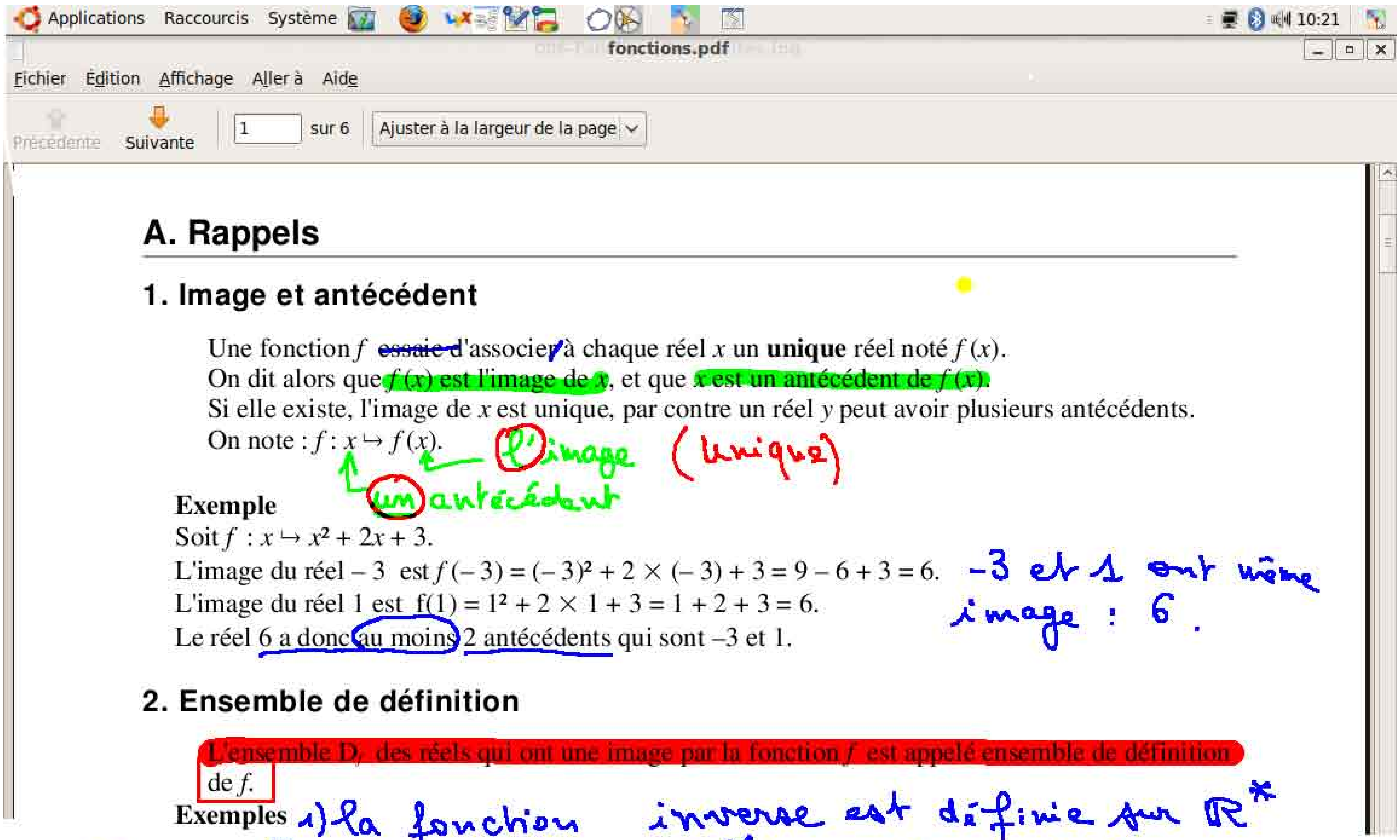


A. Rappels

1. Image et antécédent

Une fonction *f* ~~essaie d~~'associe~~r~~ à chaque réel *x* un **unique** réel noté *f* (*x*).
On dit alors que *f* (*x*) est l'image de *x*, et que *x* est un antécédent de *f* (*x*).
Si elle existe, l'image de *x* est unique, par contre un réel *y* peut avoir plusieurs antécédents.
On note : $f : x \mapsto f(x)$.

l'image (unique)

un antécédent

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x + 3$.
L'image du réel – 3 est $f(-3) = (-3)^2 + 2 \times (-3) + 3 = 9 - 6 + 3 = 6$.
L'image du réel 1 est $f(1) = 1^2 + 2 \times 1 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$.
Le réel 6 a donc au moins 2 antécédents qui sont –3 et 1.

-3 et 1 ont même image : 6.

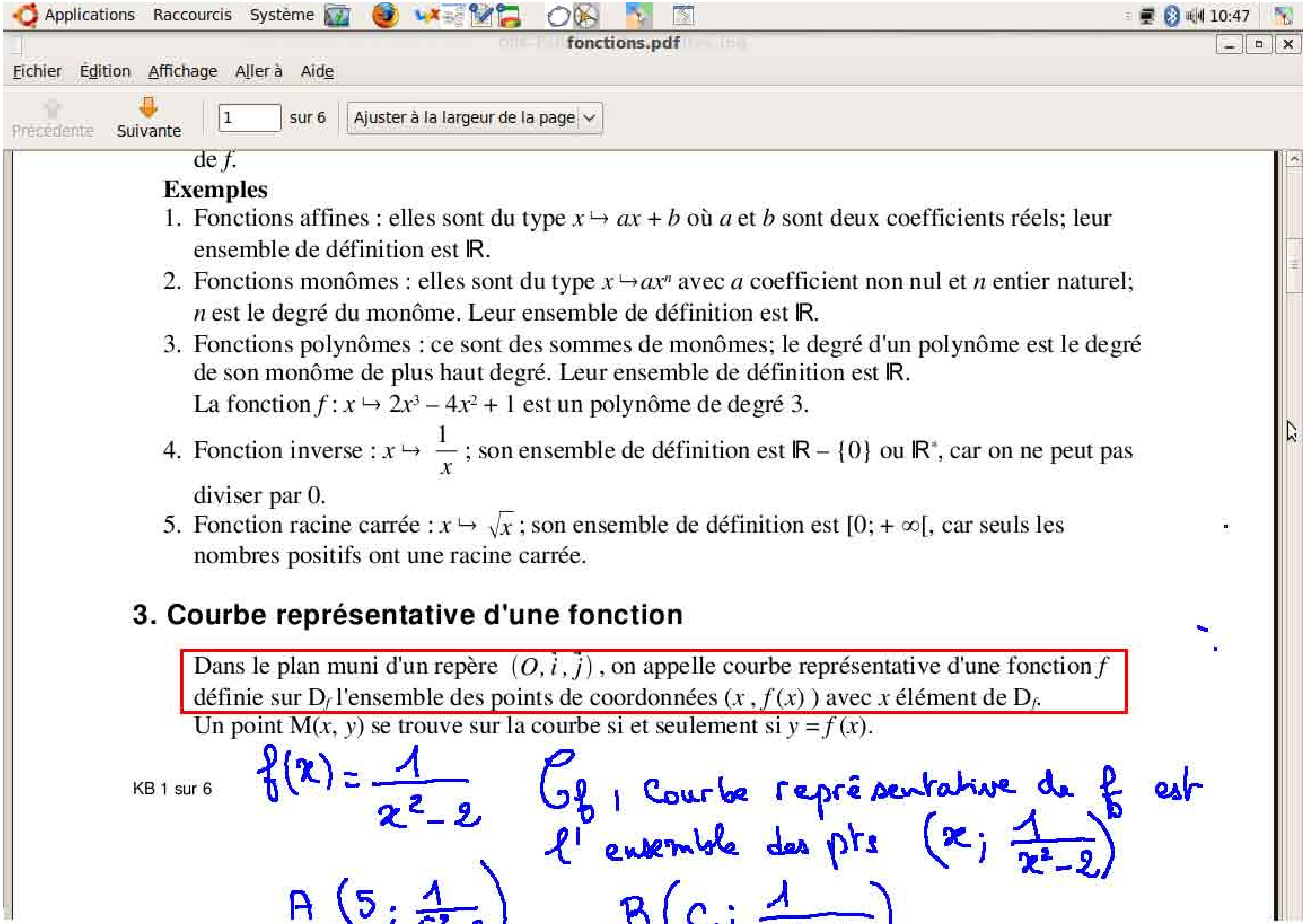
2. Ensemble de définition

L'ensemble D_f des réels qui ont une image par la fonction *f* est appelé ensemble de définition de *f*.

Exemples 1) la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$

$]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[= \mathbb{R}^*$ $\mathbb{R}$ privé de 0.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2}$



de f.

Exemples

1. Fonctions affines : elles sont du type $x \mapsto ax + b$ où a et b sont deux coefficients réels; leur ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
2. Fonctions monômes : elles sont du type $x \mapsto ax^n$ avec a coefficient non nul et n entier naturel; n est le degré du monôme. Leur ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
3. Fonctions polynômes : ce sont des sommes de monômes; le degré d'un polynôme est le degré de son monôme de plus haut degré. Leur ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
   La fonction $f : x \mapsto 2x^3 - 4x^2 + 1$ est un polynôme de degré 3.
4. Fonction inverse : $x \mapsto \frac{1}{x}$; son ensemble de définition est $\mathbb{R} - \{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$, car on ne peut pas diviser par 0.
5. Fonction racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$; son ensemble de définition est $[0; +\infty[$, car seuls les nombres positifs ont une racine carrée.

3. Courbe représentative d'une fonction

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle courbe représentative d'une fonction f définie sur D_f l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ avec x élément de D_f.

Un point $M(x, y)$ se trouve sur la courbe si et seulement si $y = f(x)$.

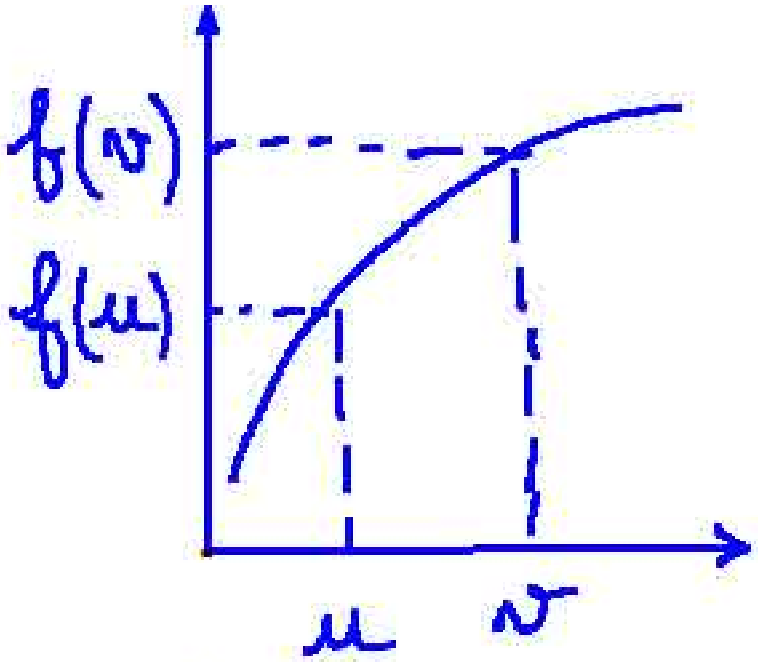
KB 1 sur 6

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$

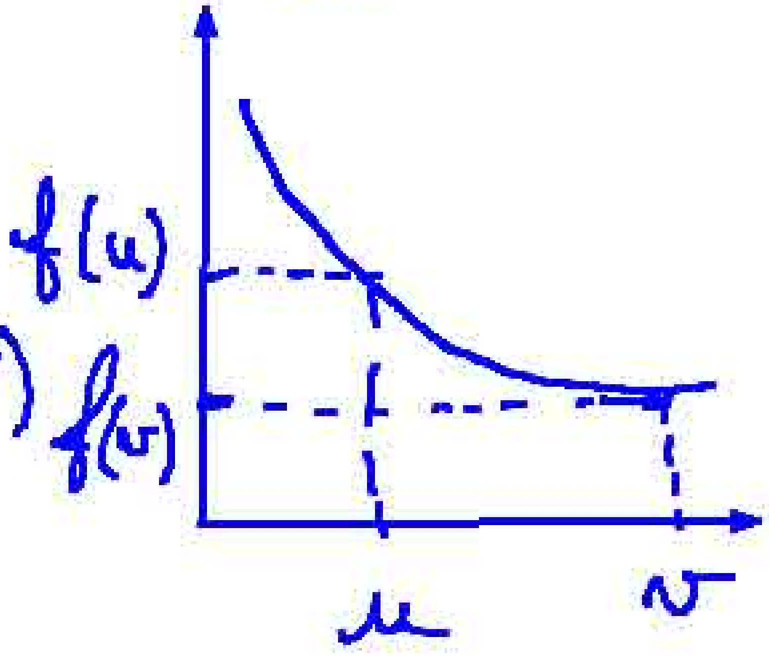
$\mathcal{C}_f$, Courbe représentative de f est l'ensemble des pts $\left(x ; \frac{1}{x^2-2}\right)$

$A\left(5 ; \frac{1}{5^2-2}\right)$ $B\left(c ; \frac{1}{c^2-2}\right)$

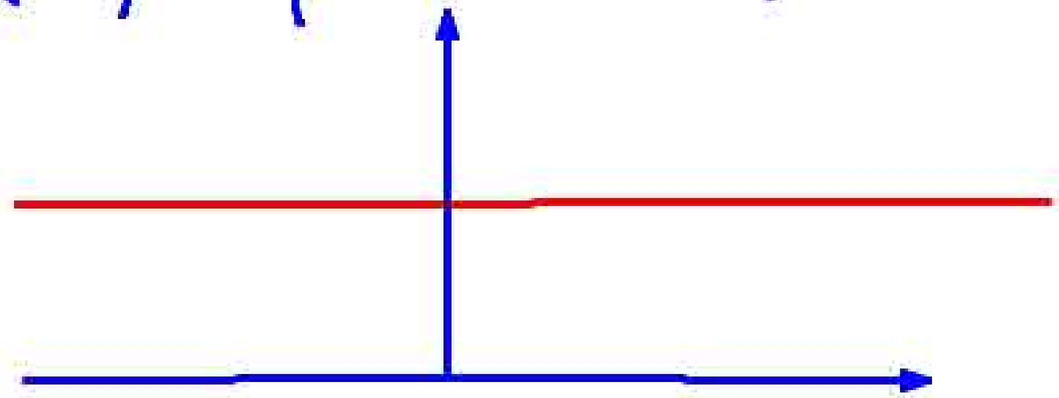
- f est $\boxed{\text{croissante}}$ ssi :
  Pour tout u, v de D_f, on a :
  si $u \leq v$ alors $f(u) \leq f(v)$
  CONSERVE l'ORDRE

