

Notre hésitation concerne en fait l'opposition de l'art et de la science. Alors que la démonstration en général est emblématique de la démarche scientifique il semble que certaines d'entre elles, vraiment originales, se rapprochent néanmoins d'une sorte d'art. Démonstrations par l'absurde ou bien par récurrence ne manquent pas d'élégance ! L'enquête que nous espérons mener à bien porte donc sur le rôle de la raison mais aussi sur celui de l'imagination dans la réalisation du travail scientifique en général et dans la mise en œuvre de procédures démonstratives en particulier.

En quoi l'ensemble assez prodigieux des démonstrations produites depuis des siècles par les savants de maintes disciplines fait-il honneur à l'esprit humain ?

## I L'invention de la démonstration

Il est d'usage d'employer le terme d'invention pour désigner les avancées de la connaissance. La production du savoir mobilise en effet l'imagination en plus de la raison. La mise au point de méthodes originales ou de concepts novateurs peut apparaître comme des sortes de conquête de l'esprit humain. Tel un génie créateur, celui qui invente rompt avec la tradition. Comme le voyageur en terre étrangère, il découvre de nouveaux horizons. Ces métaphores sont suggestives. Elles nous font comprendre qu'en science l'inventeur est celui qui propose à l'humanité de nouveaux outils.

De multiples querelles opposent les philosophes, ceux qui pensent que la connaissance scientifique est dans le prolongement de la connaissance ordinaire, empirique, et ceux qui affirment qu'elle est en réalité en rupture avec elle. Ces derniers, les idéalistes, ont tendance à présenter la science comme un ensemble d'idées à contempler. La science supposerait une sorte de conversion du regard, une capacité à percevoir ce qui est fixe au-delà des apparences trompeuses car changeantes. Les premiers insistent en revanche sur les pratiques. Ils supposent un développement du savoir à partir des sensations. L'intelligence n'est pas identifiée à une espèce de lumière divine, elle est seulement une capacité à apprendre de ses erreurs. Ainsi les empiristes croient en l'émergence progressive d'idées abstraites à partir de données d'observation, de raisonnements simples puis complexes à partir de méthodes approximatives.

L'invention de la démonstration est particulièrement polémique. Le discours du philosophe idéaliste assigne une origine absolue à la démonstration. L'empiriste fait plutôt de l'invention des premières démonstrations une sorte d'accident heureux. Ces deux versions ont bien des arguments à charge et à décharge. Nous tenterons de produire une version intermédiaire, selon laquelle la science aurait un commencement historique mais aussi une sorte d'origine indiscutable, ce qu'on pourrait appeler ses conditions de possibilité car relevant du droit non des faits. Et si la démonstration relève bien d'un type de discours particulier, voire d'un genre singulier d'argumentation, elle est un fait culturel. Il faut donc la penser dans sa diversité et dans ses multiples inventions et ré-inventions.

### Une origine incertaine

C'est par une reconnaissance de dettes que nous commencerons ce développement.

LEIBNIZ, dans ses Nouveaux Essais sur l'entendement humain (1705), reconnaît que dans l'Antiquité les Grecs ont fait progresser les mathématiques au point qu'il ne serait pas faux de dire qu'ils sont les premiers parvenus à des raisonnements vraiment rigoureux, à des démonstrations. L'humanité leur serait donc redevable : « *Il faut avouer que les Grecs ont raisonné avec toute la justesse possible dans les mathématiques et qu'ils ont laissé au genre humain les modèles de l'art de démontrer* ».

S'adressant aux empiristes, desquels il veut obtenir une sorte de reddition, LEIBNIZ est sûr de son fait : en Grèce, aux alentours du V<sup>ème</sup> siècle avant notre ère, une sorte de révolution s'est opérée. Les mathématiques ont alors été constituées en science, à partir des rudiments de procédés de calcul et de méthodes de construction de figures qui étaient connues depuis longtemps sans doute. Il est devenu possible de produire une connaissance qui ne soit pas tâtonnement ou à-peu-près, simple recueil de faits avérés et de recettes efficaces, mais qui constitue un savoir nécessaire, scientifique puisque découvrant la raison des choses.

Sans contredire LEIBNIZ sur l'importance de cette époque fondatrice, mais sans aller jusqu'à dire que les Grecs ont effectivement produit « *les modèles de l'art de démontrer* », nous essaierons de soutenir une position plus mesurée et plus en accord avec l'histoire des mathématiques en soulignant que cette origine de la démonstration est mythique. Nous verrons alors quelle dette il nous faut reconnaître, mais aussi quelle illusion gouverne à son insu LEIBNIZ lorsqu'il passe de l'idée suivant laquelle il n'y a rien à reprocher à la justesse de raisonnements comme ceux que contiennent les Eléments d'EUCLIDE à l'idée d'un ou de plusieurs modèles de la démonstration sur lesquels il n'y aurait plus rien à redire.

Paradoxalement, la citation même de LEIBNIZ nous invite à une relativisation. Si démontrer, c'est raisonner « *avec toute la justesse possible* » dans un domaine, rien ne dit qu'il soit possible d'être aussi juste dans d'autres domaines, voisins ou éloignés. De plus, un discours cohérent à une époque doit l'être à toutes les époques mais rien ne dit qu'à diverses époques le souci d'exactitude demeure

inchangé. Qu'est-ce que la « *justesse possible* » ? Les conceptions de la justice changent avec les époques, pourquoi celles de la justesse n'évolueraient-elles pas ?



Extrait du "Papyrus Rhind" écrit par le scribe Ahmès (vers - 1650), découvert sur le site de la ville de Thèbes

On rapporte que Thalès apprit des Égyptiens comment mesurer la distance d'un navire en mer et comment mesurer la hauteur d'une pyramide à l'aide de l'ombre d'un bâton planté dans le sol.

Il semble y avoir deux interprétations de la façon dont Thalès aurait pu procéder pour mesurer cette distance.

La première de ces méthodes est basée sur un théorème qui dans plusieurs ouvrages de géométrie moderne est appelé le *Théorème de Thalès*. Il s'énonce comme suit :

*"Toute droite tracée parallèlement à l'un des côtés d'un triangle détermine un nouveau triangle semblable au premier."*

Selon cette première interprétation, il faut prendre une visée à l'aide d'un instrument analogue à une équerre et déterminer les marques de cette visée sur les bras de l'équerre."

[www.clevislazon.gc.ca/professeurs/mathematique/rossa/Logimath%5C02%20Thales.pdf](http://www.clevislazon.gc.ca/professeurs/mathematique/rossa/Logimath%5C02%20Thales.pdf)

« (...) même s'il était possible de percevoir que le triangle a ses angles égaux à deux droits, nous en chercherions encore une démonstration, et que nous n'en aurions pas une connaissance scientifique : car la sensation porte nécessairement sur l'individuel, tandis que la science consiste dans la connaissance universelle » ARISTOTE, *Seconds Analytiques*, I. 1

Il convient de reconnaître la possibilité d'une évolution des idées sur la justesse d'une assertion ou, comme dirait le logicien, sur la validité d'une proposition. Afin de ne pas tomber dans les travers symétriques que sont la glorification des Anciens ou bien l'ingratitude à leur égard, il faut partir de l'idée non naïve que la démonstration a une origine historique et qu'elle garde donc un caractère historique. Si nous retenons l'hypothèse suivant laquelle la représentation du monde a considérablement changé, de même que les conditions économiques et politiques, il devient à peu près certain que les savants grecs ne démontreraient pas leurs propositions de la manière dont procèdent, de nos jours, les mathématiciens professionnels. Et, supposant une différence, même une grande différence pour tenir compte de la différence de conscience de suivant les contextes historiques, nous devrions pouvoir être plus attentifs à ce qui caractérise dans leur particularité voire leur singularité les productions des siècles passés.

Repartons de l'opinion. À partir du XIX<sup>ème</sup> siècle, il est devenu commun d'évoquer quelque chose comme un "miracle grec". Cette opinion trouve des justifications. Les Egyptiens ont certes précédé les Grecs dans la géométrie, comme en témoignent des papyrus nous étant parvenus, le papyrus Rhind par exemple. Mais chez eux, comme chez les Sumériens ou bien chez les Indiens, la géométrie est restée une sorte de technique. Le souci de l'efficacité ne s'est pas mué en amour de la rigueur, comme si l'invention de la géométrie ne s'était pas accompagnée d'une prise de conscience concernant les possibilités propres de l'esprit humain. En revanche, ARISTOTE en écrivant les *Analytiques* ou certains textes de la *Métaphysique* (seconde moitié du IV<sup>ème</sup> siècle avant J.-C.) montre qu'il accorde moins d'importance aux applications (bornage des terrains, calcul d'aires, problèmes usuels de partage) qu'à la production d'un savoir nécessaire, s'imposant universellement : le savoir théorique que les hommes ayant du temps libre, des loisirs, doivent se faire un honneur d'acquérir et de développer dans toute la mesure de leurs moyens. Est recherché un discours qui s'élabore dans la

méditation, prévient ses réticences spontanées mais aussi toutes les objections qu'un étranger pourrait produire, lors d'un échange de vues sans concessions.

Bien interprétée l'idée du miracle grec renvoie à une culture déterminée, avec une conception propre de l'honneur, plus soucieuse de l'efficacité qu'il n'y paraît à première vue puisque la « *connaissance universelle* » est identifiée comme étant par principe la seule à avoir une application universelle.

Considérons maintenant la diversité culturelle sous un autre angle. Il existe une origine grecque de la démonstration, que nous venons d'évoquer avec LEIBNIZ. Mais il existe aussi une origine chinoise, les lettrés, savants des premiers royaumes chinois, ayant conçu de manière indépendante des modèles démonstratifs. Cette multiplicité des traditions nous pousse à rejeter l'idée, non seulement simpliste mais bel et bien illusoire, suivant laquelle il y aurait une définition de la démonstration que vérifieraient les divers modèles que les savants ont été capables d'édifier à partir d'elle au cours des temps. Toute définition portant sur la démonstration correspond à des partis pris. La plupart des définitions s'appuient sur une ou plusieurs démonstrations jugées exemplaires. Elles ne se justifient pas complètement.

En réalité on peut assigner une origine historique de la démonstration à chaque définition de ce qu'est la démonstration, aucune définition n'épuisant sa nature.

Voici donc notre premier résultat, en apparence négatif. Nul ne peut fixer l'origine de la démonstration sans délimiter une aire de civilisation ni sans fixer arbitrairement des conditions suffisantes pour qu'un discours soit considéré comme démonstratif.

### **La force probante des mathématiques et l'axiomatique**

De fait, si l'idée d'un modèle grec s'est imposée avec autant de force c'est que, sur quelques générations, les Grecs réussirent à produire des démonstrations en logique, en arithmétique et en géométrie mais encore en astronomie et en statique. Et, avec leurs philosophes, ils théoriserent cette expansion, ne laissant à personne d'autre le soin de reconnaître le progrès effectué. Avec EUCLIDE et ARCHIMEDE voyons d'abord le génie grec à l'œuvre. Deux exemples ne peuvent suffire à produire une vue d'ensemble sur ce progrès. Mais ils illustrent suffisamment la naissance d'une tradition scientifique.

Premier exemple : la première des démonstrations du premier livre des Eléments d'EUCLIDE.  
*Proposition 1 :*

*Exposition. Soit AB une droite donnée et finie.*

*Détermination. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.*

*Construction. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence ACD (demande 3) ; et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence BCE ; et du point C, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites CA, CB (demande 1).*

*Démonstration. Car, puisque le point A est le centre du cercle ACD, la droite AC est égale à la droite AB (définition 15) ; de plus, puisque le point B est le centre du cercle BCE, la droite BC est égale à la droite BA ; mais on a démontré que la droite CA était égale à la droite AB ; donc chacune des droites CA, CB est égale à la droite AB ; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (notion 1) ; donc la droite CA est égale à la droite CB ; donc les trois droites CA, AB, BC sont égales entre elles.*

*Conclusion. Donc le triangle ABC (définition 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie AB. Ce qu'il fallait faire.*

*Rappels :*

*Demande 3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.*

*Définition 15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence ; toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.*

*Définition 24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.*

Second exemple : extraits de la lettre à Eratosthène précédant le traité de La Méthode d'ARCHIMEDE, œuvre qui n'a été redécouverte sur un palimpseste qu'en 1899. Ces propos nous

renseignent sur la façon dont un mathématicien grec pouvait envisager la rigueur des démonstrations :  
 « J'ai jugé à propos de te décrire, et de développer dans ce même livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique. Mais je suis persuadé que cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes ; certaines propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, parce qu'une étude faite par cette méthode n'est pas susceptible de démonstrations ; car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance. »

Revenons à notre époque et considérons la science que nous pratiquons aujourd'hui, au lycée ou à l'Université. La comparaison permise avec les exemples précédents montre plus qu'une différence de style.

Comment se fait-il que les Grecs portaient toute leur confiance en de telles démonstrations ? Le plus souvent démontrer revenait à produire un exemple générique. Ce qui est montré (du triangle, par exemple) à partir de l'exemple générique (le triangle scalène ABC) ne fait intervenir que des prémisses générales, valables pour une classe d'objets (tous les triangles, scalènes ou non). Dès lors qu'il n'y a aucune raison du contraire, la conclusion s'impose à l'esprit. La proposition est donc démontrée. Ceci ne serait pas valable dans le cas de l'exemple particulier (le triangle rectangle). Le raisonnement ferait alors jouer une prémisse particulière (un angle droit) et la prudence imposerait de suspendre la généralisation du résultat et même de chercher un contre-exemple (par exemple le triangle équilatéral). Le recours à l'exemple générique n'est formellement pas injustifié ; les pratiques modernes de la démonstration se passent néanmoins de ce procédé, archaïque en un sens, en formalisant la généralisation elle-même au lieu de la supposer.

Livre I des Eléments d'EUCLIDE, proposition 4 :

« Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent.

Soient deux triangles ABC, DEF ayant les deux côtés AB, AC égaux aux deux côtés DE, DF, chacun à chacun, d'une part AB à DE, d'autre part AC à DF, ainsi que l'angle BAC égal à l'angle EDF.

