M1 Didactique – La dimension empirique de l'enseignement au collège
Plongement dans les eaux profondes de l'homologie didactique

Les objectifs de cette séance

Les objectifs recouvrent plusieurs champs et se croisent :

- Tout d'abord il s'agit de vous faire expérimenter, par vous même, *du côté de l'apprenant*, ce que peut être une approche empirique et expérimentale de la géométrie plane : vous allez, comme le font les élèves de collège, découvrir la géométrie avec les outils environnant qui vous sont donnés par l'institution : c'est-à-dire essentiellement une règle, une équerre et un compas. Vous travaillerez, *comme les élèves*, dans un modèle : au lieu que ce modèle soit la feuille de papier, cela sera l'écran de l'ordinateur. Et au lieu d'apprendre la géométrie euclidienne, nous allons aborder les géométries non euclidiennes.
- On voit donc poindre un second objectif, plus « disciplinaire », en réalité, plus culturel, mais en même temps tout à fait « didactique « et donc, largement professionnel. L'expérience montre que ne connaître que la géométrie affine et euclidienne induit naturellement des réflexes pertinents (puisque l'on ne change jamais de cadre) qui s'accompagnent de représentations largement partielles sur la géométrie en général.
- Nous allons faire de la géométrie élémentaire du triangle et découvrir que le théorème des milieux, que l'on peut largement considéré comme affine, a en réalité une version absolue, ou encore que les droites remarquables du triangles sont aussi « absolument » remarquables, mais en un sens à découvrir.

Présentation minimaliste de la géométrie hyperbolique

On s'intéresse ici à une géométrie dans laquelle le V° postulat d'Euclide n'est pas vrai, et, telle que, parmi les prémisses d'Euclide, seul ce principe n'est pas vérifié (en particulier la géométrie est implicitement « sur R », c'est-à-dire sur un corps archimédien, avec les axiomes de continuités implicites qui conviennent.

On dit généralement que « par un point passe plus d'une parallèle à une droite donnée ». Selon ce que l'on va appeler « parallèle », par un point passera une infinité de parallèles à une droite donnée (non sécantes en fait) ou encore «seulement deux » parallèles (définition de Lobatchevsky - à découvrir pour nous).

Cette géométrie a été pressentie par Gauss dès 1816. Deux premières constructions théoriques proposées comme telles ont été données, indépendante l'un de l'autre par Bolyai et Lobatchevsky (1829). Un premier modèle local du plan hyperbolique a été donné sur des surfaces réelles par Beltrami (1868), duquel découle un modèle plan simple (Klein – 1872) qui a l'avantage d'être issu de considérations projectives, et l'inconvénient d'être non conforme (en particulier d'angle nul peut être représenté par des droites à 120° par exemple)

Nous allons explorer cette première géométrie non euclidienne dans un modèle conforme, mathématiquement facile d'accès : le modèle du « disque de Poincaré » qui date 1901.

La notion de modèle

En géométrie, depuis Geiger (1924), on n'essaie plus de définir les objets premiers comme les points et les droites, mais seulement les relations entre ces objets sous forme d'axiomes. Par contre on dit que l'on a une interprétation d'un système d'axiomes, quand on fait correspondre aux mots premiers des objets précis. On dit qu'une interprétation constitue un *modèle* si les axiomes sont vérifiés. Voici la description mathématique du modèle du "disque de Poincaré", cette description n'est aucunement nécessaire pour la suite, et d'aucune aide pour comprendre ce que l'on va explorer.

Points, droites et symétries du modèle

Le plan hyperbolique est l'intérieur d'un cercle, appelé alors horizon. Les points à l'intérieur sont les points du plan. Les points du cercle sont les points à l'infini du plan hyperbolique (on dira les points idéaux).

La droite (AB) est l'arc de cercle passant par A et B et orthogonal à l'horizon, c'est-à-dire dont les tangentes aux points d'intersection sont orthogonales. Le segment (AB) ne pose pas de problème, c'est la partie entre A et B mais aussi l'intersection des demi-droites [AB) et [BA) comme dans le cas euclidien.

La symétrie orthogonale pour ce modèle est l'inversion euclidienne par rapport à l'arc de cercle. Historiquement c'est à cause des propriétés de l'inversion – et de son écriture complexe homographique - que Poincaré a découvert ce modèle.