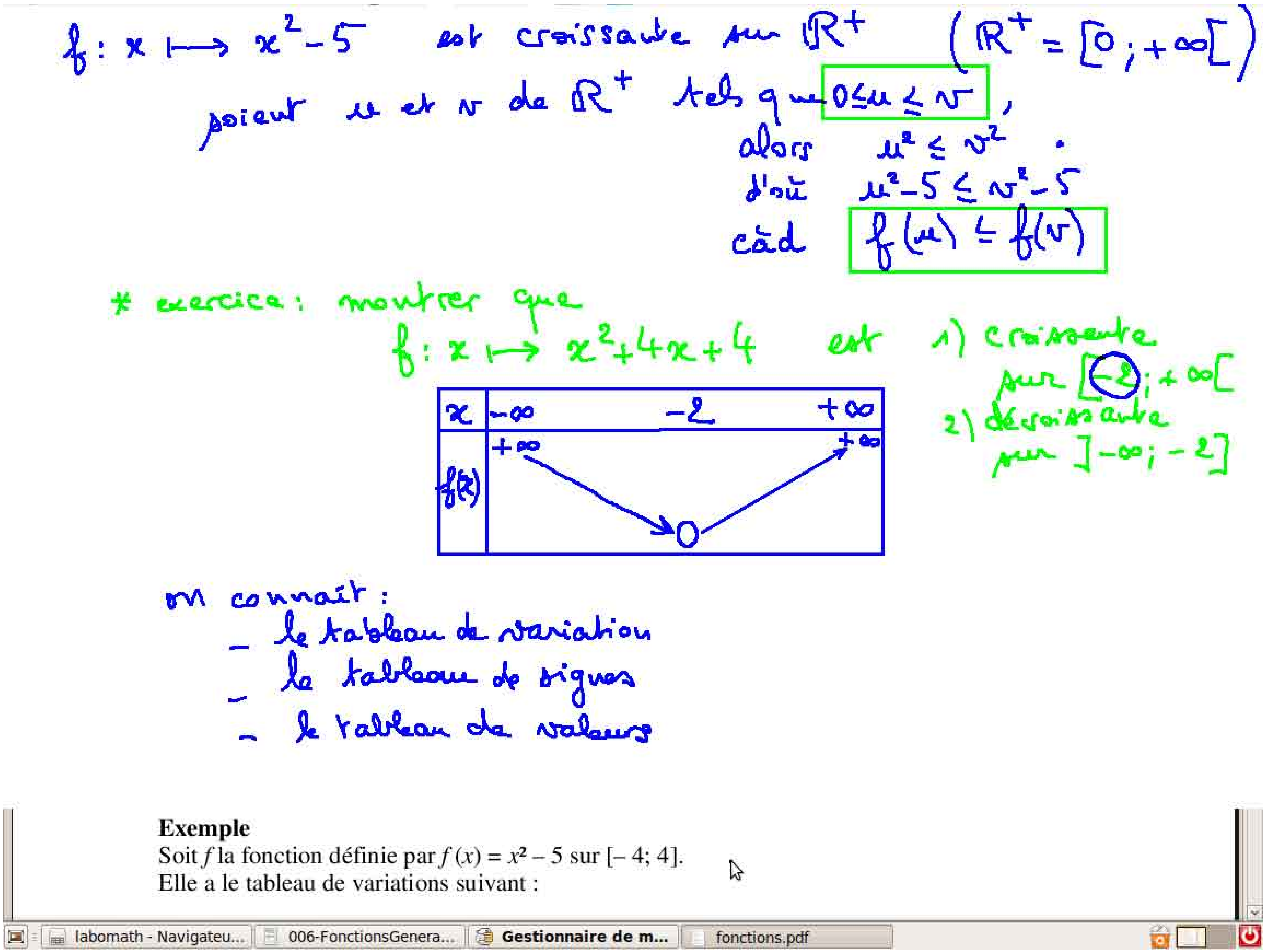


- f est décroissante ssi :
  Pour tout u, v de D_f, on a :
  si $u \leq v$ alors $f(u) \geq f(v)$
  INVERSE l'ORDRE



- f est constante ssi $f(u) = f(v)$ pour ∀ couple (u, v) de D_f^2





$f : x \longmapsto x^2 - 5$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ $(\mathbb{R}^+ = [0 ; +\infty[)$

soient u et v de $\mathbb{R}^+$ tels que $\boxed{0 \le u \le v}$,

alors $u^2 \le v^2$.

d'où $u^2 - 5 \le v^2 - 5$

càd $\boxed{f(u) \le f(v)}$

* exercice : montrer que

$f : x \longmapsto x^2 + 4x + 4$ est

1) croissante sur $[-2 ; +\infty[$

2) décroissante sur $]-\infty ; -2]$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

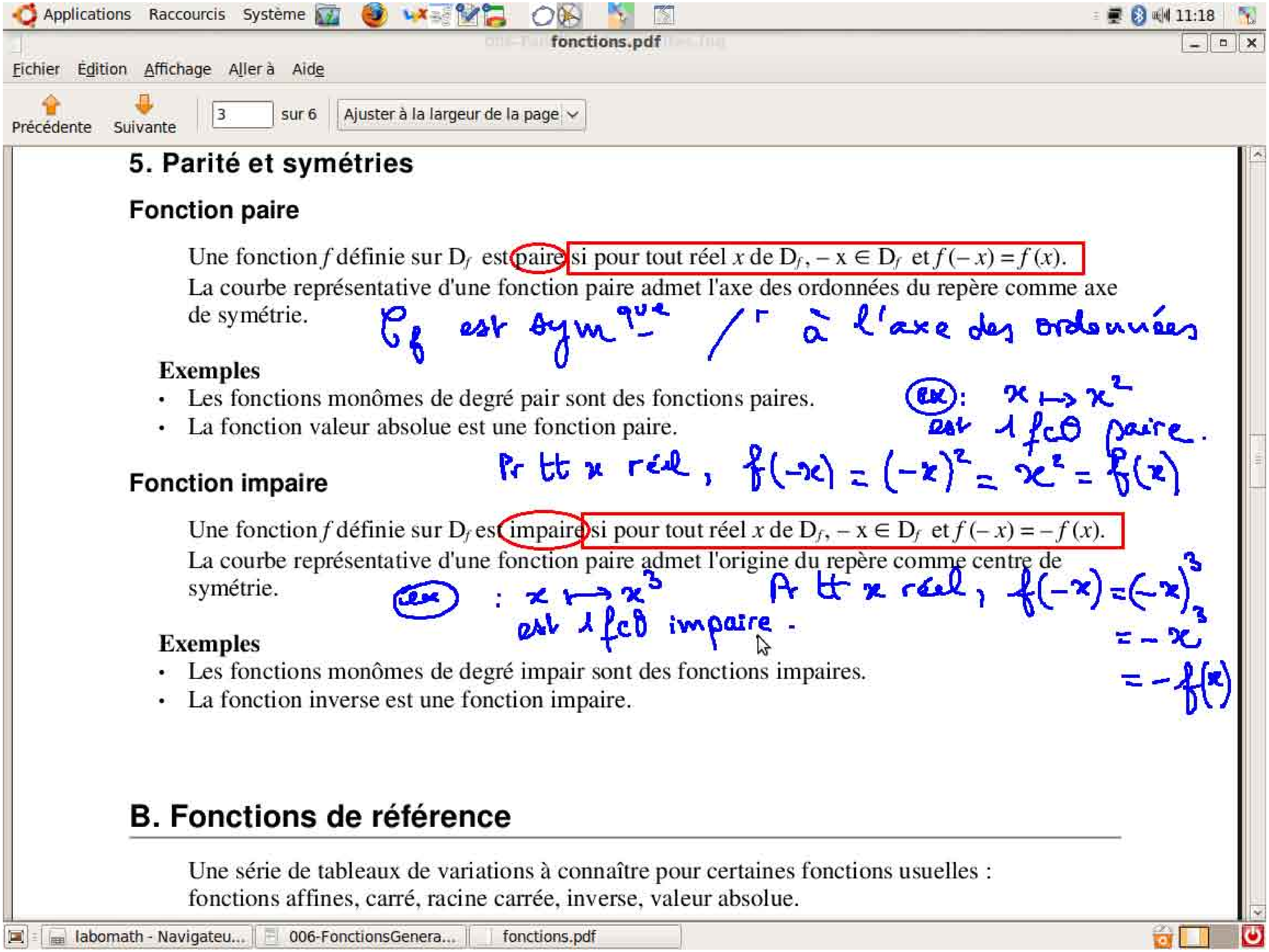
on connait :

- le tableau de variation
- le tableau de signes
- le tableau de valeurs

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 5$ sur [– 4; 4].

Elle a le tableau de variations suivant :



5. Parité et symétries

Fonction paire

Une fonction f définie sur D_f est paire si pour tout réel x de D_f, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

La courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées du repère comme axe de symétrie.

$\mathcal{C}_f$ est sym$^{\text{que}}$ /$^{\text{r}}$ à l'axe des ordonnées

Exemples

- Les fonctions monômes de degré pair sont des fonctions paires.
- La fonction valeur absolue est une fonction paire.

ex : $x \mapsto x^2$ est 1 fcθ paire.

Pr tt x réel, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

Fonction impaire

Une fonction f définie sur D_f est impaire si pour tout réel x de D_f, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

La courbe représentative d'une fonction paire admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

ex : $x \mapsto x^3$ est 1 fcθ impaire.

Pr tt x réel, $f(-x) = (-x)^3$
$= -x^3$
$= -f(x)$

Exemples

- Les fonctions monômes de degré impair sont des fonctions impaires.
- La fonction inverse est une fonction impaire.

B. Fonctions de référence

Une série de tableaux de variations à connaître pour certaines fonctions usuelles : fonctions affines, carré, racine carrée, inverse, valeur absolue.

20090821-Fonctions5

- $u \circ g(x) = u\left[g(x)\right]$

$= u\left[\sqrt{x}\right]$

$= 3\sqrt{x} + 1$

$g : x \longmapsto \sqrt{x}$

$u : x \longmapsto 3x + 1$

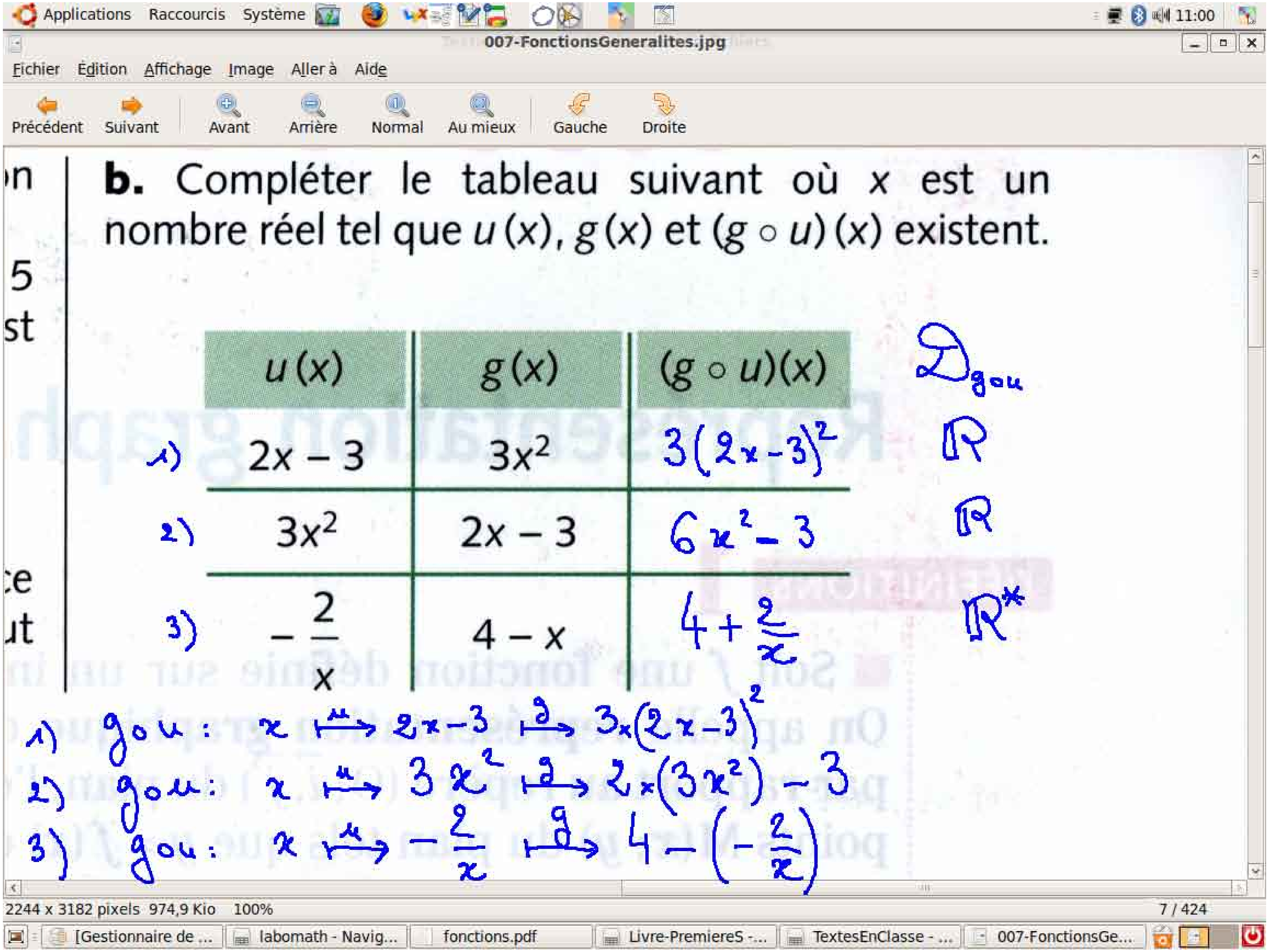
$\square \longmapsto 3\square + 1$

$$u \circ g : \quad x \overset{g}{\longmapsto} \sqrt{x} \overset{u}{\longmapsto} 3\sqrt{x} + 1$$

$u \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}^+$

$u \circ g(0) = u(g(0)) = u(\sqrt{0}) = u(0) = 3 \times 0 + 1 = \boxed{1}$

$u \circ g(8) = u(g(8)) = u(\sqrt{8}) = u(2\sqrt{2}) = \underline{6\sqrt{2} + 1}$



b. Compléter le tableau suivant où x est un nombre réel tel que $u(x)$, $g(x)$ et $(g \circ u)(x)$ existent.

	$u(x)$	$g(x)$	$(g \circ u)(x)$	$\mathcal{D}_{g\circ u}$
1)	$2x-3$	$3x^2$	$3(2x-3)^2$	$\mathbb{R}$
2)	$3x^2$	$2x-3$	$6x^2-3$	$\mathbb{R}$
3)	$-\dfrac{2}{x}$	$4-x$	$4+\dfrac{2}{x}$	$\mathbb{R}^*$

1) $g\circ u : x \xmapsto{u} 2x-3 \xmapsto{g} 3\times(2x-3)^2$

2) $g\circ u : x \xmapsto{u} 3x^2 \xmapsto{g} 2\times(3x^2)-3$

3) $g\circ u : x \xmapsto{u} -\dfrac{2}{x} \xmapsto{g} 4-\left(-\dfrac{2}{x}\right)$

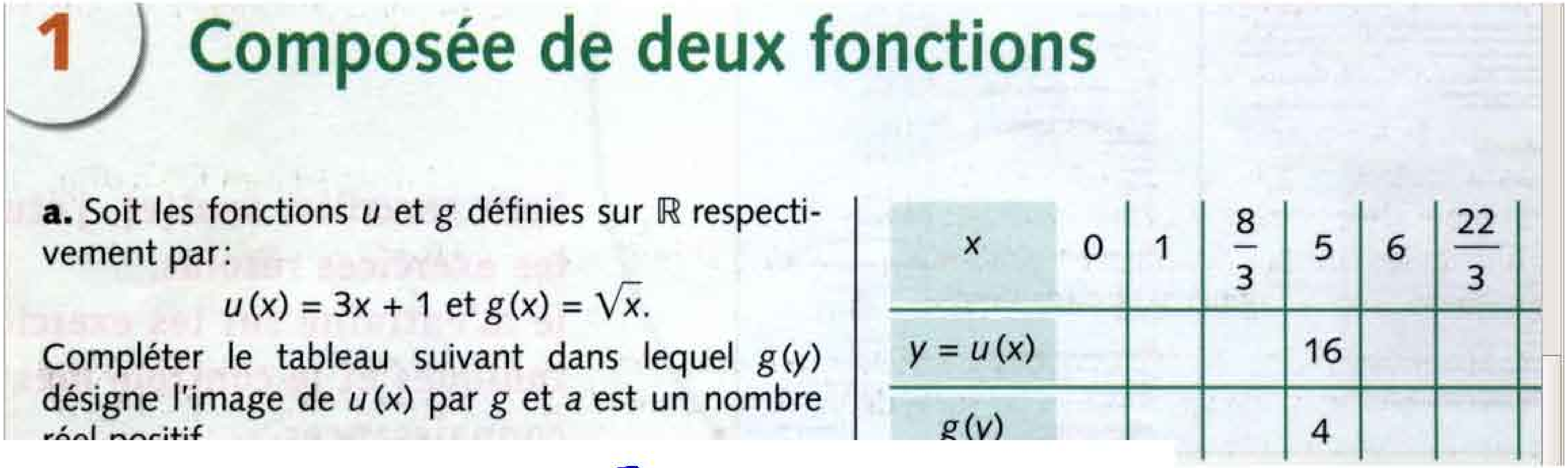
$f : a \xrightarrow{u} 3a+1 \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{3a+1}$

on doit nécessairement avoir $3a+1 \geqslant 0$

$3a \geqslant -1$

$a \geqslant -\frac{1}{3}$

$D_f = [-\frac{1}{3} ; +\infty[$ $a \in D_f$



1 Composée de deux fonctions

a. Soit les fonctions *u* et *g* définies sur ℝ respectivement par :

$u(x) = 3x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Compléter le tableau suivant dans lequel $g(y)$ désigne l'image de $u(x)$ par *g* et *a* est un nombre réel positif.