Je dis que la base BC aussi est égale à la base EF, et le triangle ABC sera égal au triangle DEF, et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent, d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE.

En effet, le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, d'une part le point A étant posé sur le point D, d'autre part la droite AB sur DE, le point B aussi s'ajustera sur le point E parce que AB est égale à DE. Alors AB étant ajustée sur DE, la droite AC s'ajustera sur DF parce que l'angle sous BAC est égal à celui sous EDF. De sorte que le point C aussi s'ajustera sur le point F parce que, de plus, AC est égale à DF. Mais B a aussi été ajusté sur E. De sorte que la base BC s'ajustera sur la base EF et lui sera égale. De sorte que tout le triangle ABC s'ajustera aussi sur tout le triangle DEF et lui sera égal, et les angles restants s'ajusteront sur les angles restants et leur seront égaux, d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE. »

Antoine-Augustin COURNOT, De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie (1847)

« Je veux prouver que deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et deux angles adjacents égaux chacun à chacun ; et pour cela, j'imagine de placer les deux triangles l'un sur l'autre de manière que les côtés et les angles égaux coïncident ; après quoi il suffit de se reporter à la notion ou à la définition du triangle, pour reconnaître que ceci entraîne la coïncidence des autres parties. Cette synthèse ou construction idéale était nécessaire pour rendre manifeste la proposition énoncée ; elle fait l'essence et la force probante de la démonstration. »

L'historien des sciences peut ajouter quelques remarques sur l'usage des formules et des lettres, ou sur le plan de la démonstration. Nous nous en tiendrons à une remarque décisive, portant sur l'usage des

diagrammes en géométrie. Les figures sont pour la science grecque des diagrammes, non pas des moyens d'atteindre la vérité mais des représentations du problème et de ses résolutions possibles. Quelques démonstrations reposent entièrement sur ce qui est visualisé à l'aide des figures, par exemple une superposition (de côtés de triangles, par exemple) réalisée non matériellement (en découpant les figures pour en mettre une sur l'autre) mais idéalement, par une expérience de pensée. Cela rejoint le procédé de la démonstration comme établissement de la vérité du cas général, à l'aide d'un exemple générique. COURNOT parle ainsi de « *synthèse ou construction idéale* » incarnant la force de la démonstration. Ici, il s'agit d'une sorte de mouvement générique, en droit reproductible autant de fois qu'on le souhaite, établissant une conclusion nécessaire.

Sans trop s'écarter de ce que LEIBNIZ veut nous faire reconnaître, on peut dire que ce qui est appelé « *connaissance universelle* » comporte deux éléments, le développement de deux sortes d'activités libérales, la philosophie et la science théorique, déductive, sur fond de rupture avec la pensée mythique. Voyons que cette rupture peut s'interpréter simplement comme reconnaissance par le sujet pensant de quelque chose qui le transcende, qu'il doit accepter pour être libre : la nécessité comprise comme loi universelle et non comme destin personnel.

Quoique digne d'estime à bien des égards, la pensée mythique peut être suspectée d'introduire de la confusion dans les esprits. Elle peut être reconnue comme insatisfaisante en ce qu'elle produit des récits invraisemblables et laisse en suspend la question de la vérité – le vrai et l'utile étant même parfois grossièrement confondus. Le “miracle grec” correspond, si l'on veut bien présenter l'histoire d'une manière très schématique, à la reconnaissance de la supériorité de la raison. C'est elle qui gouverne le monde ou doit le gouverner. Au besoin, quand elle encourage la superstition et entretient la crédulité, l'autorité sacerdotale peut être remise en question, critiquée voire récusée, *a fortiori* les autres autorités locales, morales et politiques.

En quoi le discours rationnel est-il différent des leçons coutumières ? De même qu'un système philosophique dévoué par nature à la recherche de la vérité, une théorie déductive est un ensemble de propositions réglées, produites dans le souci constant de la cohérence du tout. Une telle théorie est une axiomatique. Remettant à plus tard la justification du mot, que les Grecs n'utilisaient pas, précisons les trois idées qui composent la notion. Une méthode axiomatique contient précisément (ou se doit de contenir) tous les renseignements nécessaires sur les principes à utiliser pour raisonner (détermination des fondements) et les différentes règles deductives à employer pour forger à partir d'énoncés primitifs des énoncés dérivés (fixation d'une procédure d'extension). De plus, la méthode peut être considérée comme assurée (conformément au souci de vérité affiché).

Par ces trois traits essentiels, l'axiomatique est ainsi une conceptualisation qui rompt avec la pensée traditionnelle, son goût de l'à peu près et du bricolage, et découvre un nouvel horizon de sens. Il est permis de parler d'un idéal, celui de l'esprit humain parvenant à s'élever par ses propres moyens jusqu'à la saisie de propositions nécessaires, de vérités absolues, ne dépendant pas de la langue dans laquelle elles sont exprimées, encore moins de la personne qui les énonce.

Permettons-nous une brève excursion dans l'histoire des mentalités, voire dans la légende. Une femme pouvait en droit produire des démonstrations n'ayant rien à envier à celles des hommes. HYPATHIE d'Alexandrie (370-415) incarne dans l'histoire de l'humanité cette femme mathématicienne pouvant égaler, voire dépasser les hommes.

Les Eléments d'EUCLIDE sont un monument de l'esprit humain en étant la première axiomatisation de la géométrie. Le mathématicien ne se contente pas de compiler des résultats scientifiques. Il isole en tête de son œuvre les principes du raisonnement (axiomes, postulats et demandes). Il se plie à quelques procédures deductives, même s'il ne recourt jamais à certaines comme le raisonnement par contraposé. Il produit des théorèmes, la solidité de l'ensemble étant garantie par le refus systématique de conclusions non démontrées.

Les références à EUCLIDE sont abondantes dans la philosophie. Mais rares sont les auteurs qui, reconnaissant l'apport de cette œuvre en l'identifiant clairement à la méthode axiomatique. En voici un exemple.

ALAIN reconnaît certes le caractère nécessaire des propositions mathématiques, avec l'exigence de publicité qui oppose le raisonnement scientifique aux savoirs ésotériques, mais il s'interdit dans le

même temps de penser l'opposition de la démonstration et de l'argumentation. En effet, s'il ne retient comme effet discursif que de pouvoir répondre à toutes les objections, il ne démarque pas le théorème de la bonne plaidoirie, construite de manière à prévenir toute objection. De plus, Alain semble croire que la subtilité d'Euclide tient dans sa volonté de démontrer même les propositions qui s'imposent à tous d'évidence.

ALAIN, « Apprendre par l'esprit », Libre propos, 1923

*« Qu'est-ce donc qu'apprendre par l'esprit ? C'est faire société. Le géomètre formé selon la subtilité euclidienne est toujours occupé de convenir avec un interlocuteur imaginaire, au moyen d'une définition sans ambiguïté ; et de là par raisonnement, conquiert l'autre, répondant à toutes les objections possibles. D'où résulte cette connaissance si bien nommée "universelle" c'est-à-dire commune à tout esprit. Que l'objet en dise ce qu'il voudra. L'attention du géomètre ne se porte point à ce que répond le cercle, mais bien à ce que pourrait répondre l'autre esprit avec lequel il se met en conversation. Cette manière de penser est démontrer ; et rien n'étonne plus un esprit sans culture que ces efforts pour démontrer correctement ce qui d'ailleurs ne fait point doute ».*

Dans ce texte, ALAIN nous parle finalement moins de la démonstration que de l'argumentation philosophique, conçue comme devant s'abstraire du sensible (faisant parler un interlocuteur imaginaire plutôt que la figure du cercle), devant commencer par la remise en doute hyperbolique des croyances – comme chez DESCARTES, la rigueur suppose que nous partions de définitions dépourvues d'ambiguïté et de principes évidents, puis que nous progressions continûment par un enchaînement des idées et des jugements. Apprendre par l'esprit, ou mieux par l'entendement, serait produire des assertions indubitables, partant nécessaires.

L'expérience de pensée du double, « *interlocuteur imaginaire* », sert à introduire l'idée d'universalité comme ce qui transcende les cultures. Ainsi le libéralisme que nous venons d'évoquer sous le titre de "miracle grec" est-il implicitement reconnu par le philosophe comme une sorte de souci de soi opposé aux exigences de la vie quotidienne et ses préoccupations utilitaires. Mais, en opérant ce glissement idéologique, le tort d'ALAIN est peut-être de rapporter la démonstration à une façon de penser et non pas à une façon de parler ou de produire des discours vérifiables, critiquables. Faire société, en effet, ce n'est pas partager des idées mais des paroles. Ce n'est pas former un Esprit coupé de tout, c'est élaborer en commun des règles. La puissance du dialogue a conduit l'idéaliste à définir la méditation comme un dialogue intérieur, une sorte de confrontation de son propre esprit avec tous les autres esprits. C'est ce que suppose l'expression "engager une conversation" qui suppose l'amitié, partant l'égalité des interlocuteurs, comme la charité, partant la relation dépassionnée sans laquelle il est bien difficile de reconnaître ses propres erreurs. Il est patent que l'efficacité même du dialogue – ou bien celle de la raison graphique pour les peuples ayant adopté l'écriture – conditionne l'idée même d'objectivité et son élévation à l'universel.

### **Elaborer un raisonnement nécessaire**

Revenons à notre interrogation. Nous pouvons ne pas savoir exactement ce qu'est une démonstration mais il est établi qu'il n'y a pas de démonstration là où il n'y a pas doute systématique porté sur la validité d'une assertion. La démonstration est inséparable du discours qui s'efforce d'établir le caractère nécessaire d'une proposition.

Pour comprendre l'évolution du discours scientifique, notre enquête historique peut maintenant suivre comme fil directeur la progressive prise de conscience de la nécessité d'axiomatiser le système de propositions qui constitue les mathématiques. Cette histoire se déroule sur plusieurs millénaires, s'étendant de la Grèce antique au XIX<sup>ème</sup> siècle.

D'abord il y eut la reconnaissance de la nécessité comme ce qui fonde la rigueur logique. Au livre 5 de la Métaphysique, chapitre 6, ARISTOTE précise ce qu'il faut entendre par nécessité :

*« quand une chose ne saurait être autrement qu'elle n'est, nous disons : il est nécessaire qu'elle soit ainsi. Et cette nécessité est en quelque sorte la raison de tout ce qu'on appelle nécessaire. C'est en effet quand le désir ne peut atteindre son objet par suite de la violence, qu'on dit qu'il y a eu contrainte*

*employée ou subie. [...] La nécessité est donc à nos yeux ce en vertu de quoi il est impossible qu'une chose soit autrement. Ainsi, les démonstrations des vérités nécessaires sont nécessaires parce qu'il est impossible, si la démonstration est rigoureuse, que la conclusion soit autre qu'elle n'est. Les causes de cette impossibilité, ce sont ces propositions premières, qui ne peuvent être autres qu'elles ne sont, qui composent le syllogisme. »*

Différente de la simple contrainte, la nécessité d'une conclusion démontrée s'impose par elle-même. Elle s'impose en droit à toute personne raisonnable. ARISTOTE dégage ainsi l'existence d'un principe distinct du désir de détenir la vérité, le *nous* – ce qui nous permet d'être conscient de la vérité de l'Être, ce qu'on peut appeler "l'esprit" – qui est le principe de principes logiques absolus, en particulier du principe de non-contradiction suivant lequel il est impossible qu'une même chose en même temps soit et ne soit pas. Nier une démonstration, c'est verser non dans l'opinion relative mais dans l'absurde.

Mais ARISTOTE considère la nécessité dans une perspective qui est fondamentalement dogmatique. Pour lui, est nécessaire la proposition qui découle d'autres propositions nécessaires. Les premières propositions découlent d'idées nécessaires, ou axiomes, qui tirent leur nécessité de leur vérité que nul ne devrait songer à remettre en cause. Ce sont les idées les plus simples que nous puissions avoir. Et, pour lui, l'étude de cette vérité non-discursive relève du philosophe, non du savant. Ce n'est pas, d'après lui, au mathématicien de réfléchir aux axiomes qui fondent le savoir mathématique ni d'établir leur vérité. Pas d'avantage ce n'est au physicien qui s'intéresse à l'optique, d'intervenir dans le travail du mathématicien. Le dogmatisme trace des frontières nettes entre la science des principes (métaphysique) et les mathématiques (sciences des grandeurs et des formes géométriques considérées comme éternelles) mais aussi entre la science "fondamentale" et la science "appliquée". Ceux qui refusèrent ce dogmatisme firent progresser la science ainsi que la compréhension de ce qui se joue avec la démonstration.

Le seul progrès qui aurait été fait par la suite concernerait cette simplicité synonyme de nécessité pour nos premières idées. Les philosophes rationalistes ont tenté d'imposer leur thèse selon laquelle il s'agirait d'idées innées, en un sens miraculeuses – car elles nous feraient sortir de la nature, ne ressortant d'aucune perception ni d'aucune passion – ou plutôt divines – car elles seraient permanentes, si fortement imprimées en chacun de nous qu'elles seraient ineffaçables de notre esprit. Il s'agirait de petites étincelles d'entendement divin dont nous serions les légataires. Les empiristes refusèrent globalement cette thèse. Pour eux nos idées primitives sont comme toutes nos autres idées tirées de notre expérience.

La nécessité n'est pas pour le mathématicien d'aujourd'hui ce que les philosophes en ont dit. L'axiome n'est pas nécessairement vrai. On ne se trompe guère si on le juge commode, en ne craignant pas de signifier qu'il a une large part d'arbitraire. Une compréhension plus approfondie doit faire intervenir l'idée d'axiomatique, comprise comme système d'axiomes, car ce n'est pas isolément que l'axiome est doté de nécessité. La réflexion critique est féconde précisément quand elle se charge de traquer les axiomes passés inaperçus, car trop évidents, et d'établir pour chaque axiome son indépendance vis-à-vis de tous les autres axiomes d'un système.

Au XIX<sup>ème</sup> siècle, les géomètres ont progressivement accepté l'idée qu'il existe différentes axiomatiques, celle de la géométrie dite "euclidienne" et celle des géométries "non-euclidiennes". La première axiomatisation qui ne laisse rien à désirer, celle de l'arithmétique, a été menée à bien par Gottlob FREGE, en 1884. Et encore cette recherche a donné lieu à des débats, en particulier avec Bertrand RUSSELL, de telle sorte que FREGE confronté à des paradoxes qu'il ne pensait pas pouvoir résoudre s'est convaincu de n'avoir pas réussi à mener à bien sa tâche !