Le modèle est conforme, c'est-à-dire que les angles hyperboliques des objets (droites ou demi-droites) sont les angles des tangents de ces objets. Voir dans un modèle conforme est bien plus confortable, d'où le « succès » du modèle de Poincaré.
En particulier l'orthogonalité est définie par les cercles orthogonaux : la perpendiculaire à (AB) en M est (la trace du) cercle passant par M, orthogonal à l'horizon – pour être une droite hyperbolique – et orthogonal au cercle support de la droite hyperbolique – pour lui être perpendiculaire. Elle se construit aussi sans difficulté par les inversions.

L'objet de la séance – travail à effectuer

L'homologie didactique, dont il est question dans le titre, consiste à vous plonger dans ce modèle comme on plonge les élèves dans la géométrie : ils achètent ce qui s'appelle une règle pour tracer des droites, une équerre pour tracer des angles droits (la moitié d'un plat) et un compas pour tracer des cercles. Vous aurez les mêmes outils – et bien d'autres pour vous faciliter la vie – sous la forme de macros du logiciel CaRMetal. En particulier, avant le compas, vous aurez l'outil « pliage », la symétrie orthogonale qui va permettre de construire le cercle et ses extensions hyperboliques (et même absolues)

La séance commencera par une prise en main collective rapide du logiciel de géométrie dynamique utilisée. Libre et gratuit, il se télécharge ici : http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/
Ce sera celui utilisé pour le module TICE.

Pour la partie Géométrie hyperbolique, **appeler Hz** le cercle horizon de référence, ie le cercle à l'infini du modèle : cela évite de le montrer, il est pris par défaut.

Travail à effectuer

La première partie de la fiche se fera en séance. La fin et la rédaction finale se fera sous forme de travail à faire pour la prochaine séance. Les comptes rendus seront ensuite exploités pour la séance de présentation didactique de la géométrie du collège.

Tout se passe à l'intérieur d'un cercle "de rayon fixe" nommé Hz.
Important : Pour l'intersection de deux droites ou de deux segments, utiliser la macro intersection de deux droites

Premières activités sur les droites.

Activité 1 : familiarisation avec les items sur les droites
1.a. Prendre une droite (AB), un point N n'appartenant pas à (AB). En utilisant deux fois l'item « perpendiculaire hyperbolique », construire la perpendiculaire à (AB) en N, puis la droite d passant par N perpendiculaire à cette perpendiculaire à (AB). Par construction les droites d et (AB) ont une perpendiculaire commune.
1.b. Cette situation serait celle du parallélisme dans le cas euclidien, que peut-il en être ici ? Nous allons observer quelques différences. Prendre un point P sur la droite d et construire la perpendiculaire à d en P. En déplaçant P sur d et éventuellement N dans le plan, quelles remarques faites vous ?
1.c. Énoncer - par écrit - vos premières conjectures quant à l'orthogonalité.

Activité 2 : vers le parallélisme
Dans cette activité on se donne 4 points A, B, C et D et les deux droites hyperboliques (AB) et (CD). On se place dans un contexte où ces deux droites ne sont pas sécantes.
2.a. Prendre un point M sur (AB). La perpendiculaire en M à (AB) coupe (CD) en N (on se place si nécessaire dans la situation). Tracer la perpendiculaire à (CD) en N. (Colorier les deux perpendiculaires de couleur différente). Déplacer M sur la droite (AB) et observer la situation. Y a-t-il une position de M particulière. Que réalise-t-on alors dans ce cas : faire une conjecture.

2.b Vérification de la conjecture
On s'autorise désormais la possibilité d'utiliser l'item « perpendiculaire commune » sur les droites (AB) et (CD). Le faire et déplacer à nouveau M sur la droite (AB) pour vérifier le bon fonctionnement de ce nouvel item. Puis supprimer (outil corbeille) le point M sur (AB).

2.c. On garde A, B, C fixes (vous pouvez les déplacer pour des observations différentes, cela va de soi). Et on fait tourner D autour de C. Observer l'existence de la perpendiculaire commune aux deux droites … puis réfléchir à ce que peuvent être deux droites parallèles dans ce contexte géométrique.

Institutionnalisation : comme en classe, l'enseignant un peu pressé donne des pistes. On veut ici que le « parallélisme euclidien » se dissocie en deux branches *exclusives l'une de l'autre* « être parallèles » et « avoir une perpendiculaire commune ».