x	0	1	$\frac{8}{3}$	5	6	$\frac{22}{3}$
$y = u(x)$				16		
$g(y)$				4		

$g \circ u(5) = g[u(5)] = g[16] = 4$

$g \circ u(0) = g[u(0)] = g[1] = 1$

$g \circ u(8) = g[u(8)] = g[25] = 5$

$g \circ u(6) = g[u(6)] = g(19) = \sqrt{19}$

$g \circ u(a) = g[u(a)] = \sqrt{3a+1}$

u définie sur $\mathcal{D}_u$
g définie sur $\mathcal{D}_g$

La composée $g\circ u$ de u suivie de g :

$$\underset{f}{g\circ u} : x \xmapsto{u} u(x) \xmapsto{g} g[u(x)] = f(x)$$

$f(x)$ existe si 1) $u(x)$ existe $(x \in \mathcal{D}_u)$
2) $g[u(x)]$ existe $(u(x) \in \mathcal{D}_g)$

exemples: ① $u(x) = 2x - 1$ $g(x) = x^2 - x$

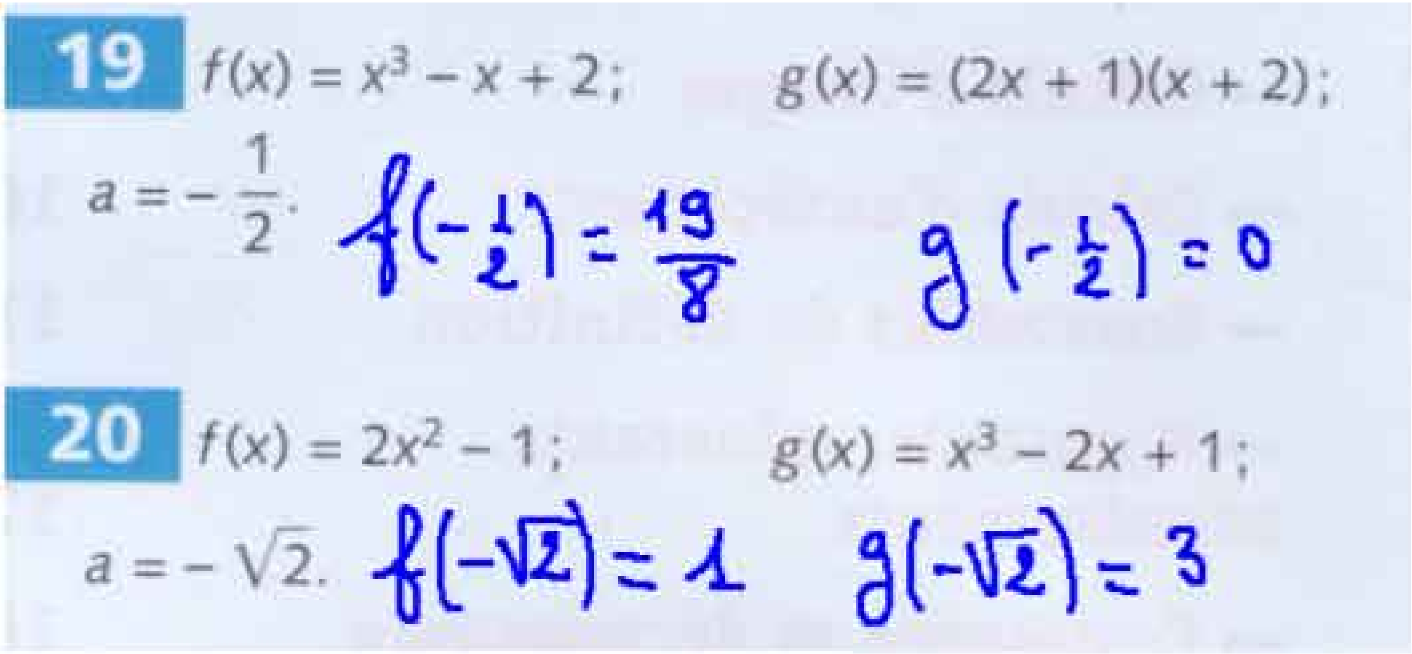
Exprimer $g\circ u$ et $u\circ g$ en fonction de x

$\mathcal{D}_{g\circ u}$? $\mathcal{D}_{u\circ g}$?

② $u(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $g(x) = x^2$

Exprimer $g\circ u$ et $u\circ g$ en fc° de x

$\mathcal{D}_{g\circ u}$? $\mathcal{D}_{u\circ g}$?



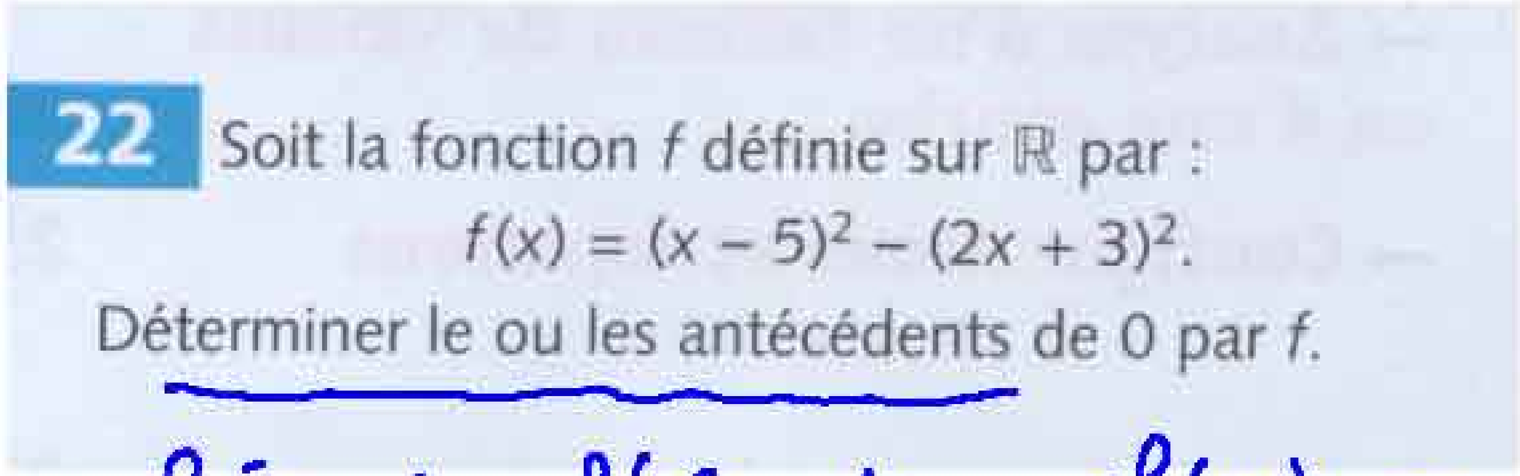
19 $f(x) = x^3 - x + 2$; $g(x) = (2x + 1)(x + 2)$; $a = -\frac{1}{2}$.

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{19}{8}$ $g(-\frac{1}{2}) = 0$

20 $f(x) = 2x^2 - 1$; $g(x) = x^3 - 2x + 1$; $a = -\sqrt{2}$.

$f(-\sqrt{2}) = 1$ $g(-\sqrt{2}) = 3$

20090824-ex19-20page16



22 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-5)^2 - (2x+3)^2.$$

Déterminer le ou les antécédents de 0 par f.

= Résoudre l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0$$

$$(-x-8)(3x-2) = 0$$

$-x-8=0$ ou $3x-2=0$

$x=-8$ ou $x=\frac{2}{3}$

㉗ a) $f(x) = \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$

$x+\sqrt{2} \neq 0$

$x \neq -\sqrt{2}$

$\mathcal{D}_f = \boxed{\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}\}}$

$\mathcal{D}_f = \boxed{]-\infty ; -\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2} ; +\infty[}$

b) $f(x) = x^2+1 - \frac{3}{2x+1}$ je dois avoir $2x+1 \neq 0$

$2x \neq -1$

$x \neq -\frac{1}{2}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

$\mathcal{D}_f =]-\infty ; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2} ; +\infty[$

Aux valeurs interdites, on met 1 double barre dans le tableau de variation.

29 ★ **a.** $f(x) = \dfrac{1}{2x - \sqrt{x}}$.   **b.** $f(x) = \dfrac{x}{(x + 1)^2 + 2}$

b) $(x+1)^2 \geqslant 0$ pour tout réel x

$(x+1)^2 + 2 \geqslant 2$ pr tt x

Donc $(x+1)^2 + 2$ ne peut pas s'annuler sur $\mathbb{R}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

a) $2x - \sqrt{x} \neq 0$ $(x \geqslant 0)$

$2x \neq \sqrt{x}$

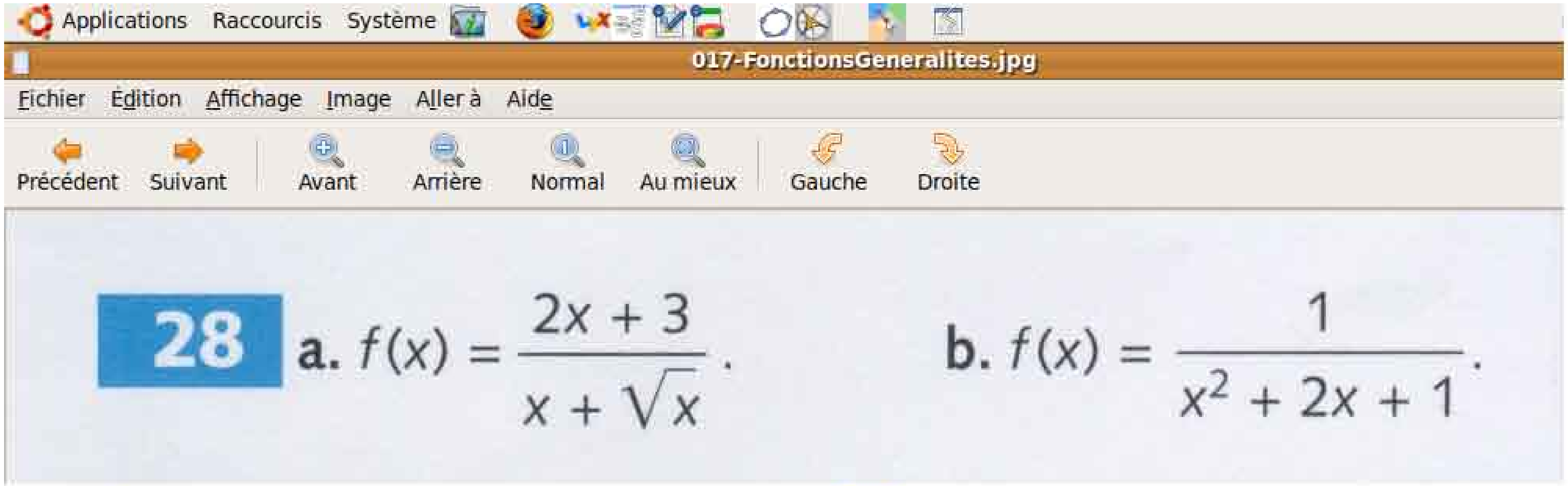
$4x^2 \neq x$

$4x^2 - x \neq 0$

$x(4x-1) \neq 0$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{0 ; \frac{1}{4}\right\}$

$\mathcal{D}_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; \frac{1}{4}[\cup]\frac{1}{4} ; +\infty[$



28 **a.** $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+\sqrt{x}}$. **b.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+1}$.

a) $f(x)$ existe ssi $x + \sqrt{x} \neq 0$

$x > 0$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$

$\mathcal{D}_f =]0 \,;\, +\infty[$

b) $f(x)$ existe ssi $x^2 + 2x + 1 \neq 0$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$\mathcal{D}_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

C. Opérations sur les fonctions

1. Addition d'un réel. Multiplication par un réel.

Soit f une fonction définie sur D_f et k un réel.

La fonction x $\hookrightarrow f(x) + k$ a les mêmes variations que la fonction f.
Si k est positif, la fonction x $\hookrightarrow k.f(x)$ a les mêmes variations que f.
Si k est négatif, la fonction x $\hookrightarrow k.f(x)$ a les variations inverses de celles de f.

Exemple

La f° inverse $x \hookrightarrow \frac{1}{x}$ est $\searrow$ sur]0; +∞[.

- $x \hookrightarrow \frac{1}{x}+4$ est $\searrow$ sur]0; +∞[.
- $x \hookrightarrow \frac{3}{x}$ est $\searrow$ sur]0; +∞[.
- $x \hookrightarrow \frac{-2}{x}$ est $\nearrow$ sur]0; +∞[.
- $x \rightarrow -\frac{1}{x} - 1$ est $\nearrow$ sur]0 ; +∞[

$x \mapsto x^2$ est $\searrow$ sur $\mathbb{R}^-$

Donc

$x \mapsto x^2 - 5$ est $\downarrow$ sur $\mathbb{R}^-$

$x \mapsto -x^2 + 8$ est $\uparrow$ sur $\mathbb{R}^-$

2. Opérations algébriques

- La fonction $f+g : x \hookrightarrow f(x) + g(x)$;
- La fonction $f-g : x \hookrightarrow f(x) - g(x)$;
- La fonction $f.g : x \hookrightarrow f(x) \times g(x)$;
- La fonction $\dfrac{f}{g} : x \hookrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}$;

$\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$

$\mathcal{D}_{f-g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$

$\mathcal{D}_{f\times g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$

$\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ (on doit enlever de $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ les réels qui annulent $g(x)$)

Propriétés :

- La somme de deux fonctions croissantes est croissante.
- La somme de deux fonctions décroissantes est décroissante.

Pour le reste on regarde au cas par cas.

$f : I \longrightarrow J$ $\quad$ f est ↗ sur I $\quad$ $I \subset D_f$

$g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ g est ↗ sur J $\quad$ $J \subset D_g$

$$g \circ f : I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{g}{\longmapsto} g[f(x)]$$

Sens de variation de la fonction composée ?

- soient u et v deux réels de I tels que :

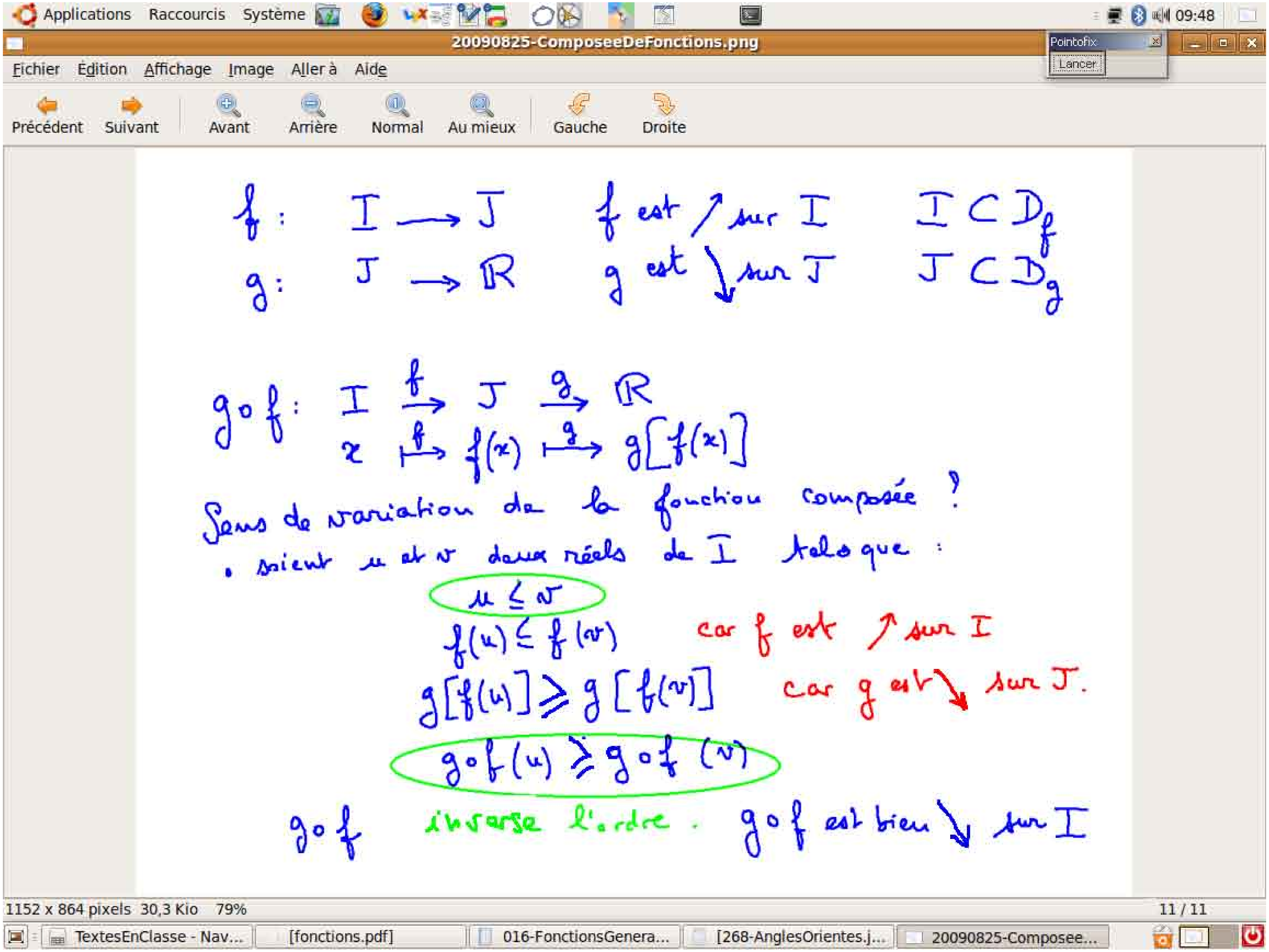
$$u \leq v$$

$$f(u) \leq f(v) \quad \text{car } f \text{ est ↗ sur } I$$

$$g[f(u)] \leq g[f(v)] \quad \text{car } g \text{ est ↗ sur } J.$$

$$g \circ f(u) \leq g \circ f(v)$$

$g \circ f$ conserve l'ordre. $g \circ f$ est bien ↗ sur I



$f : I \longrightarrow J$ f est ↗ sur I $I \subset D_f$

$g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ g est ↘ sur J $J \subset D_g$

$$g \circ f : I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{g}{\longmapsto} g[f(x)]$$

Sens de variation de la fonction composée ?