FREGE Gottlob, Préface des Fondements de l'arithmétique (1884) :

*« L'idéal d'une méthode scientifique rigoureuse pour les mathématiques, idéal que je me suis efforcé de réaliser ici et auquel on peut attacher le nom d'Euclide, voici comment j'aimerais le décrire.*

*Que tout soit démontré, on ne peut l'exiger parce que c'est impossible ; mais on peut demander que toutes les propositions dont on a besoin sans les démontrer soient expressément énoncées comme telles, afin que l'on puisse clairement reconnaître sur quoi repose l'édifice entier. Il faut ensuite s'efforcer de réduire le plus possible le nombre de ces lois fondamentales, en démontrant tout ce qui*



*est démontrable. De plus, et en cela je vais au-delà d'Euclide, je demande que tous les modes de déduction et de consécution qui sont utilisés soient introduits par avance. Sinon on ne peut être assuré d'avoir rempli la première exigence. Cet idéal je crois l'avoir atteint pour l'essentiel. »*

Cette première partie nous permet de mieux comprendre ce qui est sans cesse remis en question quand il s'agit de démonstrations, les conditions de la cohérence. Celle-ci est reconnue comme la première des conditions auxquels tout discours doit sacrifier pour être tenu comme l'expression de la vérité. Mais ses propres conditions échappent largement à la prise des penseurs, y compris des philosophes les plus prestigieux.

### **Première conclusion provisoire**

En première approximation, la démonstration est donc un discours qui prétend établir la vérité d'une conclusion plus fermement qu'une croyance quelconque, même très certaine, même assurée depuis des siècles. Celui qui a le projet de démontrer n'a pas pour but de persuader ; celui qui vise un assentiment universel ne peut se fier à ses propres certitudes ni à l'acquiescement général.

Nous emprunterons à PLATON deux de ses plus célèbres images pour résumer notre investigation. Face à Ménon, Socrate s'offusque qu'à la question "qu'est-ce que la vertu ?" son jeune interlocuteur lui réponde en fournissant non une mais plusieurs définitions, un essaim de vertus. Comme le jeune sophiste nous sommes devant une sévère difficulté ! Pouvons-nous donner une définition unique de la démonstration alors que l'histoire des sciences nous renseigne sur la diversité des pratiques et des discours ?

Une deuxième image peut nous conduire à répondre par la négative. La vieille barque de Thésée, objet de vénération, a si souvent été réparée qu'il ne reste plus une seule pièce d'origine. Est-ce toujours la barque de Thésée ? PLATON utilise ce cas exemplaire pour signifier que rien ne résiste au temps. Mais ce qui est vrai des choses matérielles l'est peut-être aussi des choses immatérielles. Que reste-t-il de la rigueur de la démonstration euclidienne après que tout ce qui fut posé comme pleinement satisfaisant pour l'esprit a été critiqué et amendé ?

L'usage du terme "démonstration" s'est imposé à une époque où l'on pensait que les êtres humains pouvaient propager les vérités les plus hautes, dans tous les domaines, de la religion à la philosophie naturelle en passant par la morale. Maintenant nous sommes plus prudents. Il apparaît que le terme désigne moins un modèle de l'art de penser qu'un problème qui reste ouvert, celui des méthodes qu'il faut mettre en œuvre si nous ne voulons pas produire d'affirmations scandaleuses, à commencer par la pire forme d'entre elles, la contradiction. C'est sur ce point qu'il faut maintenant revenir.

## **II Les pièges du psychologisme dans la recherche de la vérité**

Notre propre réflexion n'affirme rien de définitif sur bien des points, mais une chose nous semble assez claire. Celui qui s'engage dans une démarche réfléchie approfondie<sup>1</sup> se heurte à son ignorance

---

<sup>1</sup> Rien n'interdit à un individu de s'engager dans cette voie mais rien ne l'y pousse non plus. Il peut paraître déraisonnable de ne pas mettre en doute certaines de nos opinions. Il peut même apparaître insensé de s'obstiner dans certaines. L'adhésion indéfectible à une croyance mène à la folie. Parce qu'il a choisi de vivre comme un chevalier, Don Quichotte considère toute péripétie comme une occasion de montrer sa bravoure ! Tout est comme transfiguré. Un plat à barbe devient le heaume de Mambrin. Une mixture devient l'élixir de Fier-à-bras. Un troupeau de moutons se change en armée. Les choses sont comme des pièces de puzzle. Avec elles, Don Quichotte construit son monde. Mais, ce qui est valable pour Don Quichotte l'est aussi pour nous et notre monde n'est pas moins artificiel que celui de Don Quichotte, avec ses multiples conventions et assignations de fonction (le fait d'accepter que, dans un contexte donné, telle chose – une bague – soit considérée comme telle autre – une

mais également à certains pièges concernant tant l'origine de ses idées que la nature des connaissances. Pour le dire rapidement, ces pièges sont d'ordre psychologique ; notre éducation et notre propre expérience du monde nous amènent à n'envisager les problèmes que d'une façon stéréotypée et donc à répéter les erreurs du passé.

Dans cette seconde partie, nous déplacerons notre attention de la notion de nécessité à celle d'évidence. La nécessité absolue, c'est ce que les philosophes comme LEIBNIZ ont cru que la démonstration pouvait apporter à l'humanité. L'évidence est la base absolue qu'ils ont supposée au fondement de cette recherche de la vérité. Envisageons globalement ce nouveau problème qui peut être qualifié de problème des illusions psychologiques ou du "psychologisme".

Pour faire comprendre l'enjeu nous oserons une métaphore. La démonstration est comme la ligne droite, aussi difficile qu'elle à penser tant qu'on n'a pas compris qu'il faut se méfier de son intuition ! Cette dernière nous suggère que la droite est un ensemble de points mis les uns à la suite des autres... Mais cette représentation n'apporte rien à l'entendement si ce n'est l'illusion d'un savoir.

### **Les conditions de la pensée**

Avant de réfléchir le problème de la nature logique des prémisses du raisonnement, nous pouvons résoudre un problème plus simple. Celui-ci est symétrique du premier. Comme lui il fait intervenir des arguments psychologiques sous un mode qui doit être démasqué comme illusoire. Toutefois, il ne provient pas de notre tendance à adhérer à un discours, le dogmatisme commun. Il provient plutôt de notre tendance à rejeter ce qui nous semble inhabituel, le scepticisme spontané.

Voici ce problème. Dans le prolongement de la constatation de la diversité des mathématiques pratiquées dans différents pays à différentes époques, il est possible de s'interroger sur le caractère fortuit des démonstrations. Les théorèmes seraient toujours considérés comme nécessaires, mais alors seulement comme nécessaires pour une population ou une époque donnée. On pourrait très bien imaginer une autre espèce intelligente, des Martiens ou des Hommes de Neandertal, pratiquant des mathématiques d'une manière sensiblement différente de la nôtre, de celle à laquelle nous sommes habitués. Les Martiens pourraient pratiquer les mathématiques comme des sciences expérimentales ; les Néandertaliens ayant quelques circonvolutions de plus dans leur cerveau produiraient une géométrie différente de la nôtre... Ces idées peuvent être réunies en une seconde thèse, qui est également une thèse psychologique, suivant laquelle des différences de constitution organique ou bien des différences culturelles pourraient être et devraient être à l'origine de théorèmes différents. Non seulement les langues des démonstrations ne se ressembleraient pas davantage que nos langues naturelles, le français, l'ewé ou le navajo, mais encore leur logique différerait. Diverses façons de se forger des idées conduiraient fatalement à une diversité des théorèmes, comparables à une diversité d'opinions sur un même sujet.

Faisant intervenir d'une manière biaisée la physiologie ou bien l'anthropologie, cette thèse n'est en réalité fondée ni sur la nature humaine ni sur la raison, mais sur un appel à l'intuition. C'est seulement la traduction d'un relativisme exacerbé, accentuant éventuellement les différences culturelles à des fins politiques.

Puisque le cas d'une différence organique, même minime, semble plus grave qu'une différence culturelle opposant des aires très exotiques l'une à l'égard de l'autre, abordons en premier le problème de la condition organique de la pensée. Revenons aux Néandertaliens, pour lesquels nous avons postulé une différence organique ou, mieux, lisons attentivement ce texte de COURNOT, qui fait intervenir l'hypothèse d'une différence de races.

Antoine-Augustin COURNOT (1861 : p. 371), Traité de l'Enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire :

« Tandis que toute théorie de la sensibilité, de l'imagination et des passions, où l'on ferait abstraction

---

promesse ). Pour nous tous, les choses sont des pièces constituant un monde contingent ! Nous reviendrons à la question de la cohérence personnelle dans notre dernière partie.

*des observations et des données physiologiques, serait une théorie privée de supports naturels, la logique n'a pas le moindre besoin de prolégomènes empruntés à la physiologie. Tous les progrès faits et à faire dans l'anatomie du cerveau n'y changeront pas un iota. Nous ne pouvons affirmer que ce qui rend pour nous une proposition certaine, probable, la rendrait certaine, probable au même degré, pour les intelligences ayant les mêmes connaissances que nous, quoique physiologiquement constituées tout autrement que nous. Avec quelques circonvolutions de plus ou de moins dans le cerveau, on deviendra peut-être capable d'étudier la géométrie : mais si l'on reste capable de l'étudier, on retombera certainement sur les mêmes théorèmes par lesquels Euclide et Archimède ont passé. Il se peut que certaines races d'hommes soient incapables de produire des géomètres : toutefois, si elles ne sont pas frappées à cet égard de stérilité, il est sûr qu'on ne verra pas se former chez elles une autre géométrie que la nôtre, dont les théorèmes ne cadreraient pas avec nos théorèmes. Au contraire, par suite de différences de constitution organique, elles pourraient avoir une poésie, des arts et même des idées philosophiques et religieuses qui ne ressembleraient pas plus aux nôtres que leurs langues ne ressemblant à la nôtre. »*

Que faut-il tirer comme leçon philosophique de ce texte opposant la nécessité logique, ne pouvant avoir une base physiologique, et la fantaisie, pouvant en avoir une même si ce n'est pas assuré ? Rien concernant la physiologie, à moins de tester expérimentalement l'effet de « *circonvolutions de plus ou de moins dans le cerveau* ». Des observations sur des jumeaux seraient précieuses, mais l'éthique nous interdit sans doute d'enlever à l'un des circonvolutions pour constater qu'il ne produit pas de théorèmes différents de ceux que son frère peut produire. En revanche, ce texte peut nous amener à réfléchir ce que nous tenons pour aussi naturel, le fait de produire des phrases chargées de dire ce qui est, ce qui est vrai et le fait de produire des phrases d'un autre type, énonçant des préférences ou des valeurs, mais toujours quelque chose qui a du sens. Dans la première catégorie se range le théorème du géomètre et, dans l'autre catégorie, la thèse véhiculée par le discours du philosophe. Cela appelle une remarque suivie d'une interprétation de la nature de cette opposition pouvant exister entre les diverses manifestations du génie humain.

La remarque est presque triviale. Accordons à COURNOT l'essentiel de son raisonnement. En tant que discipline réflexive faisant intervenir sensibilité, imagination et passions humaines, la philosophie de la démonstration n'a pas la nécessité des démonstrations mais seulement la pertinence des idées philosophiques. S'accordant sur ce qu'il faut faire pour démontrer un énoncé, des penseurs peuvent se combattre quand il s'agit de dire ce qu'est une démonstration ou ce que doit être son fondement ! Ce qui est moins trivial est sans doute l'invention d'une théorie de la démonstration, dans le cadre de la logique mathématique, opposée à la philosophie de la démonstration tant par ses objectifs que par sa nature. Parfois appelée "théorie de la preuve", cette discipline créée par David HILBERT au début du XX<sup>ème</sup> siècle est entièrement focalisée sur le problème de la cohérence des mathématiques. En 1927, lors d'une conférence consacrée à l'évocation des « Fondements des mathématiques », le grand mathématicien David HILBERT résumait ainsi son projet : « *Depuis cinq ans, j'étudie les fondements des mathématiques en élaborant une théorie nouvelle de la démonstration. Je voudrais réduire tout énoncé mathématique à la présentation concrète d'une formule obtenue rigoureusement et donner ainsi aux notions et déductions mathématiques une forme irréfutable montrant bien l'ensemble de la science. Je pense pouvoir atteindre ce but avec ma théorie de la démonstration ; un travail considérable sera nécessaire pour son accomplissement* ». Comprenant des réflexions sur les différents ordres logiques ou bien sur la démonstration automatique, les développements récents de la théorie vont de paire avec la théorie de l'informatique.

L'interprétation de l'opposition est peut-être plus intéressante. Pour notre part, nous croyons utile de faire intervenir dans notre propre discours l'opposition de l'ordre théorique et de l'ordre pratique pour distinguer la démonstration des diverses sortes d'argumentations communes. L'argumentation ne ressemble pas communément à un poème ou à un psaume, mais elle correspond tout comme eux à un souci d'efficacité immédiate. Il s'agit de convaincre tout de suite ou de rendre tout de suite sensible à quelque chose. L'argumentation ordinaire s'appuie sur des habitudes mentales, y compris quand elle critique des préjugés ou démasque des jugements hâtifs. Elle calme ou éveille des doutes concernant ce que nous devons faire, notre conduite, nos actions. La démonstration en revanche a pour fonction de faire disparaître le doute des esprits quand il s'agit de produire des connaissances. Son utilité est

donc essentiellement théorique. Elle procède d'un fonctionnement de l'esprit qui n'est ni spontané ni naturel, faisant jouer uniquement des interrogations sur la forme du raisonnement, évoquant seulement des principes directeurs, visant non la certitude subjective mais l'établissement d'une inférence valide objectivement. Ainsi l'étrange utilité de la démonstration, utilité théorique ou de second ordre, ne se traduit pas immédiatement dans une attitude. Elle ne relève pas des croyances ordinaires ; elle ne rend pas plus sage. Essayons de préciser ce dernier jugement.