Droites remarquables du triangle – Exploration des hauteurs

Nous allons maintenant explorer ce qu'il advient de la géométrie élémentaire du triangle.

Activité 3 : les hauteurs

Il est naturel de commencer par les hauteurs car ce sont simplement des perpendiculaires particulières. Nous n'avons pas besoin d'autres outils.
Prendre trois points A, B et C, non alignées ; construire les trois droites passant par ces points pris deux à deux, et deux premières hauteurs du triangle ABC. Se placer dans le cas où elles sont sécantes. Nommer H leur intersection.

3.a. Dans ce cas, construire la troisième hauteur. Qu'observe-t-on ? Sachant qu'il existe un outil (palette Tests) permettant de comparer si deux points sont confondus, envisager une démarche pour tester votre conjecture. Le faire et confirmer ainsi votre conjecture.
3.b. En déplaçant l'un des points A, B, ou C, se placer dans le cas où H n'existe pas. On aimerait savoir si la configuration possède une propriété particulière : l'idée est de penser que si H n'existe pas, une autre propriété, plus générale, est probablement encore vraie. Si les hauteurs n'ont pas un point commun, parce qu'elles sont non sécantes deux-à-deux, que peuvent-elles bien avoir d'autre en commun ? Rédiger une conjecture, puis :
3.c. Envisager comment vérifier votre conjecture avec le logiciel.
3.d. Réaliser une telle vérification et rendre compte sur votre fiche des résultats (conjecture confirmée ou infirmée).
3.e. Bien entendu, si votre première conjecture est fausse, envisager une autre conjecture et la tester. Si elle s'avère généralement vraie, envisagez quelques cas particuliers pour la confirmer ou la préciser.

Un bilan collectif de cette activité sera fait avant de poursuivre avec les médiatrices.

Droites remarquables du triangle – votre premier théorème hyperbolique

Bilan de l'activité 3 : suite aux observations faites sur les hauteurs, on peut conjecturer que certaines propriétés de droites remarquables du triangles vont s'étendre au cas hyperbolique et que les concours des droites comme hauteurs, médiatrices ou bissectrices (directement liées à l'orthogonalité et aux symétries) vont s'étendre en ce sens que ces droites vont avoir quelque chose en commun. Ce "quelque chose en commun", nous l'appellerons désormais dans la suite la propriété d'***être en faisceau***.
Ce quelque chose en commun est, en définitive soit *un point*, et le faisceau sera dit « *à centre* », soit *une perpendiculaire*, et le faisceau sera dit « *à axe* » soit *le parallélisme* (en fait un point à l'infini dit *point idéal*), et le faisceau sera dit « *sans support* ».

Activité 4 : les médiatrices

Prendre à nouveau 3 points, A, B, les droites qu'ils définissent, utiliser l'item « médiatrice » pour vérifier que les médiatrices[1] sont généralement « à centres » ou « à axes ». On notera qu'il est difficile de se placer dans la situation « sans support » ; on peut modifier la taille de l'horizon d'un pixel pour s'y placer, de manière perceptive.

---

[1] Dans ce contexte la médiatrice de deux points A et B est l'axe de la symétrie orthogonale qui envoie A sur B. On suppose implicitement qu'elle existe et qu'elle est unique (résulterait des axiomes « hyperboliques »)

Activité 5 : votre premier théorème hyperbolique (déjà)

Dans cette activité, on se propose de démontrer, sur la base du pinceau des médiatrices, un premier théorème. Pour cela on suppose quelques implicites élémentaires, à savoir que toute symétrie centrale de centre P est la composée de deux symétries orthogonales d'axes orthogonaux en P, l'un pouvant être choisi arbitrairement. Alors les deux symétries orthogonales commutent, ceci n'est qu'une propriété algébrique, basée sur leur involution.
On est dans la même situation que les élèves en début de collège qui étudie les propriétés des isométries sur la base de leur action ou en fin de collège quand ils font leurs premières démonstrations sur la base de beaucoup d'implicite : cette activité est donc un exemple d'homologie didactique, dans un mélange entre l'exploration empirique (ici le support d'un modèle) et l'approche hypothético-déductive précise (éventuellement).