- soient u et v deux réels de I tels que :

$$\boxed{u \leq v}$$

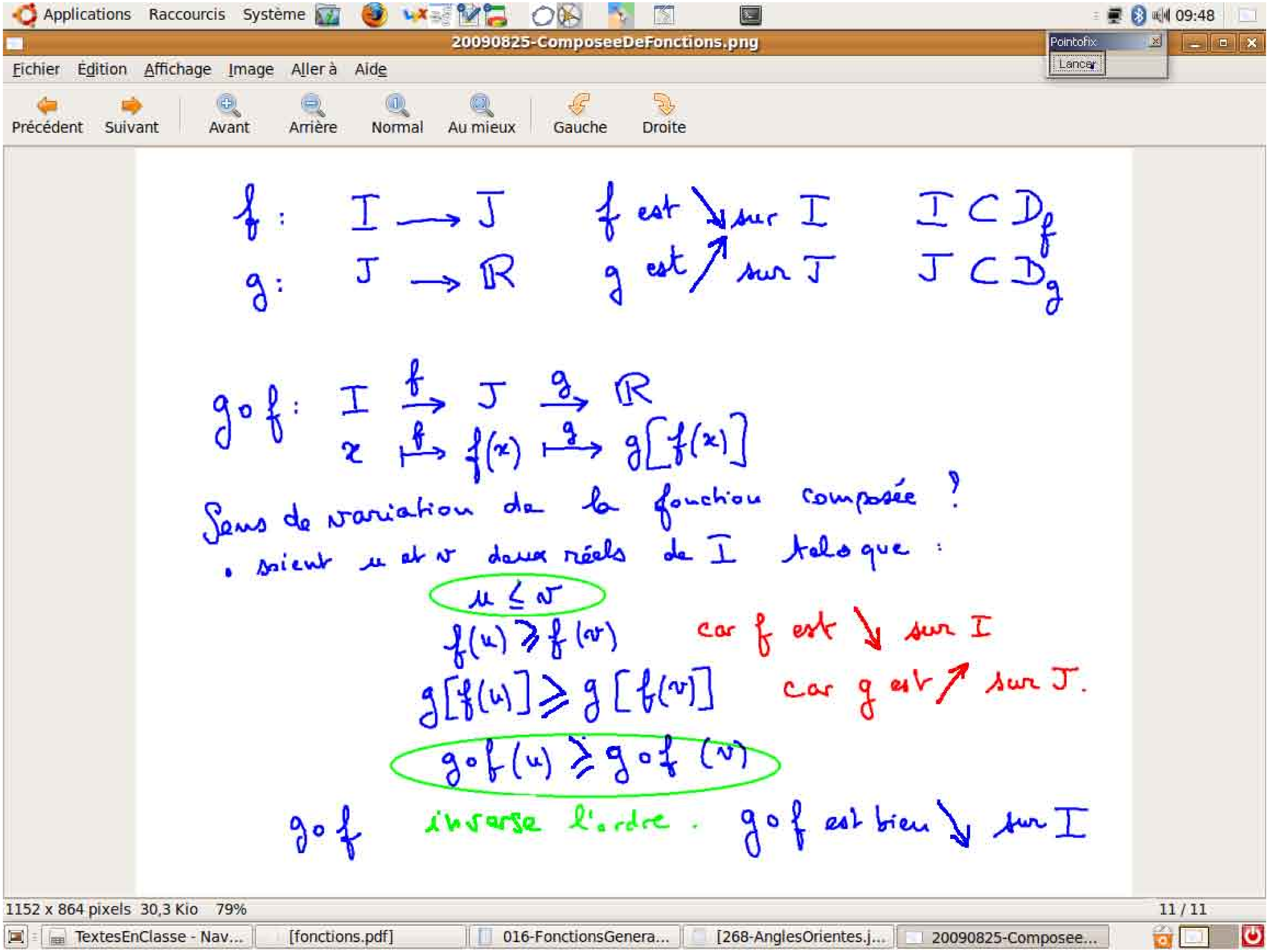
$f(u) \leq f(v)$ car f est ↗ sur I

$g[f(u)] \geq g[f(v)]$ car g est ↘ sur J.

$$\boxed{g \circ f(u) \geq g \circ f(v)}$$

g∘f inverse l'ordre. g∘f est bien ↘ sur I

20090828-ComposeeDeFonctions



$f : I \longrightarrow J$ f est ↘ sur I $I \subset D_f$

$g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ g est ↗ sur J $J \subset D_g$

$$g \circ f : I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{g}{\longmapsto} g[f(x)]$$

Sens de variation de la fonction composée ?

- soient u et v deux réels de I tels que :

$$\boxed{u \leq v}$$

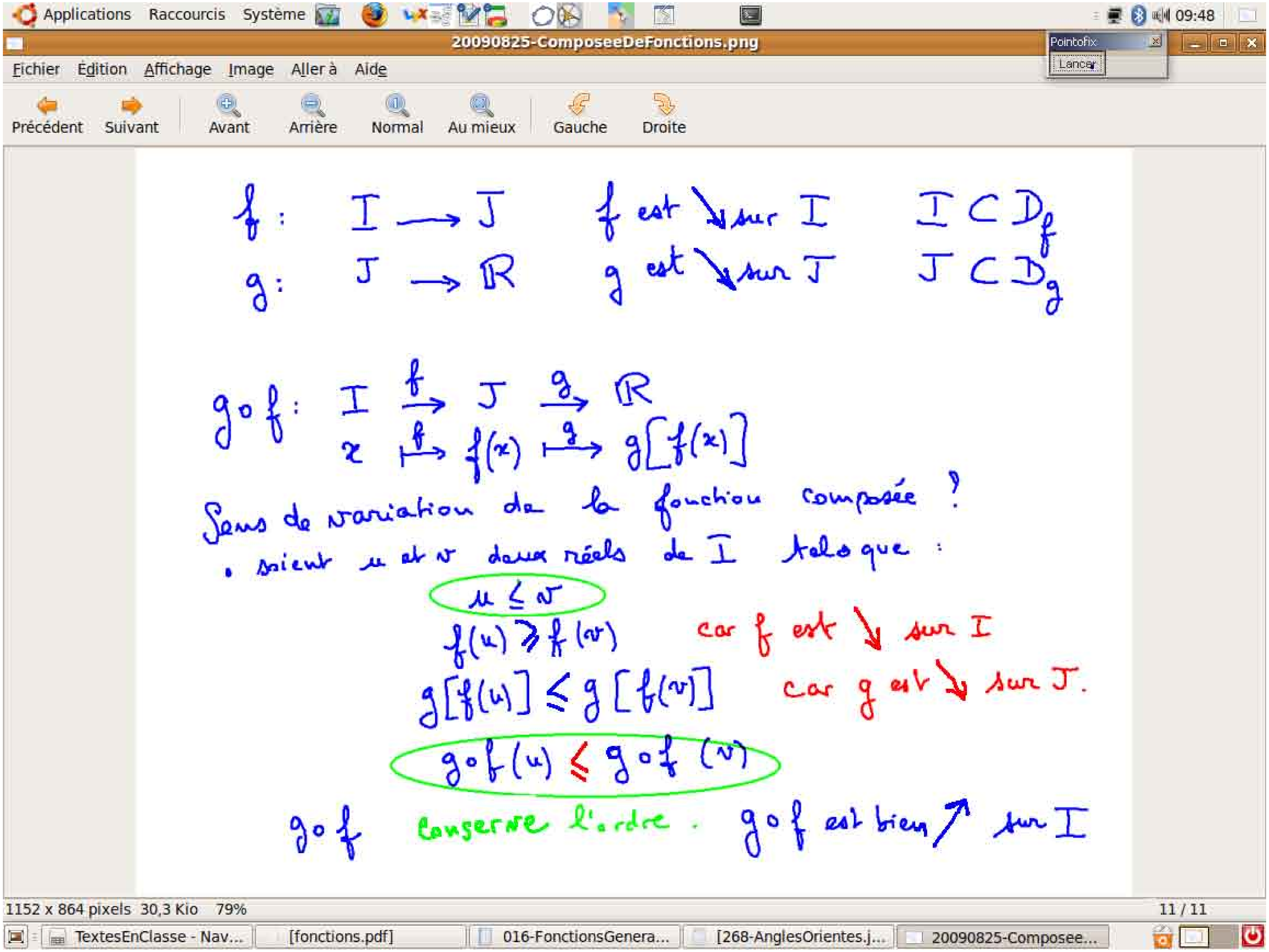
$f(u) \geqslant f(v)$ car f est ↘ sur I

$g[f(u)] \geqslant g[f(v)]$ car g est ↗ sur J.

$$\boxed{g \circ f(u) \geqslant g \circ f(v)}$$

$g \circ f$ inverse l'ordre. $g \circ f$ est bien ↘ sur I

20090828-ComposeeDeFonctions2



$f : I \longrightarrow J$ f est ↘ sur I $I \subset D_f$

$g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ g est ↘ sur J $J \subset D_g$

$$g \circ f : I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g[f(x)]$$

Sens de variation de la fonction composée ?

- soient u et v deux réels de I tels que :

$$\boxed{u \leq v}$$

$f(u) \geqslant f(v)$ car f est ↘ sur I

$g[f(u)] \leqslant g[f(v)]$ car g est ↘ sur J.

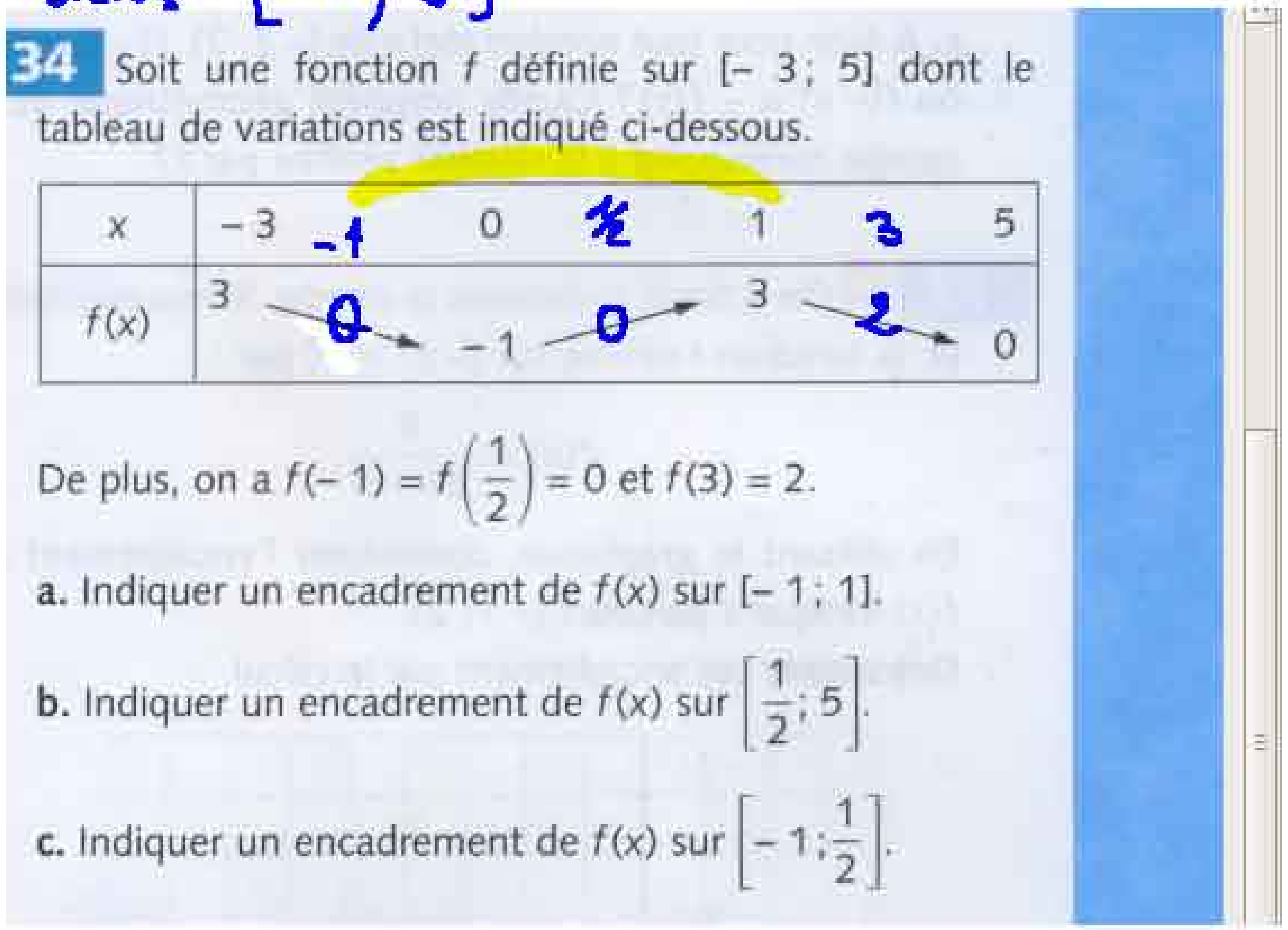
$$\boxed{g \circ f(u) \leqslant g \circ f(v)}$$

$g \circ f$ conserve l'ordre. $g \circ f$ est bien ↗ sur I

20090828-ComposeeDeFonctions3

Décrire le sens de variation de f :

- f est ↘ sur $[-3;0]$, à valeurs dans $[-1;3]$
- f est ↗ sur $[0;1]$, à valeurs dans $[-1;3]$
- f est ↘ sur $[1;5]$, à valeurs dans $[0;3]$.



34 Soit une fonction *f* définie sur [– 3 ; 5] dont le tableau de variations est indiqué ci-dessous.

x	-3	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3	5
$f(x)$	3	↘ 0	-1	↗ 0	3	↘ 2	0

De plus, on a $f(-1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $f(3) = 2$.

a. Indiquer un encadrement de $f(x)$ sur $[-1\,;1]$.

b. Indiquer un encadrement de $f(x)$ sur $\left[\frac{1}{2};5\right]$.

c. Indiquer un encadrement de $f(x)$ sur $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$.