### **L'indémontrable et ce qui n'a pas besoin d'être démontré**

Au début de sa théorie du syllogisme (Premiers Analytiques, I, 1), ARISTOTE affirme que « *démontrer ce n'est pas demander, c'est poser* ». S'il fallait ne retenir qu'une chose de la démonstration, ce pourrait être celle-là. Mais à condition d'interpréter correctement ce jugement.

Dans le cadre de son système épistémologique, restant attentif à singulariser l'ordre théorique sans toutefois le rendre autonome contrairement à PLATON, ARISTOTE fait jouer une opposition entre deux sortes de prémisses. Une prémisse démonstrative est « *vraie et obtenue au moyen des principes posés primitivement* » tandis qu'une prémisse du discours ordinaire est seulement probable, ressortant du vraisemblable ou de l'opinion qu'on s'autorise même si l'on n'a aucune garantie. Certaines spéculations, comme celles du poète tragique sur la nature humaine, peuvent nous apporter plus que bien des vérités particulières dégagées au cours d'enquêtes minutieuses mais dépourvues d'ambition intellectuelle. Néanmoins puisque l'opinion n'est jamais totalement assurée, la science ne se développe pas à l'aide de spéculations, d'analogies, de transfert de résultats d'une discipline à l'autre, mais seulement grâce à des enquêtes spécifiques. Indispensable à l'idée de cohérence logique, la reconnaissance d'une opposition entre le vrai et le vraisemblable est bien quelque chose d'essentiel à la vie de tous les jours comme à la science. Viser le vrai, c'est refuser le plausible ou le probable. La méfiance de la certitude est de mise : « *la démonstration, pas plus que le syllogisme, ne s'adresse au discours intérieur de l'âme. On peut, en effet, toujours trouver des objections au discours extérieur, tandis qu'au discours intérieur on ne le peut pas toujours.* » ARISTOTE, Seconds Analytiques, I. 10

ARISTOTE souligne que ni la production de beaucoup de thèses plausibles (par la rhétorique) ni la réfutation de certaines thèses séduisantes (par la dialectique) ne sont suffisantes pour engendrer et soutenir le développement du savoir. Dans la perspective rationaliste qui a marqué l'histoire de la philosophie, l'ensemble des discours classiques sur la démonstration, cette fin propre à la démonstration est doublement conditionnée. La validité des raisonnements doit être assurée. La vérité des premières prémisses également, sans quoi il aurait régression à l'infini.

La validité de certains modes de raisonnements est douteuse. Les sophistes ont par exemple instillé le doute dans les esprits avec l'argument du sorite. ARISTOTE ne craint pas néanmoins d'affirmer la validité universelle des syllogismes bien construits. Leur forme même est une garantie suffisante ; en effet, celui qui en douterait devrait douter de cette évidence élémentaire qu'est le principe de non-contradiction<sup>2</sup>. Or, pour nier ce principe dans un discours quelconque, il faudrait supposer ce principe sans quoi le discours de réfutation n'aurait lui-même pas de sens, aucune portée !

La question de la vérité des premières prémisses est plus délicate. S'il est possible de montrer la validité de modes de raisonnements il semble bien que le philosophe doive reconnaître l'existence de propositions indémontrables, les principes. « *Un principe de démonstration est une proposition immédiate. Est immédiate une proposition à laquelle aucune autre n'est antérieure* » comme le précise ARISTOTE dans les Seconds Analytiques. Par exemple un principe qui revient très souvent dans son œuvre établit que « *si des quantités égales sont soustraites à des quantités égales, les restes sont égaux* ». Puisque la science est démonstrative, la vérité de cette proposition ou d'autres prémisses aussi fondamentales sort de fait du cadre de la science. Ce n'est pas quelque chose d'acquis par le raisonnement. Et il ne semble pas d'avantage qu'il s'agisse d'une sorte de savoir inné, n'en déplaise aux idéalistes qui dotent l'esprit d'une sorte de savoir éternelle, d'une étincelle divine de compréhension. Niant la nature acquise ou innée des prémisses élémentaires, il est réduit à en faire des sortes d'habitudes ou de propositions s'imposant inconditionnellement à nous.

---

<sup>2</sup> Voici une façon de l'exprimer, tirée de *Métaphysique*, 1005b 19-20, « "Il est impossible que le même appartienne et n'appartienne pas à quelque chose en même temps et sous le même rapport" »

Les analyses de LEIBNIZ dans les Nouveaux Essais sur l'entendement humain sont précieuses pour préciser en quel sens il existe de l'indémontrable en science. Reposant uniquement sur des principes logiques, la validité des raisonnements est celle d'inférences complexes réductibles à des inférences simples. Ces dernières sont les axiomes dont nous venons d'évoquer l'invention par les mathématiciens de l'antiquité. Le chapitre VII traite en détail de la question de la nature des axiomes. On y perçoit un effort constant pour légitimer la vérité des axiomes malgré le défaut de preuves. L'axiome ne peut être une hypothèse comme une autre, une supposition vaguement confirmée par l'expérience commune. Il doit être indubitable pour être une sorte d'assise sur laquelle faire reposer l'architecture de la connaissance.

Cette opposition de la rigueur logique et de l'approximation empirique est ce qui n'est pas démontrable mais que les philosophes se sont crus dans l'obligation de penser. Depuis l'antiquité et les travaux de grands mathématiciens comme Pappus, les philosophes évoquent deux régimes de la pensée, la pensée analytique et la pensée synthétique. La logique serait analytique si toutes ses propositions se réduisent finalement à des tautologies, quand l'expérience serait synthétique, apportant à l'esprit des connaissances, des éléments de vérification ou bien de réfutation. Nous nous efforcerons de nous tenir à distance du débat généré par cette opposition, de DESCARTES à POINCARÉ, en passant par HUME et KANT, parce que notre but est non de savoir ce que les philosophes ont pensé des fondements de la démonstration, mais de cerner ce qui pose problème.

Utilisons plutôt les textes philosophiques pour montrer comment se déplacent sans se réformer en profondeur de vieilles erreurs théoriques et comment ceux qui se font une gloire d'être imperméables aux arguments d'autorités sont en fait incapables de se séparer de quelques préjugés.

Représentons côte à côte les deux positions, rationalistes et empiristes, défendues par des penseurs particulièrement méfiants à l'égard de nos certitudes et idées communes. Voici, dans la colonne de droite du tableau, la prise de conscience du problème des fondements par un philosophe de la même époque que LEIBNIZ, PASCAL, auteur de réflexions sur l'Esprit de géométrie (1658), et dans la colonne de gauche la position d'un empiriste contemporain Bertrand RUSSELL, résumée dans son Portrait de mémoire (1956)

<p><i>« Je ne puis faire mieux entendre la conduite qu'on doit garder pour rendre les démonstrations convaincantes, qu'en expliquant celle que la géométrie observe.</i></p>	<p><i>« J'ai voulu la certitude comme la plupart des gens veulent la foi religieuse. Je pensais que la certitude pouvait être trouvée dans les mathématiques à défaut d'exister ailleurs.</i></p>
<p><i>Mais il faut auparavant que je donne l'idée d'une méthode encore plus éminente et plus accomplie, mais où les hommes ne sauraient jamais arriver: car ce qui passe la géométrie nous surpasse ; et néanmoins il est nécessaire d'en dire quelque chose, quoiqu'il soit impossible de le pratiquer.</i></p>	<p><i>Mais j'ai découvert que beaucoup de démonstrations mathématiques, que mes enseignants m' enjoignaient d'accepter, étaient pleines d'erreurs et que, si la certitude était en effet susceptible d'être découverte dans des mathématiques, elle le serait dans une discipline rénovée, avec des bases plus solides que celles qui, jusqu'ici, avaient été jugées assurées.</i></p>
<p><i>Cette véritable méthode, qui formerait les démonstrations dans la plus haute excellence, s'il était possible d'y arriver, consisterait en deux choses principales : l'une, de n'employer aucun terme dont on n'eût auparavant expliqué nettement le sens ; l'autre, de n'avancer jamais aucune proposition qu'on ne démontrât par des vérités déjà connues ; c'est-à-dire, en un mot, à définir tous les termes et à prouver toutes les propositions. »</i></p>	<p><i>Mais comme ce travail progressait, s'imposait à moi la leçon de la fable de l'éléphant et de la tortue. Ayant créé un éléphant sur lequel le monde mathématique pourrait se reposer, je découvrais cet éléphant chancelant et cherchais alors à créer une tortue pour empêcher l'éléphant de tomber. Mais la tortue n'était pas plus sûre que l'éléphant ! Ainsi après environ vingt ans de travail très laborieux, je suis arrivé à la conclusion qu'il n'y avait rien de plus que je pourrais faire pour rendre la connaissance mathématique indubitable. »</i></p>

La leçon pascalienne sur la démonstration participe du vieil esprit idéaliste qui reconnaît une origine divine au savoir. Le conditionnel, dans « *cette véritable méthode qui formerait les démonstrations...* » fait sens. PASCAL évoque un rêve qui est non pas une chimère mais un idéal : celui de la méthode la plus glorieuse et la plus aboutie, ce qui relèverait de la « *plus haute excellence* ». Cet idéal de la raison, vouloir tout définir et tout démontrer, conduit à une cruelle déception. Le géomètre et, *a fortiori*, le métaphysicien sont conduits à la prise de conscience que la tâche est doublement impossible et à conclure que la raison est impuissante. Celle-ci échoue autant quand il faut définir le plus courant, ce qui est le plus simple, que quand il faut démontrer les plus hautes vérités, celles qui intéressent notre existence au plus haut point. En revanche, le cœur qui ne définit ni ne démontre rien saisit avec ses propres raisons ces vérités qui nous sont indispensables car elles nous permettent de vivre et contribuent même à forger notre humanité.

Si belle soit cette leçon, elle manque de justification. Ce n'est pas, à vrai dire, l'alliance du scepticisme (il y a des choses qui résistent et résisteront toujours à la raison) et de l'idéalisme (l'être doté de raison est le meilleur des êtres, à l'exception de son créateur qui est la Raison universelle d'où émane notre raison de créature) qui affaiblit la position de PASCAL, mais son recours à l'intuition, le cœur qui mieux que la raison permettrait d'agir conformément à la raison et pour de bonnes raisons ! Et nous retrouvons ce que nous avons appelé "psychologisme" qui est une sorte de quête de fondement pour quelque chose qui à vrai dire n'en a pas besoin ! La "chance" de RUSSELL est peut-être d'avoir eu de mauvais professeurs, qui se sont efforcés dans leur classe de faire passer pour des démonstrations quelques raisonnements qui n'étaient pas totalement assurés<sup>3</sup> ! Son scepticisme n'était pas de principe, mais relevait de l'incertitude dans laquelle le mettaient des questions précises. Son rêve d'une science aussi rigoureuse que la logique ne pouvait être confondu avec un idéal. Il lui apparaissait de plus en plus comme un défi impossible à relever. Dans ces conditions, il était prêt à accepter qu'un axiome pris isolément est indémontrable mais aussi dépourvu de légitimité, coupé de l'évidence. Seul un ensemble d'axiomes a une raison d'être, liée à sa fécondité et à rien d'autre ! L'évidence... tortue sur laquelle se tient l'éléphant !

### **L'universalité à la place de la nécessité ?**

Revenons maintenant à l'idée commune de la nécessité comprise comme invincibilité du discours pouvant assurer la vérité d'un théorème pour l'éternité. Cette nécessité est absolue, "divine" avons nous dit avec les idéalistes. C'est effectivement ce qui semble s'imposer à tous ceux qui ont compris une démonstration, soit qu'ils en aient suivi l'exposition soit qu'ils l'aient eux-mêmes inventée. Dès lors, il semble à l'opinion que certaines assertions méritent le titre de "démonstration" parce qu'il n'y a rien de plus convaincant : une fois le raisonnement déployé et la conclusion produite, nous n'avons plus qu'à nous incliner.

Est-ce de cette manière qu'il faut aborder la démonstration ? Le risque est de confondre persuasion et démonstration. Pour l'éviter ainsi que son cortège d'idées préconçues sur le travail scientifique, il convient de procéder à une critique de l'idée de nécessité. D'une part, il faut distinguer la nécessité absolue qui est la propriété de ce qui est, de ce qui existe "ici et maintenant" et la nécessité logique, qui elle n'est que relative. D'autre part, la nécessité d'un raisonnement quelconque dépend également

---

<sup>3</sup> Dans son Traité de la connaissance, Louis ROUGIER (1955) précise que les doutes du jeune Bertrand portait sur les premières démonstrations d'Euclide qui sont « *presque toutes des pseudo-démonstrations* » parce qu'elles « *masquent l'appel à des postulats implicites dissimulés dans des recours à l'intuition* ». ROUGIER développe le cas de la première proposition du livre I, précédemment donné en exemple, dont on rappelle le projet "sur une base donnée, construire un triangle équilatéral" : « *pour résoudre ce problème, qui est un théorème d'existence adjoint à la définition nominale du triangle équilatéral, Euclide, de chacune des extrémités de la base, décrit un cercle ayant pour rayon la longueur même de cette base. Il suit alors, à l'inspection de la figure, que les deux cercles intersectent. Comme, en vertu du premier postulat des Eléments, deux points déterminent une droite, on peut joindre l'un des points d'intersection aux extrémités de la droite donnée, de façon à obtenir un triangle qui satisfasse aux conditions du problème. Le vice de cette démonstration consiste en ce qu'il n'est nullement nécessaire que les deux cercles intersectent.* »

de la validité du mode d'inférence<sup>4</sup>, validité qui n'est elle-même pas réductible à l'énoncé de quelques principes logiques absolus comme le montre l'existence de paradoxes logiques. Dans les faits, l'étude des possibilités du raisonnement a connu une inflexion avec l'apparition de l'informatique et son couplage à la théorie de la démonstration dont les résultats les plus marquants sur la complétude des édifices axiomatiques sont dus à Kurt GÖDEL. Dans un article de *La Recherche*, Gregory CHAITIN (2003) expose clairement la signification de ces travaux :