5.a. En utilisant l'item *Segment* plutôt que *Droite*, construire un triangle ABC. Placer I et J les milieux de [AB] et [AC] (par l'item hyperbolique du même nom). Construire $\Delta = (IJ)$ et d_1 et d_2 les perpendiculaires à Δ respectivement en I et J. Construire enfin $M = s_{d1}(B)$. Le reste se passe autant à l'écran que sur une feuille de papier.
5.b. Observer (par simple écriture algébrique) que $s_J o s_I = s_{d2} o s_{d1}$. En déduire que $s_{d2}(M) = C$. Que représentent d_1 et d_2 pour le triangle BMC ?
5.c. Quelle propriété (commune) ont d_1 et d_2 ? Qu'en déduire pour la médiatrice de [BC] ?
5.d. Transformer ce résultat en votre premier théorème absolu, le théorème des milieux :
Dans un triangle, la droite qui joint le milieu de deux côtés …
Note : penser à avoir un libellé suffisamment général (et précis) pour que le théorème soit « absolu » c'est à dire vrai aussi dans le cas euclidien.

Cercles

Dans cette partie nous supposerons connues les quelques propriétés suivantes – à nouveau purement algébriques – des symétries orthogonales : la conservation de l'orthogonalité et le fait que les seules droites globalement invariantes sont l'axe de la symétrie et ses droites orthogonales.

Une définition absolue du cercle : le cercle de centre O passant par A est l'image de A dans le pinceau de droites passant par A. Autrement dit, c'est le lieu des points A' image de A dans la symétrie orthogonale d'axe d quand d est une droite tournant autour de O.

Précision technique ; pour prendre un point sur l'horizon, il faut rendre l'horizon visible avec l'outil "baguette magique" de la palette "Édition". On peut ensuite cacher à nouveau l'horizon.

Activité 6 : exploration sur le cercle hyperbolique

6.a. Prendre O et A deux points hyperbolique et I un point idéal (sur l'horizon). Construire le point A' symétrique hyperbolique de A dans la symétrie de droite (OI). Faire le lieu de A' quand I décrit l'horizon. Quel objet géométrique euclidien semble être un cercle hyperbolique dans le modèle de Poincaré ?

6.b. Confirmation de la conjecture – tentative 1 : prendre trois points autres que A et A' sur le lieu et construire le cercle euclidien passant par ces trois points en utilisant l'item "cercle circonscrit" de la palette de constructions euclidiennes. En utilisant que cet item construit aussi le centre euclidien dégager une exploration qui semble infirmer la conjecture.

6.c. Confirmation de la conjecture – tentative 2 : La précision du logiciel dans les mesures est telle qu'un point sur objet du lieu n'est pas assez précis pour être un point du cercle. On peut envisager une autre approche. Prendre J, K et M trois autres points idéaux. Noter respectivement A_2 et A_3 les symétriques hyperboliques de A par rapport à (OJ) et (OK), puis N le symétrique de A par rapport à (OM). Rendre la palette de construction euclidienne et prendre le cercle circonscrit euclidien passant par A', A_2, et A_3. L'outil construit aussi le centre euclidien de ce cercle. Dégager une exploration qui cette fois semble confirmer que A et N sont bien des points du cercle (euclidien) passant par A', A_2 et A_3.

Phase d'institutionnalisation : On retient de cette exploration que le cercle hyperbolique, dans le modèle du disque de Poincaré, est un cercle euclidien.

6.d. Que dire des médiatrices (hyperboliques) de trois points pris sur un même cercle (hyperbolique), et pourquoi ? Réciproquement, que dire d'un triangle ABC dont les médiatrices sont concourantes en O ?

6.e. Justifier que trois points d'un cercle hyperbolique ne sont pas alignés. En déduire que la perpendiculaire au rayon en un point du cercle ne rencontre le cercle qu'en ce point ; que vient-on de montrer ?

6.f. Une propriété euclidienne que ne vérifient pas les cercles hyperboliques. Prendre deux points A et B et O leur milieu (hyperbolique). Avec l'item "cercle hyperbolique", construire le cercle de centre O passant par A. Prendre un point M du cercle hyperbolique et la perpendiculaire à (AM) issue de B. Que constate-t-on ? Quelle différence fondamentale avec le cercle euclidien ?

Les autres cycles

Dans les parties précédentes, nous avons repris des notions usuelles et vu comment elles pouvaient s'étendre à un cadre plus vaste, tout en restant cohérente avec le cas euclidien connu : la notion d'être en pinceau est une extension conceptuelle des droites soit concourantes, soit parallèles du contexte euclidien, le théorème des milieux est une version « absolue » du théorème du même nom dans la situation euclidienne.
Nous sommes assez familiarisé avec les premiers outils pour aborder maintenant des situations propres à la géométrie hyperbolique, qui n'ont pas d'équivalent en terme d'objets euclidiens spécifiques.