- si $x \in [-1;1]$, alors
  $-1 \leq f(x) \leq 3$
- si $x \in \left[\frac{1}{2};5\right]$, als
  $0 \leq f(x) \leq 3$
- si $x \in \left[-1;\frac{1}{2}\right]$
  $-1 \leq f(x) \leq 0$

$f\left(\left[-1;\frac{1}{2}\right]\right) = [-1;0]$

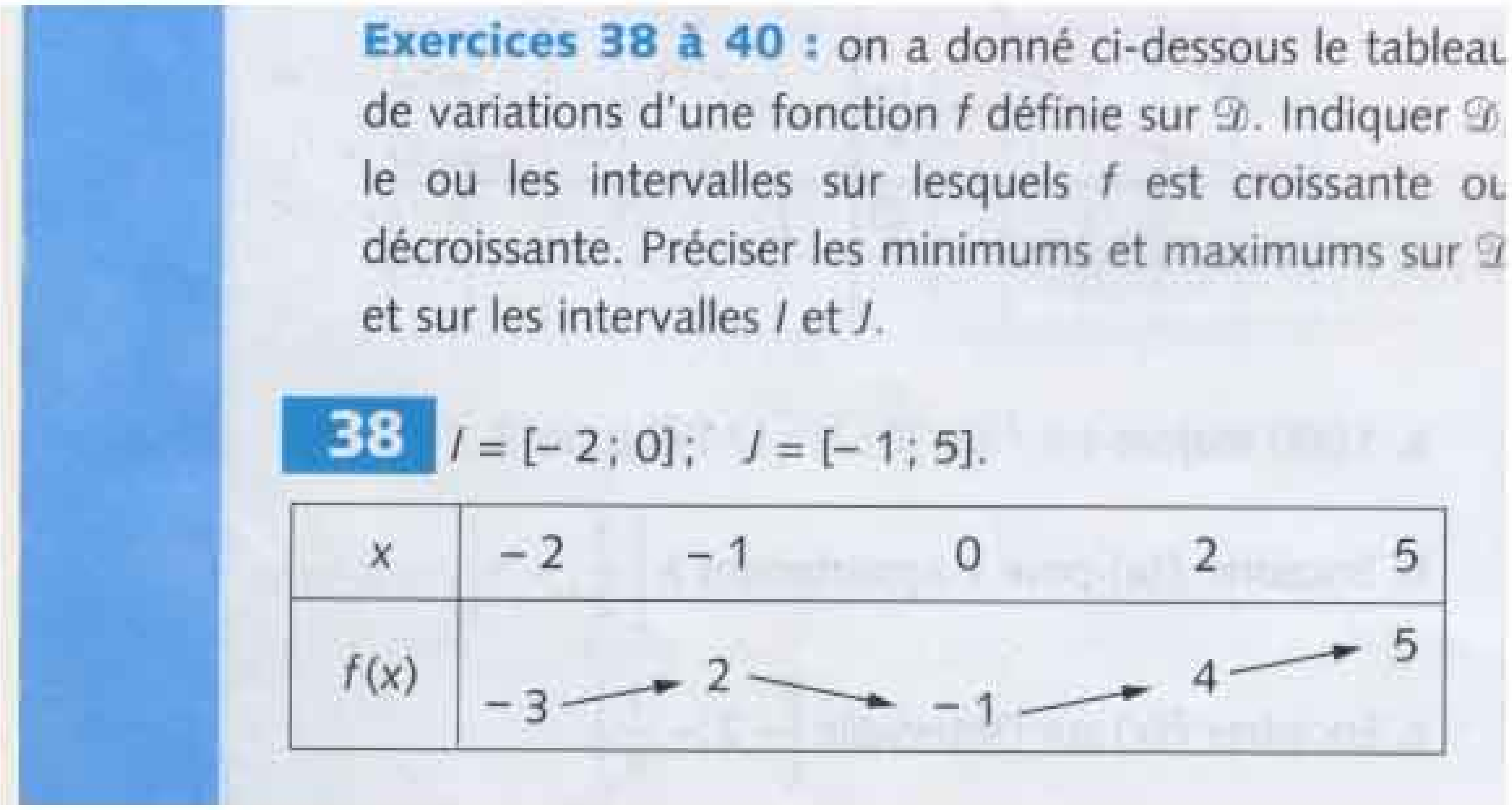
-1 est le minimum de f sur $[-3;5]$ et il est atteint pour $x=0$
3 est le max de f " " " pour $x=-3$
et pour $x=1$

f est ↗ sur $[-2;-1] \cup [0;5]$.

et on a : $f([-2;-1]) = [-3;2]$

$f([0;5]) = [-1;5]$

f est ↘ sur $[-1;0]$, à val. dans $[-1;2]$



Exercices 38 à 40 : on a donné ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}$. Indiquer $\mathcal{D}$ le ou les intervalles sur lesquels f est croissante ou décroissante. Préciser les minimums et maximums sur $\mathcal{D}$ et sur les intervalles I et J.

38 $I = [-2;0]$; $J = [-1;5]$.

x	-2		-1		0		2		5
$f(x)$	-3	↗	2	↘	-1	↗	4	↗	5

44 $f(x) = x^2 + x$; $g(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$; $I =]2 ; +\infty[$.

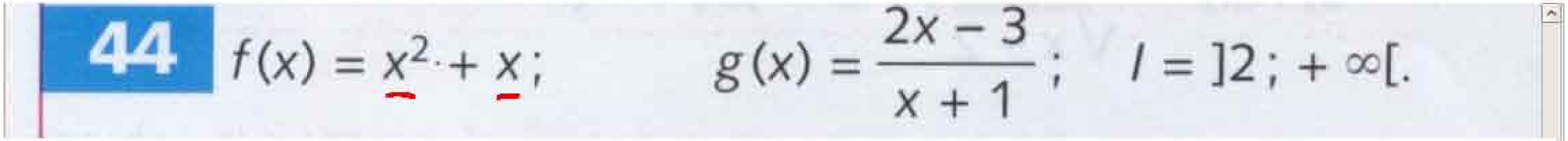
$$f+g : x \longmapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad x \in I .$$

$$= x^2 + x + \frac{2x-3}{x+1}$$

$$= \frac{(x^2+x)(x+1)}{x+1} + \frac{2x-3}{x+1}$$

$$= \frac{x^3+x^2+x^2+x+2x-3}{x+1}$$

$$= \frac{x^3+2x^2+3x-3}{x+1}$$



44 $f(x) = x^2 + x$; $g(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$; $I =]2\,;+\infty[$.

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour $x \in I$

$f(x) = x\ (x+1)$

$(f \times g)(x) = x\cancel{(x+1)} \times \dfrac{2x-3}{\cancel{x+1}}$ si $x \neq -1$

$= \boxed{x(2x-3)}$ pour $x \in I$ $(-1 \notin I)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x(x+1)}{\frac{2x-3}{x+1}} = x(x+1) \times \frac{x+1}{2x-3}$$

$$= \frac{x(x+1)^2}{2x-3}$$

$\frac{f}{g}$ existe ssi $x \in I$ et $x \neq \frac{3}{2}$. $\frac{f}{g}$ est bien définie sur I.

a) $g : x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{u} f(x)+1$ $\qquad g = u \circ f$

$u : x \longmapsto x+1$

$u \circ f(x) = u\left[f(x)\right]$

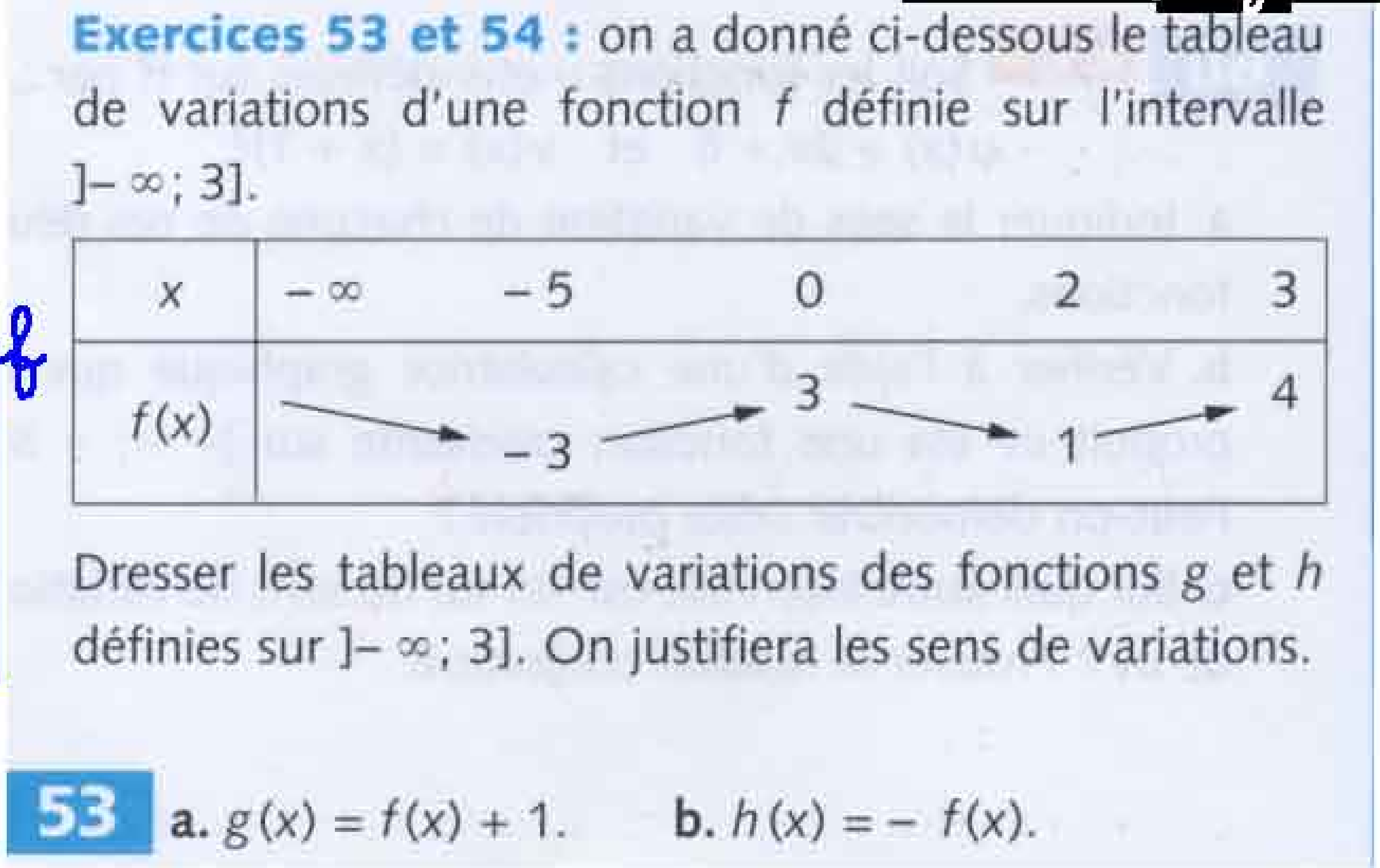
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "u \circ f"'] & f(x) \arrow[r, "u"] & u\left[f(x)\right] \end{tikzcd}$$

u fonction affine avec $a > 0$ $(a = 1)$

u ↗ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-5		0		2		3
$g(x)$		↘	-2	↗	4	↘	2	↗	5

f



Exercices 53 et 54 : on a donné ci-dessous le tableau de variations d'une fonction *f* définie sur l'intervalle]− ∞ ; 3].

x	− ∞		− 5		0		2		3
f(*x*)		↘	− 3	↗	3	↘	1	↗	4

Dresser les tableaux de variations des fonctions *g* et *h* définies sur]− ∞ ; 3]. On justifiera les sens de variations.

53 **a.** $g(x) = f(x) + 1$. **b.** $h(x) = -f(x)$.

f est ↘ sur $[0;2]$; à valeurs dans $[1;3]$.

u est ↗ sur $[1;3]$.

Donc $g = u \circ f$ est ↘ sur $[0;2]$.

a) $g : x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{u} f(x)+1$

$u : x \mapsto x+1$

$g = u \circ f$

$u \circ f(x) = u[f(x)]$

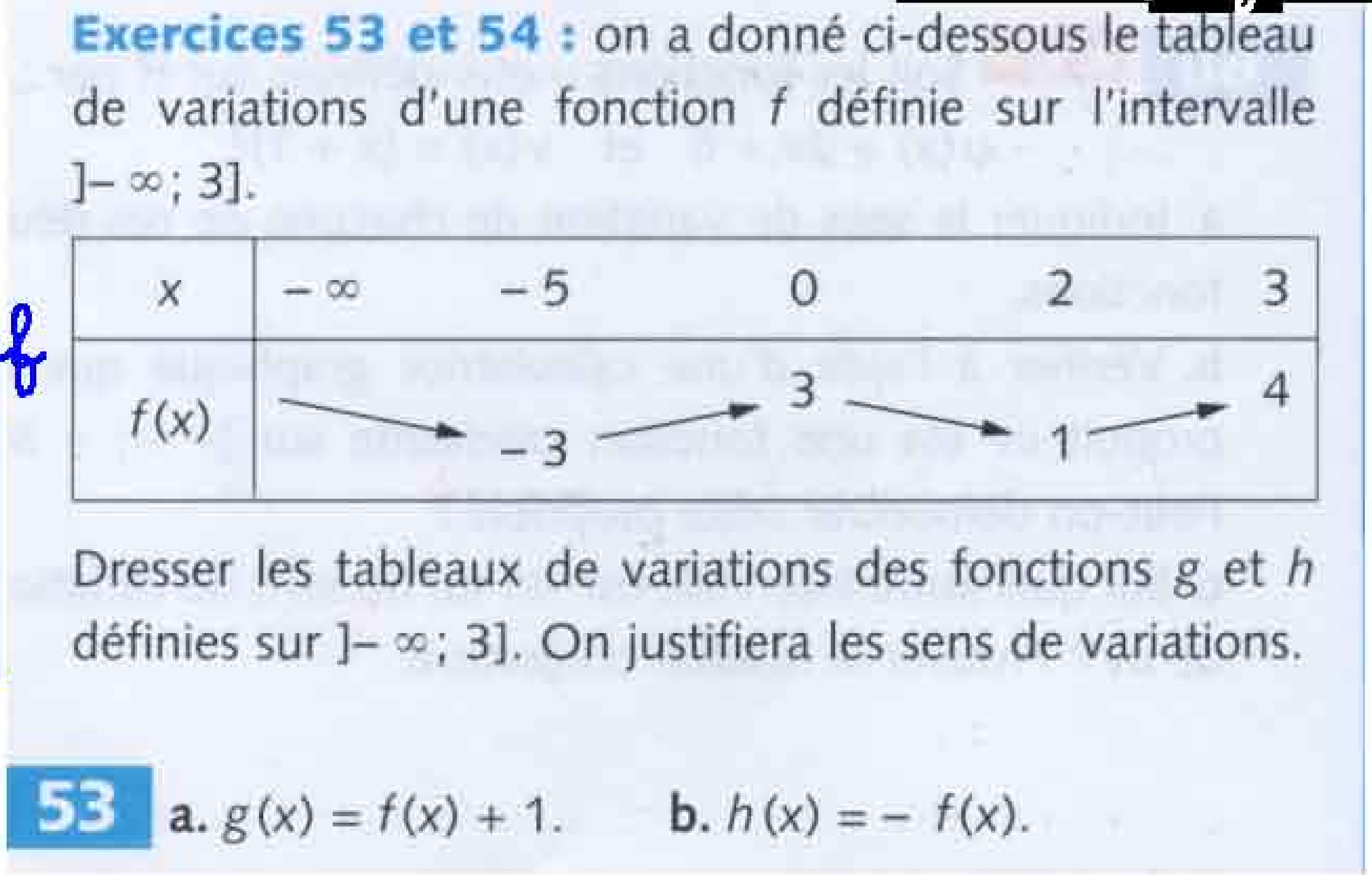
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "u \circ f"'] & f(x) \arrow[r, "u"] & u[f(x)] \end{tikzcd}$$

u fonction affine avec $a > 0$ $(a = 1)$

u ↗ sur ℝ.

x	$-\infty$		-5		0		2		3
$g(x)$		↘	-2	↗	4	↘	2	↗	5

f



Exercices 53 et 54 : on a donné ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;3]$.

x	$-\infty$		-5		0		2		3
$f(x)$		↘	-3	↗	3	↘	1	↗	4

Dresser les tableaux de variations des fonctions g et h définies sur $]-\infty\,;3]$. On justifiera les sens de variations.