*« Gödel a obtenu en 1931 un résultat qui à l'époque était extraordinairement surprenant. Il a construit une assertion arithmétique sur le modèle du paradoxe du menteur, inventé par les Grecs : « Ce que je dis dans la présente phrase est un mensonge ». Amusant, ce paradoxe. Il ne semble pas prêter à conséquence. Le problème, c'est qu'il est possible de l'importer en mathématiques. Formulée à l'aide de mots, l'assertion de Gödel dit exactement "La présente assertion, celle qui est contenue dans cette phrase, est indémontrable". Si cette proposition est démontrable, elle est donc fautive. Si elle n'est pas démontrable, elle est vraie, ce qui veut dire qu'il y a des propositions vraies et pourtant non démontrables. C'est ce qu'on appelle l'incomplétude. La démonstration de Gödel est trop complexe pour être résumée ici. Disons seulement qu'elle passe par une opération mentale consistant à numéroter la liste de toutes les assertions et preuves de l'arithmétique formelle. Mais la signification du théorème est énorme. Il prouve qu'il est impossible de rendre compte de l'arithmétique élémentaire en déduisant ses résultats de quelques axiomes de base. On ne peut pas connaître toute la vérité sur l'addition, la multiplication, et la suite des nombres entiers. Le théorème suggère aussi que de nouveaux axiomes, peut-être beaucoup de nouveaux axiomes, pourraient être ajoutés aux axiomes de base de l'arithmétique.*

Pour montrer la portée de ce résultat, CHAITIN poursuit avec deux exemples :

*« Il est possible, par exemple, que de vieux problèmes non résolus, comme la question de savoir s'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux (impairs séparés par un pair), doivent être comptés au nombre des axiomes : en ce cas, il existe une infinité de nombres premiers jumeaux, c'est vrai et non démontrable. Peut-être que des conjectures beaucoup plus compliquées, comme l'hypothèse de Riemann, dont la démonstration est mise à prix, devront-elles un jour être considérées comme des axiomes. »*

Dans un premier temps, relier nécessité logique et universalité. Tout le monde éprouve peut-être le sentiment qu'il n'y a plus qu'à acquiescer la vérité d'un théorème, définitivement établi : c'est comme cela qu'il fallait procéder et c'est cela Ce Qu'il Fallait Démontrer ! Certes, devant la démonstration, l'attention se porte d'abord naturellement sur la conclusion. Celle-ci est reconnue comme nécessaire, la nécessité étant le critère des propositions qui valent en droit, pour tous les êtres raisonnables et pas seulement pour chacun d'entre nous pris isolément. Il n'en demeure pas moins que certaines démonstrations peuvent apparaître obscures pour de multiples raisons. Mais l'individu qui ressent un tel malaise n'est précisément pas assuré d'être devant une démonstration (cf. Françoise ROSTAND Sur la clarté des démonstrations mathématiques, 1962). Ainsi il ne faudrait pas distinguer entre nécessité logique et universalité sous prétexte que des individus ne comprennent pas la démonstration. Dans un second temps, notre attention peut se déporter vers l'origine de cette nécessité, logique comprise comme ce qui s'impose à tous en tout temps. Puisqu'il est impossible de tout démontrer et de tout définir, les axiomes de base et les termes servant à construire les premières définitions apparaissent comme primordiaux. C'est ce point précis qui constitue en quelque sorte la première mâchoire du piège de la psychologie. Pendant longtemps, il sembla impossible aux mathématiciens comme aux philosophes de nier le caractère d'évidence de ces axiomes et de ces termes originaires.

---

<sup>4</sup> Cette idée si simple en apparence est peut-être trompeuse. Clarifions l'idée, à l'aide d'une opposition. Pour les mathématiciens formalistes, un raisonnement s'appuyant sur le principe du tiers-exclu est valide pour des procédures infinistes, même si l'esprit est incapable de construire l'objet en question ; en revanche, les intuitionnistes refusent ce principe avec l'idée qu'il n'est pas équivalent de montrer la simple possibilité d'un objet et de démontrer son existence. Un raisonnement nécessaire pour les uns est fautif pour les autres, car lesté d'une hypothèse invérifiable.

Mais il semblait possible de nier toute chose, dans un refus généralisé de l'assentiment, le célèbre doute hyperbolique de DESCARTES<sup>5</sup>.

Dans son déroulement déductif, la démonstration ne s'appuie sur aucune autorité, par conséquent sur aucune certitude subjective. Elle serait néanmoins à sa base fondée sur des *a priori* indubitables, des vérités universelles qui s'imposeraient à l'esprit car il n'y a rien de plus simple. On a donc affirmé qu'il suffit de partir de ce que nul ne peut nier en son for intérieur pour produire des vérités nécessaires, sur le mode démonstratif. Voici la deuxième mâchoire du piège : les deux suppositions également si claires, si indubitables, d'une part que l'ensemble des propositions produites ne pouvaient manquer de consistance, d'autre part que toute proposition vraie devait pouvoir être démontrée. Cette double supposition est extrêmement imprudente. Que n'a-t-on pas d'abord pensé qu'il fallait se méfier de ces autres certitudes au même titre que des certitudes sensibles ou que des croyances seulement vraisemblables ? À défaut d'une enquête, qui n'a été entreprise qu'à partir de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, s'est constitué un véritable piège psychologique, un obstacle épistémologique majeur pour le philosophe.

Preuve est faite qu'il y a une ambiguïté concernant "ce que nul ne peut nier en son for intérieur". Le plus sage est de faire comme le savant, continuer de s'efforcer soi-même à la plus grande cohérence tout en cessant de penser que tout le monde au monde moment a les moyens de percevoir les mêmes choses en son fort intérieur. Comme tous les autres jugements, le dialogue de l'âme avec elle-même est une construction, socialement, culturellement déterminée.

Comprendre la nature de ce piège du psychologisme et voir qu'il s'agit en fait d'une illusion sur l'universalité des premiers principes de la science est utile pour dépasser nos conceptions naïves du savoir, idéalistes ou empiristes, et – s'il est permis de s'exprimer ainsi – de "rattraper" ainsi la science contemporaine. La démonstration n'est pas vertueuse, ou forte ou belle, parce qu'elle découle une chaîne de propositions à partir d'idées premières, d'évidences tirées du sensible ou de sa propre nature, de son essence rationnelle. Elle n'est qu'efficace. Certes cette efficacité est plus théorique que pratique. Elle est "psychologique" puisque la démonstration est ce qui comble efficacement notre désir de croire. En réalité, elle n'est pas plus excellente, absolument, qu'elle n'est contraignante, pratiquement. Nécessité et contrainte sont deux choses opposées, même si on peut les confondre. À la base de la nécessité discursive il n'y a rien qui "sorte du langage" qui vienne éclairer par sa simplicité (sa vérité transcendante) notre esprit autrement voué à la confusion et à l'errance.

L'avertissement de Charles PEIRCE aux philosophes sur la question de la nature de la preuve doit être rappelé (fin de la première partie de La Logique de la science, 1878) :

*« C'est une idée commune qu'une démonstration doit se poser sur des propositions irréductibles et absolument indubitables. Ces propositions sont pour une certaine école des principes premiers universels, pour une autre des sensations premières. En réalité, une recherche pour avoir ce résultat complètement satisfaisant appelé démonstration n'a qu'à partir de propositions à l'abri de tout doute actuel. Si les prémisses n'inspirent bien réellement aucun doute, elles ne sauraient être plus satisfaisantes. »*

A partir d'une critique du psychologisme, nous voulons encore souligner la fécondité de la démonstration. L'existence de « démonstrations élégantes » est là en effet pour nous rappeler ce fait. La science d'aujourd'hui traque des structures. Celles-ci sont des démonstrations exposant les propriétés formelles de multiples structures (les groupes pour parler comme le mathématicien) ou bien des modèles construits pour comprendre les mécanismes naturels.

« Entretien de Jacques Nimier avec le professeur Claude Berge » tiré de Entretiens avec des mathématiciens (1989)

<sup>5</sup> En quête d'un fondement assuré sur lequel rebâtir le savoir, le philosophe affirme exercer lors de sa méditation un doute englobant toute chose pour voir ce qui peut lui résister et valoir réellement comme principe. Il s'explique sur ce doute impliquant par exemple de douter qu'il a un corps ou que  $2+2=4$ , en donnant une métaphore celle du panier de pommes. Quand on trouve une pomme pourrie dans un panier, le plus raisonnable est de le renverser pour trier tous les fruits et n'y remettre que les fruits sains. Le procédé convient bien pour des pommes. Convient-il pour nos idées ?



Claude BERGE, décédé le 30 juin 2002, est le père de la théorie moderne des graphes ; il s'intéressa également à la théorie des jeux. Il fut un des fondateurs de l'«Oulipo» et il aimait beaucoup la sculpture et en faisait lui-même.

« - **B** : ... voir le raccourci, c'est plutôt dans le type de démonstration. On peut essayer d'arriver à un théorème, à un énoncé, d'une façon qui ne passe pas par l'enchaînement logique des déductions qui semblait conduire à cet énoncé. C'est quelquefois des chemins tout à fait inattendus qui aboutissent à une démonstration correcte d'un théorème, ça c'est intéressant.

- **N** : Trouver un autre chemin ...

- **B** : Oui, trouver un autre chemin, trouver une sorte de "court-circuit" une façon de voir qui ne s'impose pas quand on regarde simplement l'hypothèse et la conclusion. Rien de ce chemin ne peut apparaître là-dedans, et cependant c'est ce chemin qui y mènera. Il s'agit à ce moment-là d'un goût que je crois assez universel chez les mathématiciens. Ils aiment bien trouver des démonstrations élégantes et une démonstration élégante c'est une démonstration à laquelle on ne penserait pas normalement, comme un problème d'échec élégant: il faut que le premier coup soit paradoxal ... »

L'idée décisive qu'il faut arriver à saisir est que la démonstration n'est pas seulement le procédé par lequel une proposition vraie est justifiée, mais la reconnaissance de la fécondité d'un système d'axiomes. En cela, c'est une explication à part entière. Une démonstration établit clairement ce qui découle d'axiomes, ce qui doit en découler nécessairement, par un chemin attendu ou inattendu, par une longue série de déductions faisant progresser pas à pas de l'hypothèse à la conclusion ou bien par une liaison plus « *élégante* » « court-circuitant » notre intuition. Dans ces conditions, il faut noter que la démonstration d'une impossibilité théorique est un résultat qui n'établit aucun théorème à strictement parler mais qui peut avoir une importance décisive.

L'histoire des sciences nous a légué l'exemple archétypal de la quadrature du cercle. Le problème s'énonce simplement : est-il possible de construire à la règle et au compas un carré ayant même aire qu'un cercle donné ? Bien des quadratures sont possibles. La plus simple est celle du triangle. Mais la quadrature du cercle est pire qu'un casse-tête, c'est un cas d'impossibilité. Les mathématiciens se sont convaincus assez rapidement de cette impossibilité, sauf quelques esprits ne pouvant accepter leurs propres limites et qui, jusqu'aujourd'hui, continuent à chercher le Graal, la solution, le divin «Euréka» qui leur apportera une gloire éternelle. L'impossibilité de la quadrature se résout en un autre énoncé : prouver que Pi est un nombre transcendant. Résultat qui dépassait de loin les compétences des mathématiciens de l'antiquité, la démonstration de la transcendance de Pi fut réalisée par Lindemann en 1882<sup>6</sup>.

### **Seconde conclusion provisoire**

Une petite conclusion provisoire s'impose à nouveau. Avec la créativité du mathématicien, l'axiomatique cesse d'être un regroupement arbitraire d'axiomes ! Il nous fallait sans doute rectifier une idée fautive au sujet de l'axiomatique, celle du caractère arbitraire (au sens d'immotivé) des axiomes constituant les systèmes d'axiomes du mathématicien.

Pour fixer les idées et néanmoins continuer d'évoquer les mathématiques comme une science vivante, nous vous conseillons de réfléchir, avec la conférence filmée d'un mathématicien, Gilles DOWEK, (2004, à la Cité des Sciences et de l'Industrie) portant sur la démonstration d'un théorème fameux, le théorème des quatre couleurs.

### **III L'usage de la démonstration en sciences**

Dans cette troisième partie, nous voudrions réfléchir d'une manière plus approfondie les procédures démonstratives. L'emploi même d'une telle expression, peu usitée, montre qu'on ne s'intéresse pas

---

<sup>6</sup> Pour les curieux, voir de Jean-Paul DELAHAYE son ouvrage intitulé Le fascinant nombre pi (1997), chapitre 9.

alors aux démonstrations à proprement parler, mais à l'ensemble des discours qui doivent atteindre la justesse et des raisonnements qui visent l'accroissement de nos connaissances. Dans les *Nouveaux Essais*, LEIBNIZ oppose ainsi les « *propositions mixtes* » et les « *vérités éternelles* » et rappelle la «règle des logiciens», comme quoi « *la conclusion suit la plus faible des prémisses et ne saurait avoir plus de certitude qu'elles* » (IV, chap. XI). Au chapitre II, il donne en exemple de bonnes démonstrations « *hors des mathématiques* » le traité *De l'Equilibre* d'ARCHIMEDE « *où il entre du physique* ». Puis il mentionne diverses disciplines démonstratives comme la science juridique et la médecine (chap. VII) , la théologie naturelle (chap. X), la géographie et l'astronomie (chap. XI), l'histoire (chap. XVI).

Il s'agit toujours de produire des conclusions nécessaires même si l'objet visé n'est lui-même pas nécessaire. Dans ces sciences qui font intervenir des prémisses empiriques, la nécessité porte en effet sur la liaison des idées non sur leur objet. De plus, « *ces liaisons sont même nécessaires quand elles ne produisent qu'une opinion, lorsqu'après une exacte recherche de la prévalence de la probabilité<sup>7</sup>, autant qu'on en peut juger, peut être démontrée, de sorte qu'il y a démonstration alors, non pas de la vérité de la chose, mais du parti que la prudence veut qu'on prenne* » (IV, chap. XVII). Les thèses produites dans ces disciplines ne se réduisent pas à la nécessité logique, puisqu'elles visent à appréhender ce qui est, le réel, non ce qui doit être, le possible. Au sein des laboratoires, des propositions scientifiques sont élaborées par ceux qui cherchent à rendre le réel intelligible, en établissant des rapports constants entre des séries de phénomènes (des lois de la nature) ou des liens de causalité à partir des effets observés (des mécanismes), bref des relations intelligibles entre les objets appréhendés (des raisons).