Activité 7 : l'équidistante

Construction préliminaire : prendre un triangle ABC (avec des segments) et ses médiatrices. Se placer dans une configuration où les médiatrices ne sont pas concourantes. Tracer Δ la perpendiculaire commune aux médiatrices.

Nous avons vu à l'activité 6 que trois points sont cocycliques (sur un même cercle) si et seulement si leurs médiatrices sont concourantes. À quelle propriété – en terme de courbe – peut correspondre le cas où les médiatrices ont une perpendiculaire commune ? On a envie de dire que les points A, B, et C sont sur une même courbe, bien particulière, dans ce cas là.

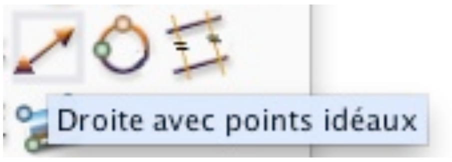
Or la définition du cercle par l'image d'un point d'un faisceau à centre induit naturellement une généralisation celle de l'image d'un faisceau … à axe.

7.a. Le tracé de la courbe. Prendre un point M sur la droite Δ et construire d, la droite perpendiculaire à Δ en M. Construire ensuite A' le symétrique hyperbolique de A par rapport à d. Et enfin le lieu de A' quand M décrit la perpendiculaire commune. Premiers constats.
7.b. Explorer avec le logiciel le lieu obtenu, pour conjecturer l'objet euclidien qui lui correspond.
7.c. Construire – simplement – cet objet euclidien, à partir de A et d'autres points que B et C. Puis vérifier – comme en **6.c.** – que B et C sont bien des points de l'objet.
7.d. Justifier – à l'aide d'arguments vus dans les premières activités – que l'objet obtenu ne peut pas être une droite hyperbolique.
7.e. À quel contexte euclidien correspond la situation ? Quel est alors le lieu obtenu dans le cas euclidien ? Pourquoi, en fait, le nom d'« équidistante » pour cette courbe ?

Activité 8 : L'horicycle

Après l'image d'un point par un pinceau à centre, puis un pinceau à axe, il reste un dernier cycle à étudier, celui produit par un pinceau "sans support". Traditionnellement, cette courbe s'appelle un horicycle (horocycle en anglais).

Construction préliminaire



Dans cette construction préliminaire, nous allons utiliser pour la première fois une droite hyperbolique *orientée*, avec *ses points idéaux* eux aussi *orientés*.

Cet outil est un outil du *modèle hyperbolique* car les points idéaux ne sont pas des points hyperboliques, mais nous en avons besoin pour utiliser un des deux points à l'infini, et un point clairement identifié, d'où l'usage d'un axe.

8.a. Construction d'un faisceau sans support de médiatrices avec point idéal donné : Prendre une droite d_1 avec points idéaux, (UV), U et V servant uniquement de poignées d'action sur la figure. Nommer I et J les deux points idéaux. Prendre un point A et construire B le symétrique de A par rapport à d_1. Construire une autre droite d_2 passant par I, puis C le symétrique de B par rapport à d_2.
8.b. Que peut-on dire des médiatrices du triangle ABC ?
8.c. Construction de l'horicycle comme lieu : prendre un point M sur l'horizon, et construire A' l'image de A dans la symétrie par rapport à la droite (IM). Puis faire le lieu de A' quand M varie sur l'horizon.
8.d. Conjecturer quel type d'objet euclidien correspond à l'horicycle dans le modèle de Poincaré. Faire les vérifications d'usage, comme dans les activités précédentes.

I est appelé centre de l'horicycle car toute droite passant par I est axe de symétrie de l'horicycle.

En résumé

Deux droites peuvent avoir en commun	On dit qu'elles …	Cas des médiatrices d'un triangle : A, B, C sont sur
un point	… sont sécantes	un cercle
une perpendiculaire	… ont une perp. commune	une équidistante
un point idéal	… sont parallèles	un horicycle

Trois droites peuvent avoir en commun	On dit qu'elles forment un pinceau	L'image d'un point par un tel pinceau est
un point	à centre	un cercle
une perpendiculaire	à axe	une équidistante
un point idéal	sans support	un horicycle