53 **a.** $g(x) = f(x) + 1$. **b.** $h(x) = -f(x)$.

sens de variation de $f \circ g$

g \ f	f ↗	f ↘
g ↗	↗	↘
g ↘	↘	↗

- Si f et g ont $\boxed{\text{m̂ sens de variation}}$ $f \circ g$ (ou $g \circ f$) est $\boxed{↗}$

- Si f et g ont $\boxed{\text{des sens de variation contraires}}$ $f \circ g$ (ou $g \circ f$) est $\boxed{↘}$

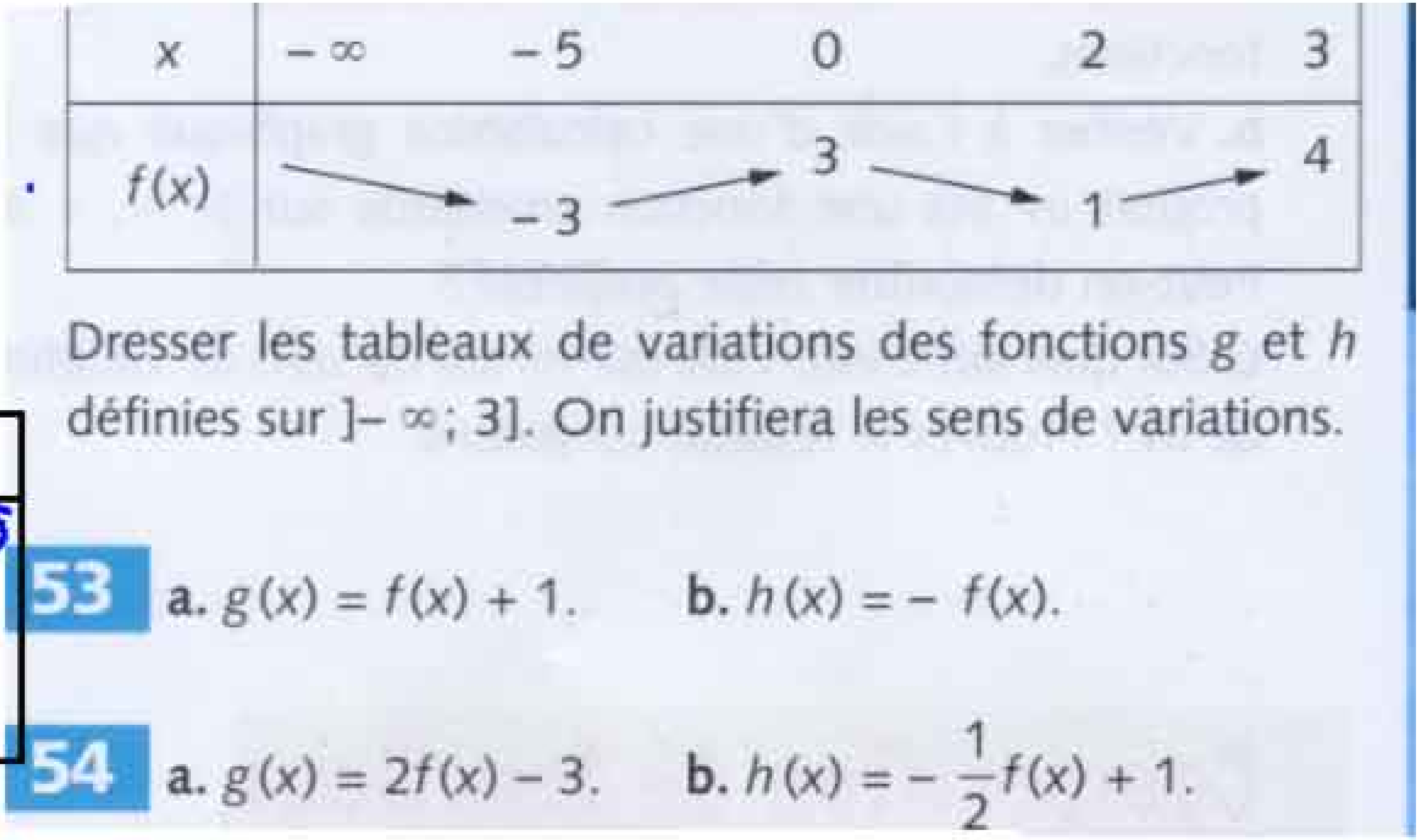
54 a. $g : x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{u} 2f(x)-3$

$$\boxed{} \xrightarrow{u} 2\boxed{} - 3$$

$u : x \longmapsto 2x - 3$

u est affine, ↗ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-5		0		2		3
$g(x)$		↘	-9	↗	3	↘	-1	↗	5



x	$-\infty$		-5		0		2		3
$f(x)$		↘	-3	↗	3	↘	1	↗	4

Dresser les tableaux de variations des fonctions g et h définies sur $]-\infty\,;3]$. On justifiera les sens de variations.

53 **a.** $g(x) = f(x) + 1$. **b.** $h(x) = -f(x)$.

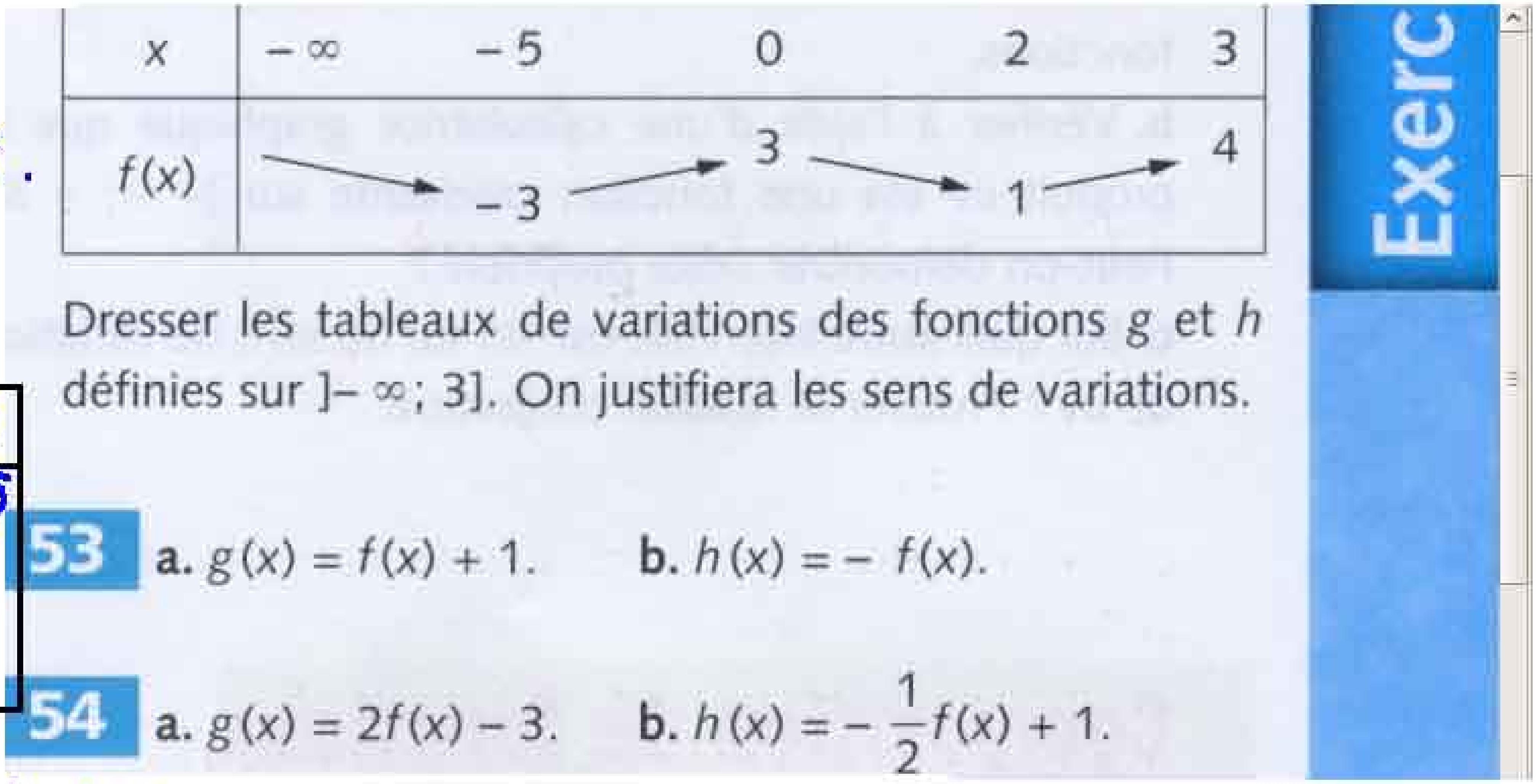
54 **a.** $g(x) = 2f(x) - 3$. **b.** $h(x) = -\frac{1}{2}f(x) + 1$.

54 a. $g : x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{u} 2f(x) - 3$

$\boxed{} \xrightarrow{u} 2\boxed{} - 3$

$u : x \longmapsto 2x - 3$

u est affine, ↗ sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$		-5		0		2		3
$f(x)$		↘	-3	↗	3	↘	1	↗	4

Dresser les tableaux de variations des fonctions g et h définies sur $]-\infty\,; 3]$. On justifiera les sens de variations.

53 **a.** $g(x) = f(x) + 1$. **b.** $h(x) = -f(x)$.

54 **a.** $g(x) = 2f(x) - 3$. **b.** $h(x) = -\frac{1}{2}f(x) + 1$.

Exerc

x	$-\infty$		-5		0		2		3
$g(x)$		↘	-9	↗	3	↘	-1	↗	5

54b. $g : x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{u} -\frac{1}{2}f(x) + 1$

$u : x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 1$ u affine ↘ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-5		0		2		3
$g(x)$		↗	$\frac{5}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	-1

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{x^2+1}] = (\sqrt{x^2+1})^2 + 1 = x^2+1+1 = x^2+2$

$g : \boxed{\sqrt{x^2+1}} \longmapsto \boxed{\sqrt{x^2+1}}^2 + 1$

62 ★ **a.** $f(x) = -\frac{x^2}{3}$ et $g(x) = 2\cos x$.

b. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ et $g(x) = x^2+1$

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$ Décomposer la fonction f sous la forme $v \circ u$.

$f : x \xmapsto{u} x^2+1 \xmapsto{v} \sqrt{x^2+1}$

où : $u : x \longmapsto x^2+1$ $D_u = \mathbb{R}$

et $v : x \longmapsto \sqrt{x}$ $D_v = \mathbb{R}^+$

Comme $x^2+1 \geqslant 1 > 0$, $f(x)$ existe pr $\forall x \in \mathbb{R}$

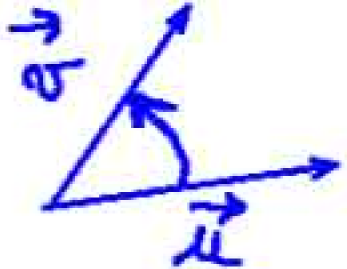
Donc $D_f = \mathbb{R}$.

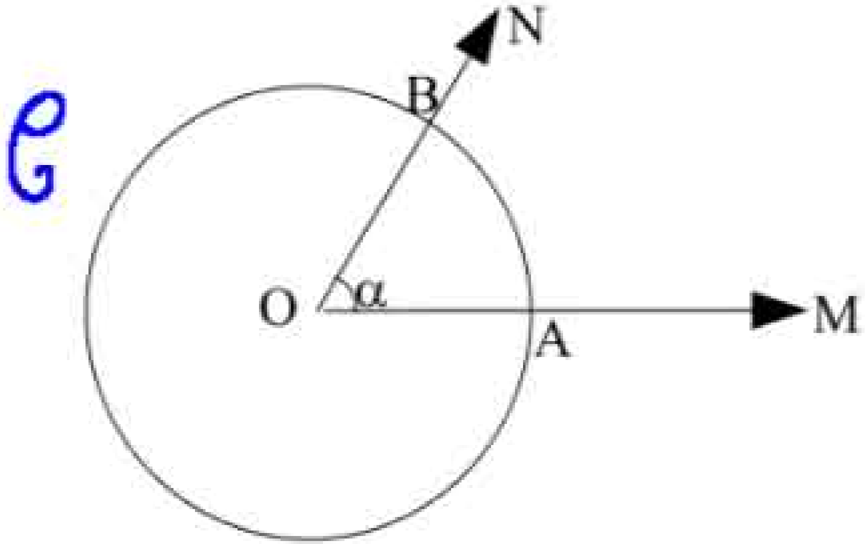
b). $f \circ g(x) = f[g(x)] = f[x^2+1] = \sqrt{(x^2+1)^2+1}$

$f : \boxed{x^2+1} \longmapsto \sqrt{\boxed{x^2+1}^2 + 1}$

2. Mesures des angles orientés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ forme un angle orienté.





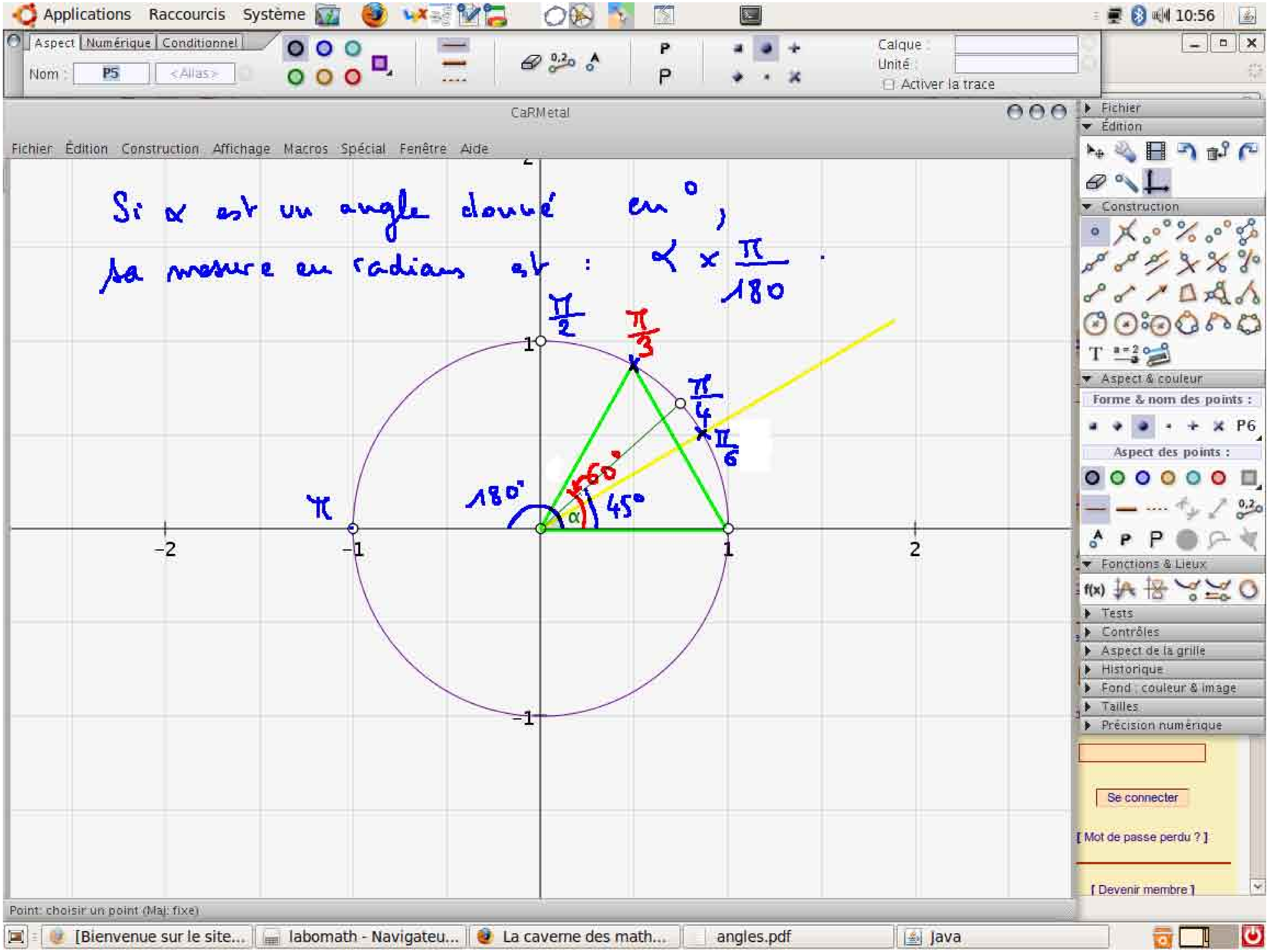
Soient O, M et N trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.

Soit C le cercle de centre O et de rayon 1 qu'on appelle cercle trigonométrique.