Le fil directeur de cet exposé est le rapport de la démonstration à l'argumentation. Il nous faut donc d'emblée souligner un point important. Indispensables à l'invention de lois et à la découverte de mécanismes, ces procédures démonstratives relèvent des fonctions argumentative et représentative du langage, non pas des fonctions d'expression ou d'appel. Il s'agit pour un sujet de dire quelque chose de vrai ou d'utile, mais pas de produire un discours qui exprime des émotions ou mette en scène des désirs au risque de mettre un individu en contradiction avec lui-même ou en opposition à tous les autres. Néanmoins émotions et désirs peuvent influencer la représentation du monde et peuvent même être couplés à la raison dans ce qu'il convient d'appeler des motivations rationnelles. Certains sociologues comme Bruno LATOUR n'hésitent pas à rapprocher la recherche de la vérité en sciences d'une sorte de quête de crédibilité. Ce dernier terme doit alors être entendu comme reconnaissance de la valeur du chercheur par ses pairs mais aussi comme une sorte de reconnaissance institutionnelle en un sens plus large, conditionnant l'obtention de crédits financiers nécessaires pour poursuivre les recherches.

### **La démonstration et la connaissance rationnelle**

Certes – il ne faudrait surtout pas le cacher –, il y a un présupposé à cette manière d'introduire les procédures démonstratives. Et celui-ci ne doit pas être occulté sous peine de trahir notre intention première au moment crucial où la démonstration semble rejoindre l'argumentation. Ce présupposé, c'est celui d'une « *voie sûre de la science* » qui ne soit pas qu'un idéal mais une voie dans laquelle l'humanité s'est engagée à partir du moment où elle a tenu le rôle du juge convoquant des témoins, obligeant à répondre à ses questions de plus en plus précises. Les premiers laboratoires sont ceux de Galilée, Torricelli ou Stahl, comme le remarque KANT dans la *Préface à la seconde édition de la Critique de la Raison pure* (1787) :

« *Quand Galilée fit rouler ses sphères sur un plan incliné avec un degré d'accélération dû à la pesanteur déterminé selon sa volonté, quand Torricelli fit supporter à l'air un poids qu'il savait lui-même d'avance être égal à celui d'une colonne d'eau à lui connue, ou quand, plus tard, Stahl*

---

<sup>7</sup> L'expression de « *prévalence de la probabilité* » renvoie à l'idée de risque. Par exemple, la prévalence d'une maladie c'est, à un moment donné, la proportion des individus atteints de la maladie étudiée par rapport au nombre totale d'individus (malades et non malades) dans la population étudiée (définition du site *Lexique des termes utilisés dans le domaine des statistiques biomédicales*).

*transforma les métaux en chaux et la chaux en métal, en leur ôtant ou en lui restituant quelque chose, ce fut une révélation lumineuse pour tous les physiciens. Ils comprirent que la raison ne voit que ce qu'elle produit elle-même d'après ses propres plans et qu'elle doit prendre les devants avec les principes qui déterminent ses jugements, suivant des lois immuables, qu'elle doit obliger la nature à répondre à ses questions et ne pas se laisser conduire pour ainsi dire en laisse par elle ; car autrement, faites au hasard et sans aucun plan tracé d'avance, nos observations ne se rattacheraient point à une loi nécessaire, chose que la raison demande et dont elle a besoin.*

*Il faut donc que la raison se présente à la nature tenant, d'une main, ses principes qui seuls peuvent donner aux phénomènes concordant entre eux l'autorité de lois, et de l'autre, l'expérimentation qu'elle a imaginée d'après ces principes, pour être instruite par elle, il est vrai, mais non pas comme un écolier qui se laisse dire tout ce qu'il plaît au maître, mais, au contraire, comme un juge en fonction qui force les témoins à répondre aux questions qu'il leur pose. »*

Comme le mathématicien, le physicien doit apprendre à bien utiliser sa raison. Il n'est pas mieux guidé par la Raison que par les faits eux-mêmes. Tout savoir participe d'un questionnement.

KANT insiste sur la mobilisation de principes sans lesquels les observations seraient strictement dépourvues d'intérêt. Une distinction s'impose d'abord entre la science et sa méthode. C'est cette dernière qui peut être considérée comme assurée. Certains l'ont cru aussi assurée en un sens absolu, d'autres ont compris qu'aussi assurée soit-elle il demeure de l'indétermination, le hasard n'étant pas seulement quelque chose de subjectif (le reflet de notre ignorance) mais bien quelque chose d'objectif (une sorte de "chaos" dit-on habituellement pour souligner la sensibilité de beaucoup de systèmes physiques à ses conditions initiales). Pour les partisans de l'indéterminisme, la science elle-même n'est rien d'assuré ! Les sciences du vivant étant plus chaotiques encore que les sciences de la matière. La médecine par exemple n'est pas aussi performante que nous le voudrions et il reste quantité de questions irrésolues du seul fait de la complexité des objets étudiés, organismes qui sont susceptibles de réactions imprévisibles, milieux internes jamais véritablement équilibrés, macromolécules à l'architecture fragile. Les scientifiques du passé ont commis des erreurs, qu'il a parfois été très difficile de rectifier. La plus célèbre est sans doute celle de la théorie de la génération spontanée. À n'en pas douter, ils en commettent encore de nos jours. Mais si la communauté scientifique dans son ensemble n'arrive pas à cerner la nature de certains ressorts du vivant pourtant essentiels, ceux du vieillissement ou de la reproduction par exemple, c'est pour d'autres raisons. Et les erreurs réfutées font intégralement partie de la connaissance produite ! Si nous connaissons beaucoup plus de choses que les générations passées, nous reconnaissons aussi une plus grande ignorance quant aux mécanismes du vivant !

Qu'est-ce que le progrès des méthodes ? Essentiellement deux choses, si l'on retient la leçon classique. D'abord, une précision grandissante. Pendant des siècles, non sans raison comme nous l'avons vu en première partie, on a fait des mathématiques un modèle de rigueur, allant jusqu'à imposer à tous les discours scientifiques une pratique de la démonstration similaire à celle mise en jeu par le mathématicien, les procédures hypothético-déductives. Suivant les disciplines, le langage technique est une classification (chimie, anatomie, histoire naturelle) ou l'usage d'un ensemble de termes non équivoques, débarrassés des obscurités voire des pièges du langage ordinaire. En physique par exemple des termes comme "force" ou "inertie" peuvent avoir un usage technique, à condition que leur signification soit précisée et épurée. Il faut alors enlever aux termes leurs connotations parasites, renvoyant à un vécu, mais aussi fixer une unité de mesure ou produire une loi dans laquelle le mot acquière une valeur propre. Pour produire autre chose qu'un savoir-faire relativement précis et efficace, néanmoins "bricolé", le savant se devait d'adopter un langage technique, aux termes non équivoques, et un mode de raisonnement déductif, seul capable d'assurer des assertions. Ce n'est pas faux : les scientifiques ont pour la plupart bien eu conscience d'opérer dans ces deux directions, mais la voie scientifique est plus que la réunion d'une langue bien faite, « *caractéristique universelle* » suivant l'expression de LEIBNIZ, et d'esprits bien faits, dotés de suffisamment d'acuité pour juger adéquatement de toute chose, « *suivre l'ordre des raisons* », suivant le précepte de DESCARTES. En effet la science est une extension du savoir non pas une simple mise en forme. Ses objets sont, la plupart du temps, problématiques. La conceptualisation de la simultanéité par EINSTEIN dans un

article sur les photons marque par exemple l'essor de la physique moderne dans une nouvelle voie, non-newtonienne, celle de la théorie de la relativité restreinte<sup>8</sup>.

Revenons plus en détail aux procédures utilisées par les scientifiques. C'est leur forme qui va surtout nous intéresser. L'étude de leur contenu nous mènerait bien loin de notre problème, qui est celui de la possibilité d'étendre la démonstration à tous les domaines scientifiques.

Joseph BERTRAND, D'Alembert (1889)

### **Les études du jeune D'Alembert**

« Après avoir passé -- c'est ainsi que lui-même juge ses études -- sept ou huit ans à apprendre des mots ou à parler sans rien dire, il commença ou, pour mieux dire, on crut lui faire commencer l'étude des choses : c'était la définition de la philosophie. On désignait alors sous ce nom la logique ou, à très peu près, ce que le maître de philosophie se proposait d'apprendre à M. Jourdain : bien concevoir, par le moyen des universaux ; bien juger, par le moyen des catégories, et bien construire un syllogisme, par le moyen des figures : *Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Baralipon*. On se demandait si la logique est un art ou une science, si la conclusion est de l'essence du syllogisme.

Quoique la forme prête à la comédie, ne nous persuadons pas qu'une telle étude ne fût alors qu'une inutile et ridicule curiosité. Nul ne songe aujourd'hui à invoquer les règles du syllogisme, on ne le comprendrait pas. Lorsque, il y a deux cents ans, ces règles rigoureuses et irréprochables étaient connues de tous les honnêtes gens, il suffisait, aux yeux des bons juges, pour triompher dans une discussion, de résoudre *in modo et figura* les arguments sophistiques de l'adversaire ; chacun félicitait le vainqueur sans ignorer pour cela que le vaincu pouvait avoir raison.

Par le respect de ces règles excellentes, ingénieux théorèmes dans la science du raisonnement, on faisait preuve d'éducation classique, à peu près comme la connaissance de l'escrime ou de l'équitation faisait paraître un élève des académies vraisemblablement de bonne famille.

L'éducation, à toutes les époques -- on aurait grand tort de s'en plaindre -- a joint aux connaissances réellement utiles à tous un savoir convenu, sorte de franc-maçonnerie entre ceux qui le possèdent. A quoi sert l'orthographe, sinon à démontrer qu'on a été bien élevé ? En Chine, les lettrés ont une langue à part, cela n'est ni sans intention ni sans avantage.

La physique de Descartes enseignée pendant les années de philosophie convenait moins encore à l'esprit rigoureux de d'Alembert. Les cartésiens de collège déraisonnaient en termes obscurs sur des questions mal définies et mal comprises ; d'Alembert ne conserva de ses maîtres en physique que le souvenir de paralogismes qu'il parodiait avec gaieté.

C'est en songeant à son professeur de physique qu'il avait conçu l'idée d'une antiphysique dans laquelle on expliquerait et démontrerait, par des raisonnements non moins plausibles que ceux de l'école, le contraire précisément de la vérité.

On dirait, par exemple:

“Le baromètre hausse pour annoncer la pluie”.

*Explication.*--Lorsqu'il doit pleuvoir, l'air est plus chargé de vapeurs, par conséquent plus pesant, par conséquent il doit faire hausser le baromètre.

*Ce qu'il fallait démontrer.*

“L'hiver est la saison où la grêle doit principalement tomber.”

*Explication.* -- L'atmosphère étant plus froide en hiver, il est évident que c'est surtout dans cette saison que les gouttes de pluie doivent se congeler jusqu'à se durcir en traversant l'atmosphère.

*Ce qu'il fallait démontrer.*

Par malheur pour ces explications, les faits y sont absolument opposés. La baisse du baromètre annonce la pluie, et la grêle, en été, tombe plus souvent qu'en hiver. Les raisons sont préférables cependant à celles qu'on invoquait chaque jour dans l'étude de la physique. La liste peut s'étendre, et d'Alembert formait le projet d'y introduire tous les phénomènes physiques.

<sup>8</sup> Cet exemple est précieux, qui montre comme au chapitre précédent l'impasse du psychologisme et de ses croyances élémentaires. Qui donc peut spontanément critiquer l'évidence suivant laquelle deux événements simultanés se produisent sous nos yeux en même temps ? Voir l'explication de C. LARCHER dans « La simultanéité en Relativité restreinte ».

L'idée première que nous pouvons illustrer avec d'ALEMBERT et devons alors expliquer, est que la mise en œuvre d'une déduction formelle n'est ni suffisante ni même nécessaire à la production du savoir. Les raisonnements valides du physicien par exemple ne supposent pas la production de syllogismes, ni la démonstration de théorèmes applicables n'importe où et n'importe quand.

### **Induction, déduction et abduction**

Si l'on réfléchit au progrès scientifique et à la place qu'y occupe la contingence il semble nécessaire d'opposer la thèse scientifique au théorème logique ou mathématique plus nettement que ne le fait LEIBNIZ. Une thèse scientifique ne semble pas pouvoir être démontrée. Quand elle est complexe, elle n'est pas déduite, comme peut l'être la conclusion d'une proposition géométrique de théorèmes précédemment établis, de postulats ou bien de lemmes. Quand elle est très simple et semble se réduire à la constatation d'un fait, elle n'en est pas pour autant intuitionnée, découverte dans sa vérité par l'esprit. Il faut donc accorder sans fausse honte que les procédures démonstratives sont toutes incertaines ou faillibles. Le caractère nécessaire de la liaison de nos idées est une illusion.

Les philosophes et les logiciens ont longtemps distingué deux types de raisonnements, la déduction et l'induction. Une querelle s'est développée, mettant dos à dos les partisans de la déduction, souvent idéalistes, qui présentaient cette sorte d'inférence comme étant le seul raisonnement pouvant être considéré comme valide, et les partisans de l'induction, appartenant au courant empiriste, qui soutenaient que seule cette sorte d'inférence est capable de produire du savoir, d'apporter à une personne une connaissance qu'elle ne possédait pas auparavant. Sur son versant logique, la querelle oppose ceux qui généralisent en science le *modus tollens* et ceux qui le refusent.

Dérivée de la déduction, ou *modus ponens*, le *modus tollens* débouche sur le raisonnement suivant :

- 1) si A alors B
- 2) or on n'observe pas B
- 3) donc on n'a pas A

L'empiriste s'appuie sur un raisonnement similaire pour affirmer qu'une seule observation ou qu'une mesure sont suffisantes pour réfuter une thèse, quand le rationaliste réplique qu'il n'y a jamais véritablement d'expérience cruciale réfutant une thèse donnée car aucune mesure ou observation ne contredit une thèse isolée mais montre seulement qu'il y a une erreur dans l'ensemble de la théorie à laquelle on adhère sans qu'on sache où.

Le dépassement de cette opposition de l'idéalisme, ou du rationalisme, et de l'empirisme a motivé quantité de philosophes. Au XIX<sup>ème</sup> siècle, la révolution mentale produite par la pensée évolutionniste et le développement de la logique sur des bases originales a contribué à l'inflexion du débat. POINCARÉ a proposé une épistémologie "conventionnaliste". La pensée pragmatique, ou pragmaticiste si l'on retient le terme choisi par l'un de ses premiers promoteurs, Charles PEIRCE, a permis une reprise critique à la fois plus radicale et plus positive. Une nouvelle terminologie a accompagné cette rénovation des cadres logiques. PEIRCE a remis au goût du jour l'ancienne APAGOGÈ. Le raisonnement scientifique ordinaire, en tant que discours qui se risque dans une sorte de déduction faillible, est désormais identifié comme une explication incertaine, ou abduction. C'est ainsi par une abduction que KEPLER établit la forme elliptique de l'orbite de Mars et des autres planètes du système solaire.

D'après PEIRCE, la formulation canonique du raisonnement abductif est la suivante :

- (1) Le fait étonnant B est observé
  - (1.1) Mais si A était vrai, alors B coulerait de source
  - (1.2) Ainsi il y a une raison de supposer que A est vrai.

En voici un exemple correspondant à un épisode de la vie de PEIRCE. Celui-ci s'est rendu en Turquie dans le cadre d'une expédition scientifique chargée d'observer le transit de Vénus : « *Un jour, j'ai débarqué dans un port en Turquie. Sur mon chemin vers la maison où je venais en visite, je rencontrais un homme à cheval, entouré de quatre cavaliers portant un dais au-dessus de sa tête. Comme le gouverneur de la province était le seul personnage qui me vint à l'esprit qui eût pu faire l'objet de si grands honneurs, j'en déduisis que c'était lui* » (cité par Ian Hacking, 2006). Pouvant contribuer à

éclairer un pan mystérieux du réel et déboucher rapidement sur une action opportune, l'abduction est une forme générale du raisonnement. Dans l'anecdote rapportée par PEIRCE, elle fournit à une déduction son hypothèse (le cavalier est le vizir) et à une induction son objet (les vizirs sont des gens importants, qui vont à cheval sous un dais, ce qui les protège du soleil et montre leur pouvoir).

Extrait de « La sémiotique de Peirce », Nicole Everaert-Desmedt. On peut décrire en quatre phases le processus interprétatif de l'abduction (ou démarche hypothético-déductive) :

1. *Nous nous trouvons devant un fait surprenant, inexplicable dans le cadre de nos connaissances antérieures, c'est-à-dire que ce fait surprend nos habitudes ou nos préjugés, dans la vie quotidienne ; ou qu'il ne peut pas être pris en considération par une théorie existante, dans la recherche scientifique.*

2. *Nous formulons une hypothèse susceptible d'expliquer ce fait. Notre raisonnement est ancré dans la priméité : l'hypothèse, qui surgit dans l'esprit, avec une force instinctive, est suggérée par le fait ; il y a, en effet, une analogie entre le fait et les conséquences résultant de l'application éventuelle de l'hypothèse.*

3. *Nous appliquons ensuite cette hypothèse par déduction : nous en tirons toutes les conséquences nécessaires. Dans la vie quotidienne, nous adoptons une attitude conforme à l'hypothèse. Et dans la recherche scientifique, il s'agit d'établir avec la plus grande rigueur quels sont les tests qui permettraient, le cas échéant, de falsifier l'hypothèse, c'est-à-dire de prouver sa fausseté, son désaccord avec les faits d'expérience. S'il suffit d'une seule expérience pour infirmer une hypothèse, il en faudrait cependant une série infinie pour la confirmer.*

4. *Par une sorte d'induction, de généralisation à partir d'un certain nombre de tests positifs, nous considérons que les résultats vérifient l'hypothèse, provisoirement, jusqu'à preuve du contraire.*

*Prenons un exemple d'abduction dans la conversation courante :*

*Un phénomène surprenant : quelqu'un dit : « Il fait froid ici » ; or la conversation ne portait pas du tout sur des considérations atmosphériques... Il faut ajouter que nous sommes dans une pièce dont la fenêtre est ouverte et que moi, l'auditeur, je me trouve à proximité de cette fenêtre.*

2. *Une hypothèse explicative : je me réfère à une règle qui fait partie d'un bagage communément partagé de connaissances à propos des faits pratiques et culturels : il fait moins froid dans une pièce lorsque la fenêtre est fermée. Je me suis déjà trouvé dans des situations semblables : quand on juge qu'il fait froid dans une pièce, on ferme la fenêtre. J'établis aussitôt un rapport entre ma connaissance antérieure et le dire actuel du locuteur, d'où l'hypothèse : le locuteur souhaite que je ferme la fenêtre.*

*Une déduction : je tire la conséquence de l'hypothèse, sous la forme d'une prédiction, et j'adopte une attitude correspondante : je ferme effectivement la fenêtre.*

4. *Une induction : le locuteur ne fait pas d'objection quand je ferme la fenêtre ; au contraire, il me remercie : ce résultat vérifie mon hypothèse.*

C'est ce type de raisonnement qui se révèle fécond, qui permet l'avancée des connaissances. Avec lui, l'esprit combine déduction et induction. Le chercheur découvre des mécanismes, simples ou complexes, isolés ou combinés, qui régissent des pans entiers du réel. Avec les sciences systémiques, comme la météorologie ou l'écologie, les sociétés humaines se lancent dans la voie d'une compréhension fine de la nature. Les exemples fournis précédemment (le vizir, la fenêtre ouverte) ne sortent pas du cadre de la vie ordinaire. Mais ils renseignent sur l'essentiel. L'abduction est la découverte d'une structure où chaque élément prend sa place mais où rien n'est vraiment assuré. Une réflexion sur les enjeux de la connaissance scientifique ne doit pas aujourd'hui faire l'impasse sur le hasard. D'une part, les théoriciens ont construit une science du hasard, dans les domaines statistiques et probabilitaires, d'autre part, la connaissance apparaît de plus en plus comme un système de conjectures.

Beaucoup de penseurs contemporains ont insisté sur ces différents aspects de la connaissance scientifique, à l'instar d'Edgar MORIN. Celui-ci nous encourage à poursuivre nos efforts pour nous confronter à la complexité du réel (1985) :

*« Il faut rompre avec l'idée que les procédures analytiques excluent d'autres procédures. Respectons l'idée qu'il faut diviser, séparer les difficultés, mais acceptons en complément la pensée synthétique. Il faut introduire cette boucle qui fait que la pensée cesse d'être linéaire, et y intégrer la pensée*

*analytique. Des parties du tout, du tout aux parties : alors, la connaissance est une navette qui s'enrichit à chaque voyage. La vraie rupture ne se fait pas par rapport à tout ce qu'on nous a appris pour penser analytiquement, elle se fait avec le dogme qui est derrière. La pensée complexe ne nie pas les modes simplificateurs de la pensée, elle nie leur réification. L'héritage doit être intégré, mais aussi dépassé. »*

L'idée de boucle du savoir est sans doute précieuse. Même s'il forge une axiomatique différente de celle d'EUCLIDE, le mathématicien et logicien du XIX<sup>ème</sup> siècle Gottlob FREGE a pour projet de prolonger le travail de son lointain prédécesseur avec ce qui était déjà sans doute sa règle, faire la liste des axiomes servant à construire nos connaissances. Les scientifiques s'inscrivent tous, qu'ils le reconnaissent ou non, dans une tradition. Les physiciens d'aujourd'hui ont encore à apprendre des physiciens d'hier, même si ceux-ci n'ont guère de savoir à leur transmettre, ni sur les objets ni sur les méthodes. Cette reconnaissance de dette peut être généralisée aux scientifiques du passé dans leur ensemble. La science des Anciens témoigne en effet de problèmes rencontrés et élaborés aussi finement que possible, avec les moyens heuristiques et les instruments de l'époque. Bien la connaître permet de comprendre plusieurs choses essentielles. Elle renseigne sur le fait que la recherche de fondements absolus a toujours conduit à une impasse, que le bricolage des théories pour les faire correspondre aux faits connus n'est souvent qu'une manœuvre vaine, aboutissant au développement d'une sorte de rhétorique coupée du réel, enfin que le dialogue est un élément décisif non seulement de la vérification du savoir mais également, bien en amont, de la production de théories neuves.

### **L'esprit relatif à l'œuvre**

Dans le cadre des sciences expérimentales, qui est celui des procédures rationnelles faillibles, il convient de clarifier quelques idées communes. Le problème récurrent rencontré par les chercheurs est celui de trouver le cadre formel dans lequel les données expérimentales trouvent leur expression la plus juste ou la plus simple.

Avec cet exemple de champ disciplinaire qui donne lieu à interrogations, l'esprit relatif des sciences contemporaines se révèle. Et c'est pour nous l'occasion d'aborder rapidement la question de la rationalité des sciences humaines, comme la géographie ou l'économie, qui se confrontent au caractère chaotique des sociétés historiques. Nous ne détaillerons en revanche aucun exemple, nous contentant de suggérer que la rationalité scientifique tient toujours à un attachement à l'idée d'impartialité, d'abord entre les personnes, ensuite entre nos croyances puisque, comme individus ou comme chercheurs, nous sommes régulièrement victimes d'une double tendance contradictoire. Nous avons tendance à "prendre nos désirs pour la réalité", de même que l'amoureux qui se prend pour un Prince Charmant, mais également à croire ce que nous craignons le plus, à l'instar du jaloux qui se persuade de la trahison de sa femme. Or pour être raisonnables nous ne devrions pas renforcer nos certitudes à l'égard de ce qui nous enthousiasme ou de ce qui nous effraie et nous fascine.

Les jugements scientifiques, les procédures démonstratives élaborées en fonction d'un problème précis qui se pose à nous, doivent nous permettre de déjouer notre attente inconsciente des miracles ou bien des catastrophes !

Une science humaine, l'histoire par exemple, semble vouée à l'interprétation non à la démonstration. Interpréter un rêve, un texte sacré, un événement, c'est faire preuve de subtilité. L'implication de ses propres croyances, à commencer par ce qui nous semble relever du domaine de la valeur et non du fait, doit être reconnue ; l'illusion serait en effet de postuler une compréhension sans identification à l'autre ou bien un jugement raisonnable qui ne participerait pas d'une appréciation subjective. L'historien, comme les autres chercheurs en sciences humaines, cherche à penser ce qui se donne à penser, mais il n'est alors pas dupe du fait que ce qui se donne effectivement à penser, pour lui, à son époque, n'est autre que ce qu'il arrive lui-même à considérer comme étant important.

Même pour le cas particulier des sciences humaines, la rigueur d'une interprétation ne peut manquer de différer de la rigueur d'une démonstration. Illustrons la mise en œuvre de cette dernière. Les sciences sociales en général incitent à la production d'assertions relevant de la « *sociotechnique fragmentaire* » (*piecemeal social engineering*) suivant l'expression de Karl POPPER (1988), c'est-à-dire de jugements du type "on ne peut réaliser ceci sans réaliser cela du même coup", et ses variations

“on ne peut continuer à réaliser ceci sans dépasser à terme telle capacité de charge” ou bien “on ne peut entreprendre ceci sans obtenir localement tel effet pervers”.

Si l'on y prête attention on voit bien qu'une procédure démonstrative est requise pour justifier la nécessité de la liaison entre le ceci donné et le cela qui en découle, mais aussi pour découvrir et cerner la nature même de la relation. Et c'est toujours de l'établissement d'une vérité nécessaire, comprise comme résultat d'un dialogue extérieur qu'il s'agit. Les relations découvertes ne sont pas réductibles à la négation des évidences subjectives. L'explication scientifique diffère de la méditation, elle ne réalise pas dans une sorte de dialogue intérieur qui ne supposerait guère que de la lucidité ou de la sincérité de la part des chercheurs.

Ne manquons donc pas de souligner pour finir que la nécessité ainsi dévoilée n'est pas une fatalité. Les lois économiques pas plus que les régularités sociologiques ou les mécanismes psychologiques ne sont des normes s'imposant inconditionnellement ! Le but du scientifique, à vrai dire, n'est pas de justifier ce qui a été observé mais de prévoir ce qui peut advenir. Il lui faut une grande audace théorique pour se lancer dans de telles anticipations, qui renvoient à des mécanismes complexes et à des ensembles eux-mêmes complexes de mécanismes.

Les débats actuels sur le chômage sont une bonne illustration. Par exemple, il est relativement facile de montrer comment la mise en place de telle politique a précarisé telle classe sociale et a contribué à générer un chômage “structurel”, pour des personnes qui auront le plus grand mal à se réinsérer dans le monde du travail. Il est beaucoup plus difficile de prédire l'incidence, positive ou négative, de différentes mesures envisagées dans le domaine de la lutte contre le chômage. Mais, dans les deux cas, avant ou après coup, il s'agit toujours de mettre en lumière l'existence d'un lien nécessaire entre telle mesure politique et tel segment de population.

Il s'agit donc de procédures démonstratives, à partir du donné réduit à un ensemble de causes simples ou bien alors complété par la mesure d'effets plus chaotiques effectivement observés.

Nous revenons, en cette fin de parcours sur l'opposition de ce qui montre et de ce qui se démontre. Quand nous sommes pris par l'émotion devant une photographie, un instant de la vie des ouvriers du Bihar immortalisé par Sebastião SALGADO nous ne pouvons nous empêcher de juger.

Nous ne jugeons pas comme le juge, ni même comme le sociologue qui peut s'intéresser aux castes en Inde. Mais nous jugeons néanmoins ce qui peut apparaître comme essentiel : l'écart qui existe entre la pauvreté et la misère.