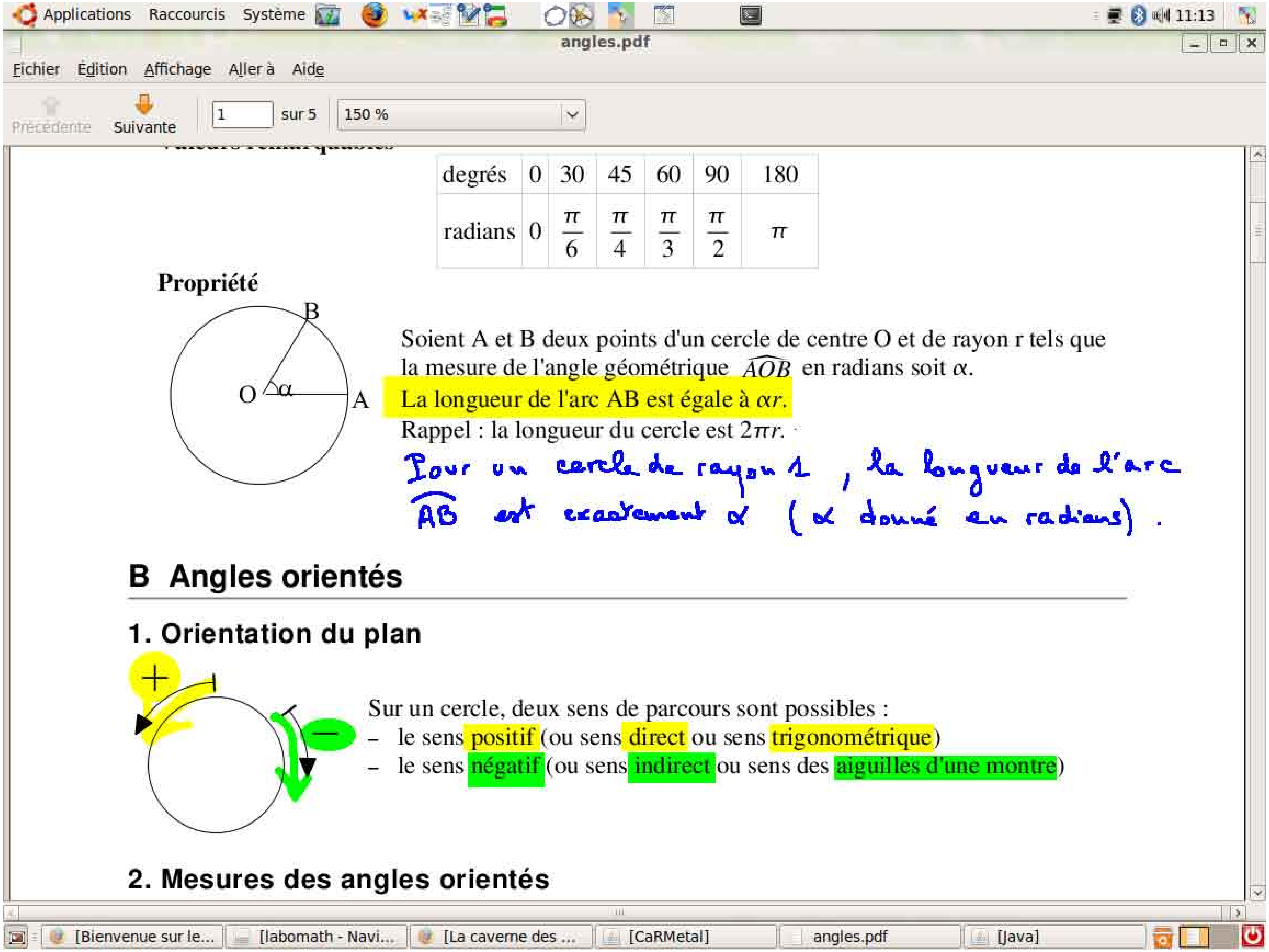
La demi-droite $[OM)$ coupe C en A.

La demi-droite $[ON)$ coupe C en B.

On obtient une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, en calculant la longueur parcourue sur le cercle pour aller de A à B et en lui donnant un signe représentant le sens de parcours.



Si α est un angle donné en °, la mesure en radians est : $\alpha \times \frac{\pi}{180}$.



degrés	0	30	45	60	90	180
radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Propriété

Soient A et B deux points d'un cercle de centre O et de rayon r tels que la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ en radians soit α.

La longueur de l'arc AB est égale à αr.

Rappel : la longueur du cercle est $2\pi r$.

Pour un cercle de rayon 1, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est exactement α (α donné en radians).

B Angles orientés

1. Orientation du plan

Sur un cercle, deux sens de parcours sont possibles :

- le sens positif (ou sens direct ou sens trigonométrique)
- le sens négatif (ou sens indirect ou sens des aiguilles d'une montre)

2. Mesures des angles orientés

DS 1 - 1^{e} -

Ex1. 1) $f(x) = (1-4x)(x+4) + x^2 + 8x + 16$

$= \boxed{x} + \boxed{4} \boxed{-4x^2} \boxed{-16x} + \boxed{x^2} + \boxed{8x} + \boxed{16}$

$= \boxed{-3x^2} \boxed{-7x} + \boxed{20}$

2) $f(x) = (1-4x)\boxed{(x+4)} + \boxed{(x+4)}^2$

$= (x+4)\left[1-4x+x+4\right]$

$= (x+4)(-3x+5)$

Ex2. 1) $D_f = \mathbb{R} - \{-4\}$ $D_g = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{x(x+4)}{x+4} + \dfrac{4}{x+4}$

$= \dfrac{x^2+4x+4}{x+4}$

$= \dfrac{(x+2)^2}{x+4}$

3) $(f \times g)(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+4} \times 3(x+2)^2$

$= \boxed{3\,\dfrac{(x+2)^2}{x+4}}$

4) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$

$= g(x) \times \dfrac{1}{f(x)}$

$= 3\cancel{(x+2)^2}\ \dfrac{x+4}{\cancel{(x+2)^2}}$

$= \boxed{3\,(x+4)}$

DS 1 - 1^e.

Ex 1. 1) $f(x) = (1-4x)(x+4) + x^2+8x+16$

$$= x+4-4x^2-16x+x^2+8x+16$$

$$= -3x^2-7x+20$$

2) $f(x) = (1-4x)\boxed{(x+4)} + \boxed{(x+4)}^2$

$$= (x+4)\left[1-4x+x+4\right]$$

$$= (x+4)(-3x+5)$$

Ex 2. 1) $D_f = \mathbb{R} - \{-4\}$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{x(x+4)}{x+4} + \dfrac{4}{x+4}$

$$= \frac{x^2+4x+4}{x+4}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{x+4}$$

3) $(f\times g)(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+4} \times 3(x+2)^2$

$$= 3\,\frac{(x+2)^2}{x+4}$$

4) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$

$$= g(x) \times \frac{1}{f(x)}$$

$$= 3\cancel{(x+2)^2}\,\frac{x+4}{\cancel{(x+2)^2}}$$

$$= 3(x+4)$$

$$\frac{13\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

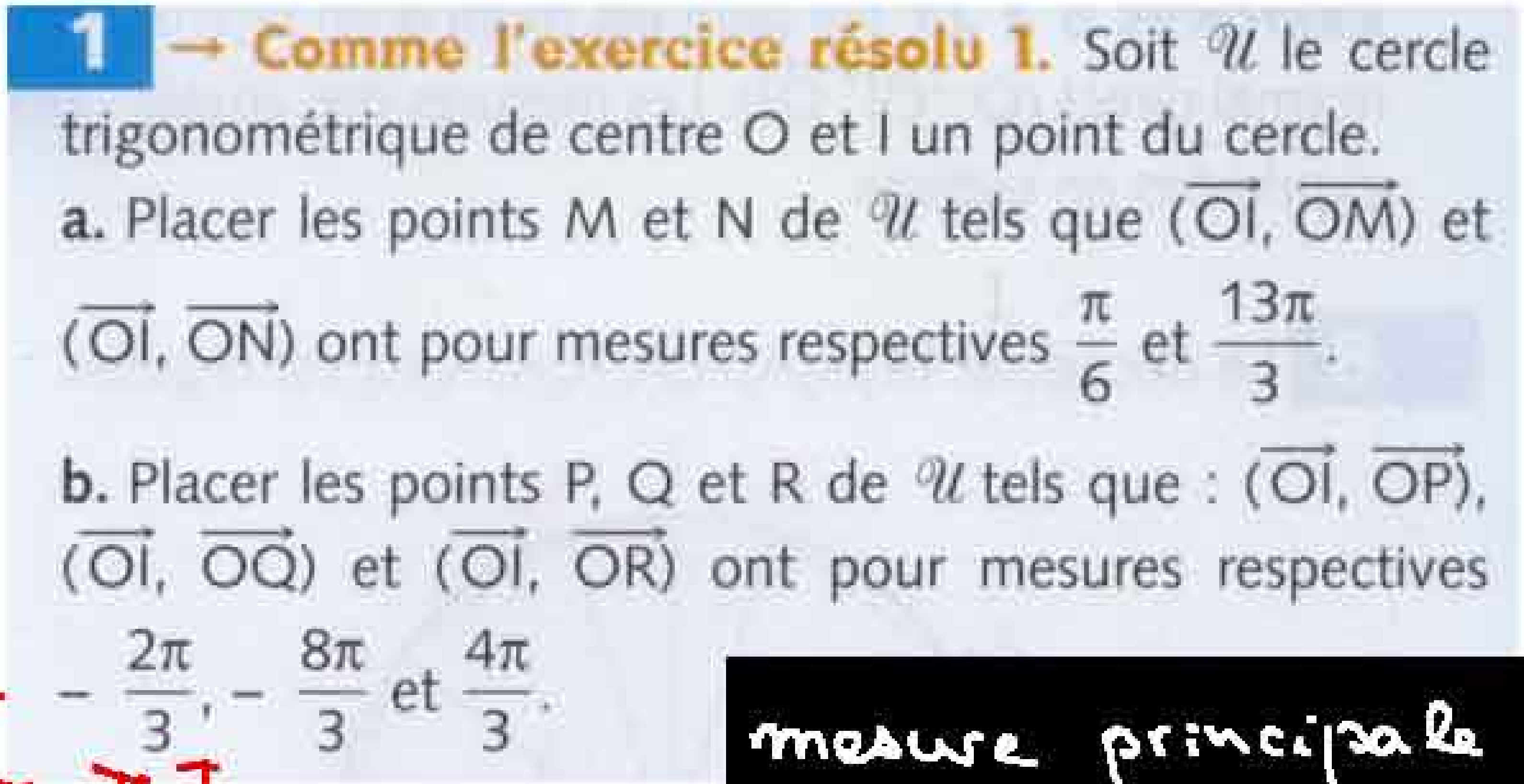
$$= 4\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$= k \times 2\pi + \alpha$$

$k = 2$ $\alpha \in]-\pi;\pi]$

et $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}$ est $\boxed{\text{la}}$ mesure principale de $\frac{13\pi}{3}$ car $\frac{\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$



1 → **Comme l'exercice résolu 1.** Soit $\mathscr{U}$ le cercle trigonométrique de centre O et I un point du cercle.

a. Placer les points M et N de $\mathscr{U}$ tels que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON})$ ont pour mesures respectives $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{13\pi}{3}$.

b. Placer les points P, Q et R de $\mathscr{U}$ tels que : $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OQ})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OR})$ ont pour mesures respectives $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{8\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

Division euclidienne de 13 par 3 :

$$\begin{array}{r|l} 13 & 3 \\ \cline{2-2} -12 & 4 \\ \hline 1 & \end{array}$$

le reste

$13 = 3 \times 4 + 1$

$13\frac{\pi}{3} = \cancel{3} \times 4 \times \frac{\pi}{\cancel{3}} + 1 \times \frac{\pi}{3}$

$\frac{13\pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$

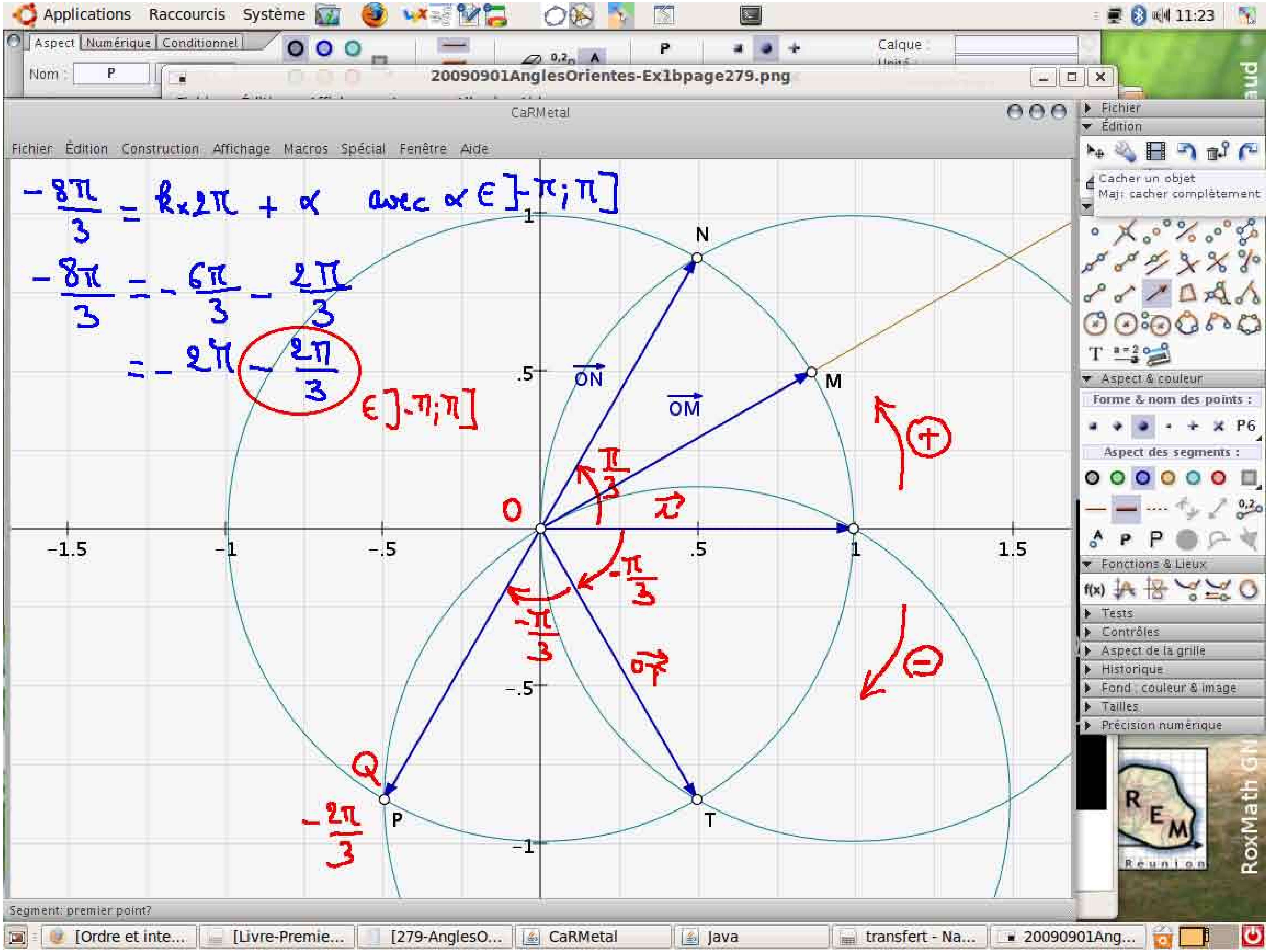
mesure principale de $\frac{497\pi}{7}$

$$\begin{array}{r|l} 497 & 7 \\ \cline{2-2} -49 & 71 \\ \hline 07 & \end{array}$$