« L'essai photographique selon Sebastião Salgado », d'après Dominique Versavel





Industrie du charbon, Dhanbad, État de Bihar, Inde, 1989 - 60 x 90 cm (Projet [La Main de l'homme](#), 1986-1992, publié en 1993)

« À Dhanbad, les mines de charbon donnent du travail à 400 000 personnes. À la fin de la journée, une famille quitte la mine à ciel ouvert avec une charrette servant à apporter la nourriture aux ouvriers. »

© [Sebastião Salgado/Amazonas images](#). BNF, Estampes et photographie, EP-602-Boîte fol.

« Les photographies issues de ses longues observations donnent une forme immédiate et concrète à une information immatérielle, de nature économique. Démontrant l'absurdité destructrice de l'écosystème créé et subi par l'"animal humain", elles mettent au jour les macrophénomènes dont dépendent les communautés. Cette démarche démonstrative est le moteur des suites photographiques où l'auteur fait apparaître un engrenage économique envisagé jusque dans ses aberrations et invite à une prise de conscience : " Nous ne pouvons plus nous permettre de détourner les yeux", écrit-il dans *Exodes*. Voir et apprendre à voir est la première des étapes vers une amélioration du monde. »

L'image nous montre que le mythe de Sisyphe n'est pas une fable. Ce n'est pas qu'un symbole de la misère humaine, c'est aussi un document. Et il nous reste à penser, pour nous et pour tous les autres, pour ceux que nous connaissons parce que nous les côtoyons, ceux que nous ne rencontrons jamais, la possibilité d'un monde un peu moins injuste. La photographie nous démontre notre propre responsabilité. Lors de la Journée de la philosophie à l'Unesco de 2004, sur le thème *l'Avenir de l'être humain*, Jacques POULAIN affirme ainsi : « [...] *l'expérimentation pragmatique et consensuelle de l'homme par lui-même fait découvrir que l'être humain ne peut atteindre les fins qu'il avait fixées à l'histoire : qu'il ne peut s'ajuster une fois pour toutes à lui-même, mais que l'exercice partagé d'un jugement de vérité sur ses actions et ses désirs est la seule instance d'ajustement à l'action qui lui soit accessible. Il n'advient que lorsqu'il donne lieu à une vérité aussi objective qu'il affirme qu'elle l'est. Justice et émancipation sociales s'avèrent donc conditionnées par une émancipation intellectuelle et culturelle à l'égard de son appétit de maîtrise de lui-même.* »

Toute procédure démonstrative doit se charger d'exposer et de défendre son impartialité, ce qui la rend en apparence bienveillante, ce qui surtout lui confère sa rationalité propre, sa valeur de guide pour l'action.

## Conclusion

Constatant la multiplicité des démonstrations et procédures démonstratives, ce cours s'est efforcé d'être précis sur des points essentiels, l'axiomatisation d'un système de propositions, l'invention de définitions opératoires, la coordination des opérations mentales au cours du raisonnement. Il renseigne sans doute insuffisamment sur l'activité du mathématicien ou sur la pluralité des méthodes pouvant être utilisées afin de développer nos connaissances, dans une voie déductive ou abductive suivant qu'on désigne les sciences logiques et mathématiques, formelles, ou les sciences physiques et biologiques, modélisatrices. Finalement il ne prétend montrer qu'une seule chose, le fait que la démonstration sous toutes ses formes est indispensable à la production de l'objectivité.

Quand THOMAS d'Aquin lisait ARISTOTE il était particulièrement attentif à la manière dont la raison pouvait se retourner sur sa propre activité, non seulement la justifier mais également en étendre le champ. Une longue citation de son introduction au commentaire des Seconds Analytiques peut fixer nos idées : « *La raison peut certes contrôler les puissances humaines qui lui sont inférieures, mais aussi sa propre activité. L'intelligence a en effet la propriété de s'auto-comprendre, et la raison de réfléchir sur elle-même. Or s'il a fallu que la raison se penche sur l'activité manuelle pour mettre au point une façon de bâtir ou de forger qui permette à l'homme de s'y exercer avec méthode et facilité, pour le même motif il faut un art qui, en dirigeant l'activité de la raison, lui permette de réfléchir avec ordre, aisance et sans erreur. Cet art, c'est la logique ou science rationnelle. "Rationnelle", elle l'est parce que, comme tous les arts, elle est conforme à la raison, mais surtout parce que l'acte de la raison est son sujet spécifique. C'est pourquoi elle se révèle être l'art des arts en dirigeant l'œuvre de la raison, d'où naissent les autres arts.* » Argumentation spéciale, la démonstration nous apparaît ainsi comme relevant de l'« *art des arts* ». Alors que paresse et la lâcheté agissent plus fortement qu'hier

pour empêcher l'humanité de réfléchir son action, ne soyons pas moins exigeants que les scolastiques dans notre quête d'une discipline de la raison !

Les conditions d'un progrès pour toutes les sciences sont une sorte d'épuration du discours doublée de l'adoption de procédures d'élimination délibérée d'assertions douteuses.

D'une part, en effet, le scientifique doit combattre le psychologisme, l'intrusion de la psychologie dans l'édifice qu'il s'efforce de construire. Il ne s'agit pas de refuser à la psychologie le titre de science, ni son intérêt dans son domaine propre, mais de se méfier des croyances qui nous gouvernent, des soi-disant évidences ou certitudes qui ne semblent pas pouvoir être remises en question mais qui ne doivent pas pour autant être utilisées comme principes. Les principes de la science sont des définitions ou des règles de déduction qui sont librement choisies. La science se distingue par la création d'un langage technique remplaçant le langage ordinaire, dissipant ses équivoques grammaticales et rejetant ses symboles chargés d'une multitude confuse de significations.

D'autre part, le scientifique élabore ses théories *more geometrico* non pas pour satisfaire un besoin de rigueur voire une manie le transformant en monstre froid, adversaire du moindre sentiment ou de la plus infime émotion, mais pour être en mesure d'éliminer les assertions défectueuses, celles qui donnent l'existence à des chimères ou supposent la consistance d'objets qui n'en ont pas. Sans cette élimination, qui remplace en quelque sorte pour les idées ce que la sélection naturelle opère pour les organismes vivants, la connaissance scientifique se figerait et s'enfermerait bien vite dans des impasses. Exemplaaires à cet égard sont les recherches de GÖDEL quand on cesse d'en faire un épouvantail !

La preuve de l'incomplétude de l'arithmétique n'est en aucune façon un coup sévère porté à la recherche scientifique, par la révélation d'une lacune affectant toute axiomatique. Ce n'est pas davantage la reprise de l'idée mythique d'*hybris* ou celle de péché originnaire. Ce n'est pas la traduction de notre finitude. Certes, un entendement limité ne peut que privilégier les procédures finitistes et ne peut construire que des axiomatiques limitées. Mais cela ne signifie pas que le ver soit dans le fruit. Cela ne veut pas dire que la science souffre d'un défaut de rigueur. Au contraire, la reconnaissance de cette limite, dans une démonstration souligne davantage encore le fossé qui existe entre une proposition scientifique contrôlée et une assertion issue d'une argumentation très subtile. Le génie scientifique de GÖDEL montre la puissance démonstrative de la raison humaine lorsque celle-ci est alliée à l'imagination. Ainsi, l'adoption de procédures d'élimination délibérée, symbolisée par l'espèce de tribunal que constitue en permanence l'ensemble de la communauté scientifique, relève beaucoup moins de la prudence que de l'audace. Le progrès des mathématiques est exemplaire de la refonte permanente de l'idée de vérité. Une seule chose semble néanmoins assurée : l'infléchissement de cette idée de vérité, si délicate à saisir, dans un sens relativiste, avec une oscillation entre deux pôles, celui de la concorde avec le réel et celui de la simple cohérence formelle.

## Bibliographie

ARISTOTE. 1966. *Premiers Analytiques*. Paris : Librairie Vrin

ARISTOTE. 1966. *Seconds Analytiques*. Paris : Librairie Vrin

ARISTOTE. 1992. *La Métaphysique*. Paris : Presses Pocket

DELAHAYE Jean-Paul. 1997. *Le fascinant nombre* □. Paris : Pour la Science- Belin

ELSTER Jon. 2006. *Raisons et raison*. Paris : Collège de France/Fayard

FREGE Gottlob. 1970. *Fondements de l'arithmétique*. Paris : Le Seuil, coll. "L'ordre philosophique"

KHODOSS Claude. 1958. *A.A. Cournot. Critique philosophique. Textes choisis*. Paris : P.U.F., coll. "Les grands textes"

- LALANDE André. 1926. *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*. Paris : P.U.F.
- LATOURET Bruno, WOOLGAR Steve Woolgar. 1988. *La Vie de laboratoire : la Production des faits scientifiques*. Paris, La Découverte.
- LEIBNIZ G.W.F. 1966. *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*. Paris : G.F. Flammarion
- LLOYD Geoffrey. 1993. *Pour en finir avec les mentalités*. Paris : La Découverte.
- PERELMAN Chaïm. 1970. *Le champ de l'argumentation*. Bruxelles : Presses Universitaires.
- POPPER Karl. 1988. *Misère de l'historicisme*. Paris : Agora
- ROSTAND Françoise. 1962. *Sur la clarté des démonstrations mathématiques*. Paris : Vrin, coll. "Problèmes et controverses"
- ROUGIER Louis. 1955. *Traité de la connaissance*. Paris : Gauthiers-Villars.
- RUSSELL Bertrand. 1956. *Portraits from Memory and Other Essays*. Londres : George Allen & Unwin.
- ULLMO Jean. 1969. *La pensée scientifique moderne*. Flammarion, coll. "Science"

### Ressources en ligne

Anonyme. « Thalès de Milet »

[www.clevisluzon.qc.ca/professeurs/mathematiques/rossa/Logimath%5C02%20Thales.pdf](http://www.clevisluzon.qc.ca/professeurs/mathematiques/rossa/Logimath%5C02%20Thales.pdf)

ALAIN. « Apprendre par l'esprit », in *Propos sur l'éducation*, n° XXVI

[http://classiques.ugac.ca/classiques/Alain/propos\\_sur\\_education/propos\\_sur\\_education.doc](http://classiques.ugac.ca/classiques/Alain/propos_sur_education/propos_sur_education.doc).

ARSAC Gilbert. 2004. « Démonstration en géométrie et en algèbre, figure et calcul littéral : quels rapports ? » Journée APMEP du 13 nov. 2004

<http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/ArsacD05I.pdf>

BERGE Claude, NIMIER Jacques. 1989. « Entretien » tiré d'*Entretien avec des mathématiciens*. Editions de l'I.R.E.M., Académie de Lyon.

[http://perso.orange.fr/jacques.nimier/entretien\\_berge.htm](http://perso.orange.fr/jacques.nimier/entretien_berge.htm)

BERTRAND Joseph. 1889. *D'Alembert*. Paris : Hachette, pp. 5-6

<http://bibliotheq.net/joseph-bertrand/d-alembert/page-5.html>

<http://bibliotheq.net/joseph-bertrand/d-alembert/page-6.html>

BKOUICHE Rudolf. « La démonstration: du réalisme au formalisme »

<http://casemath.free.fr/divers/tribune/demonstr.pdf>

CHAITIN Gregory. 2003. « L'Univers est-il intelligible ? »

<http://www.cs.auckland.ac.nz/CDMTCS/chaitin/larecherche2.html>

CHEMLA Karine. . Relations entre procédures et démonstration : la mesure du cercle dans les Neuf

Chapitres sur les procédures mathématiques et dans leur commentaire par Liu Hui (IIIème siècle) »

<http://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/Seminaires/theme4.html>

DEBART Patrice. 2006. « Démonstrations géométriques du théorème de Pythagore »

[http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/debart/geoplan/pythagore\\_classique.html](http://www.maths.ac-aix-marseille.fr/debart/geoplan/pythagore_classique.html)

DOWEK Gilles, « Le jeu du coloriage : le théorème des quatre couleurs », Conférence de la Cité des Sciences et de l'Industrie du samedi 23 octobre 2004

[http://www.cite-sciences.fr/francais/ala\\_cite/college/images/son\\_video3.gif](http://www.cite-sciences.fr/francais/ala_cite/college/images/son_video3.gif)

EVERAERT-DESMEDT Nicole. « La sémiotique de Peirce », Facultés universitaires Saint-Louis, Bruxelles

<http://www.signosemio.com/peirce/semiotique.asp>

HACKING Ian. « Méthodes de raisonnement ». Cours 2005-2006

[http://www.college-de-france.fr/media/ins\\_pro/UPL32424\\_raisonnement.pdf](http://www.college-de-france.fr/media/ins_pro/UPL32424_raisonnement.pdf)

HILBERT David. Extraits de « Les Fondements des mathématiques » (1927), avec renvoi sur le site Gallica pour *Les Principes fondamentaux de la géométrie*

<http://www.univ-irem.fr/commissions/epistemologie/ressouces/ress.ext/grands%20textes/hilbert.htm>

LARCHER C. « La simultanité en Relativité restreinte », Clé@

<http://www.ac-nice.fr/clea/lunap/html/Relativite/RelatRestComp3.html>

MORIN Edgar. 1985. « La laïcité en éducation » Lyon, *Voie Libre*

[http://www.mcxapc.org/docs/apc/morin\\_9.pdf](http://www.mcxapc.org/docs/apc/morin_9.pdf)

PASCAL Blaise. « De l'esprit géométrique » in *Opuscules et oeuvres*

<http://www.ac-nice.fr/philo/textes/Pascal-Opuscules.htm>

PEIRCE Charles S. 1878. *La Logique de la science*

[http://classiques.uqac.ca/classiques/Peirce\\_Charles\\_Sanders/logique\\_de\\_la\\_scienc/logique\\_de\\_la\\_scienc.html](http://classiques.uqac.ca/classiques/Peirce_Charles_Sanders/logique_de_la_scienc/logique_de_la_scienc.html)

POULAIN Jacques. 2006. *Introduction à la Journée de la philosophie l'Avenir de l'être humain*, UNESCO

<http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001460/146023fo.pdf>

THOMAS d'Aquin. *Proœme au commentaire des Seconds Analytiques*

<http://www.thomas-d-aquin.com/Pages/Introductions/02Logique.htm>

VERSAVEL Dominique. « L'essai photographique selon Sebastião Salgado », B.N.F., dossier "Territoires et vies"

<http://expositions.bnf.fr/Salgado/arret/1/index2.htm>