$497 = 7 \times 71$

$\frac{497\pi}{7} = 71\pi$

$\frac{497\pi}{7} = 70\pi + \pi$

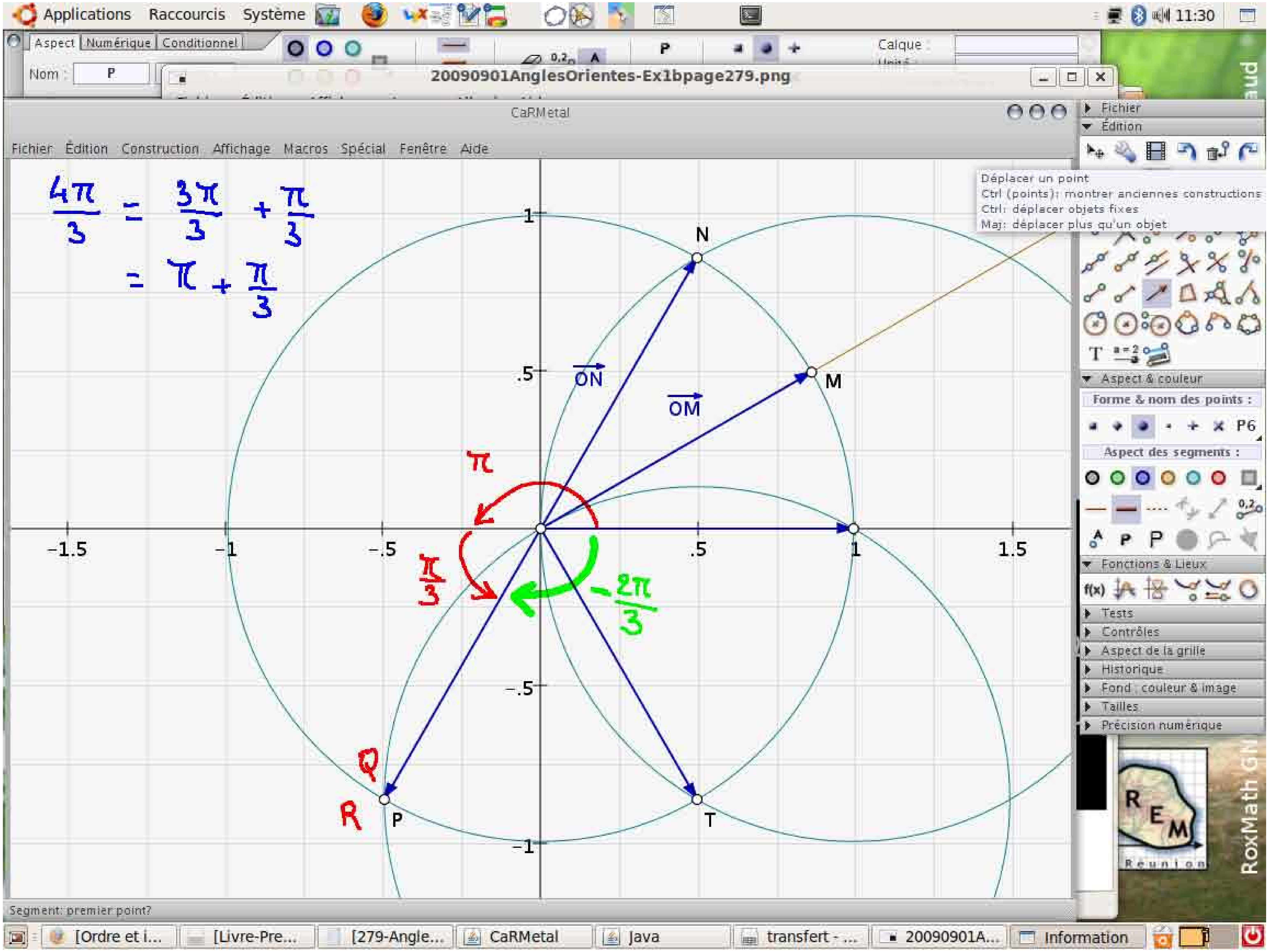


$-\frac{8\pi}{3} = k\times 2\pi + \alpha$ avec $\alpha \in]-\pi;\pi]$

$-\frac{8\pi}{3} = -\frac{6\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$

$= -2\pi \boxed{-\frac{2\pi}{3}}$ $\in]-\pi;\pi]$

20090901AnglesOrientes-Ex1cpage279



$$\frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$= \pi + \frac{\pi}{3}$$

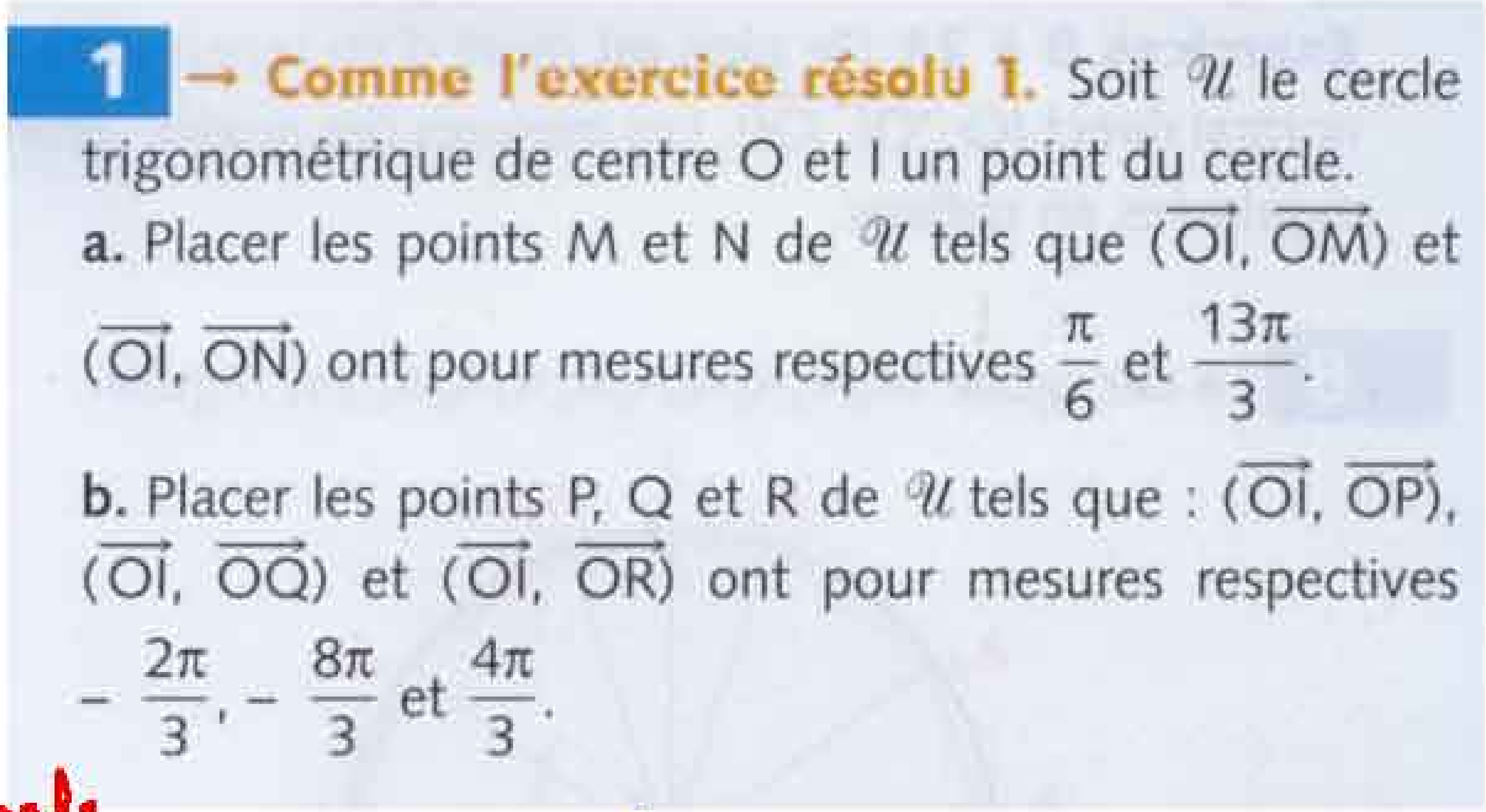
Déplacer un point
Ctrl (points): montrer anciennes constructions
Ctrl: déplacer objets fixes
Maj: déplacer plus qu'un objet

Segment: premier point?

20090901AnglesOrientes-Ex1dpage279

$$\frac{275\pi}{3} = k\times 2\pi + \alpha$$

$$\alpha \in]-\pi;\pi]$$



1 → **Comme l'exercice résolu 1.** Soit $\mathcal{U}$ le cercle trigonométrique de centre O et I un point du cercle.

a. Placer les points M et N de $\mathcal{U}$ tels que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON})$ ont pour mesures respectives $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{13\pi}{3}$.

b. Placer les points P, Q et R de $\mathcal{U}$ tels que : $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OQ})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OR})$ ont pour mesures respectives $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{8\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

$$\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$= 2\pi - \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$= 2\pi \boxed{-\frac{2\pi}{3}}$$

mesure principale

$$-\frac{8\pi}{3} = \underbrace{\boxed{-\frac{6\pi}{3}}}_{k\times 2\pi} + \underbrace{\boxed{-\frac{2\pi}{3}}}_{\in]-\pi;\pi]}$$

$$= -2\pi - \frac{2\pi}{3}$$

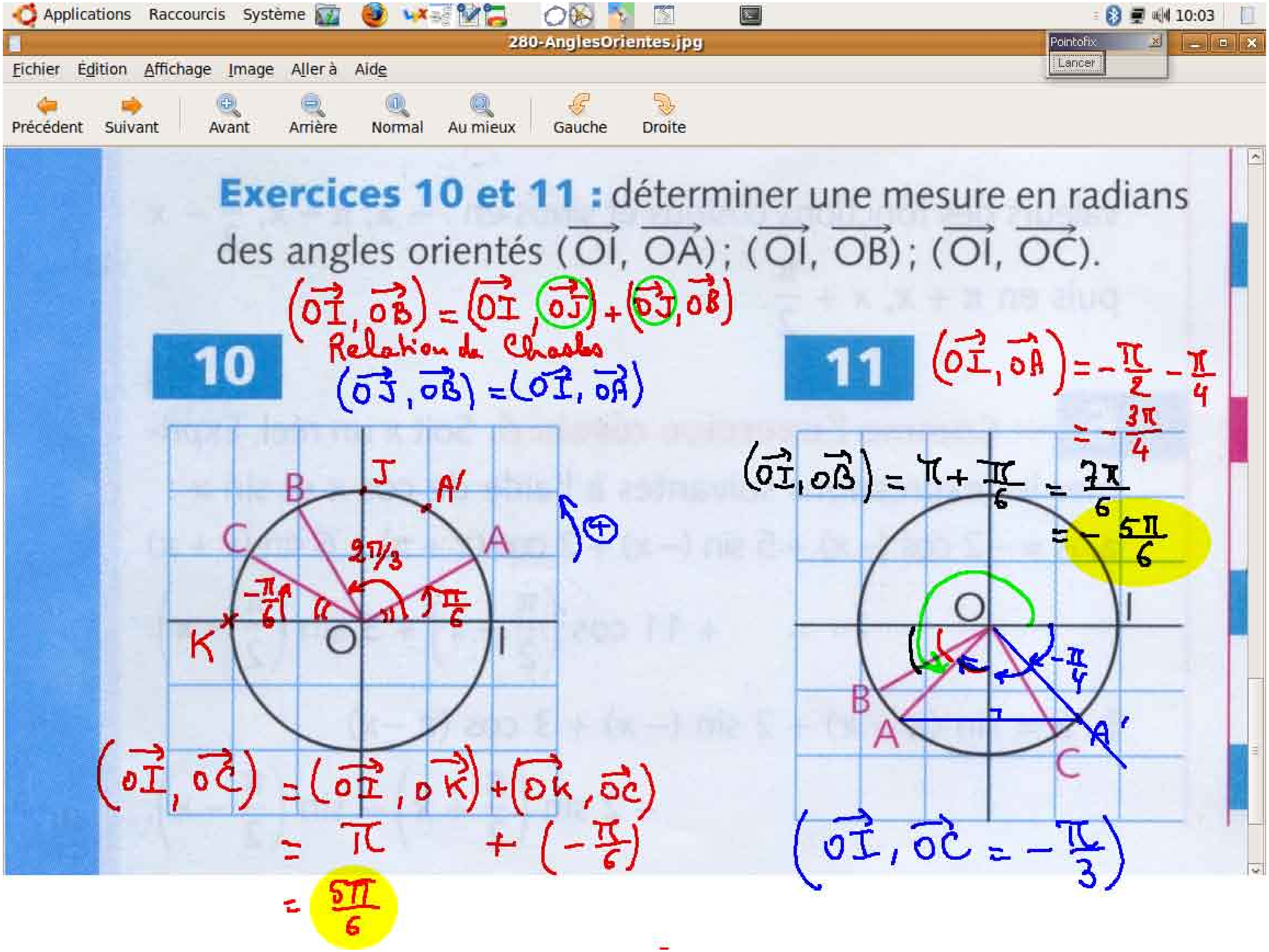
$$\begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \hline -6 & 2 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Division euclidienne de 8 par 3

$$8 = 2\times 3 + 2$$

$$-\frac{8\pi}{3} = -\frac{\pi}{\cancel{3}}\times 2\times \cancel{3} + \left(-\frac{\pi}{3}\right)\times 2$$

$$-\frac{8\pi}{3} = -2\pi - \frac{2\pi}{3}$$



Exercices 10 et 11 : déterminer une mesure en radians des angles orientés $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$; $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$; $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$.

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OB})$

Relation de Chasles

$(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK}) + (\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OC})$

$= \pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{5\pi}{6}$

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

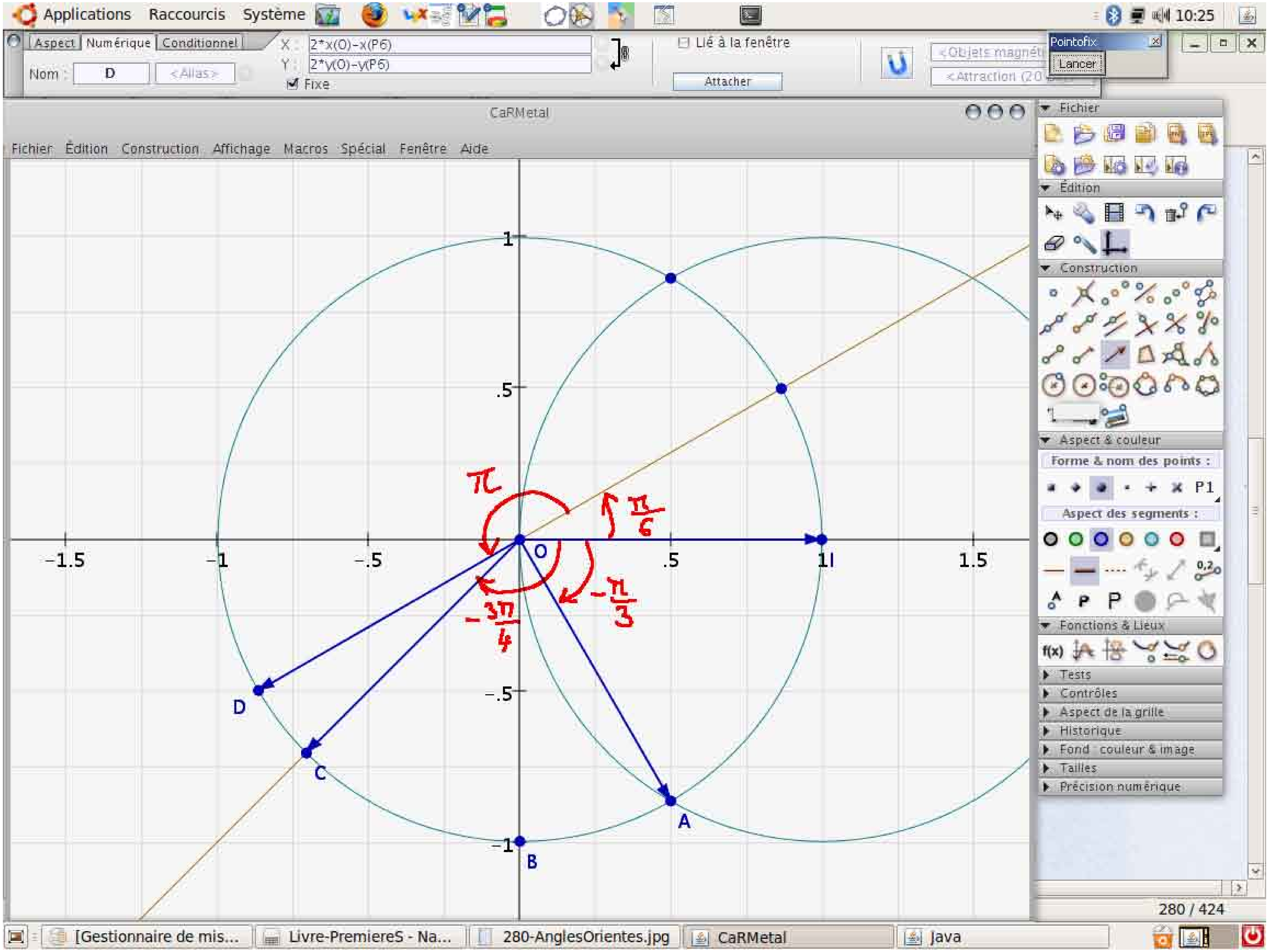
$= -\frac{3\pi}{4}$

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$= -\frac{5\pi}{6}$

$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC} = -\frac{\pi}{3})$

20090903-AnglesOrientes-Ex10page279



Nom : D

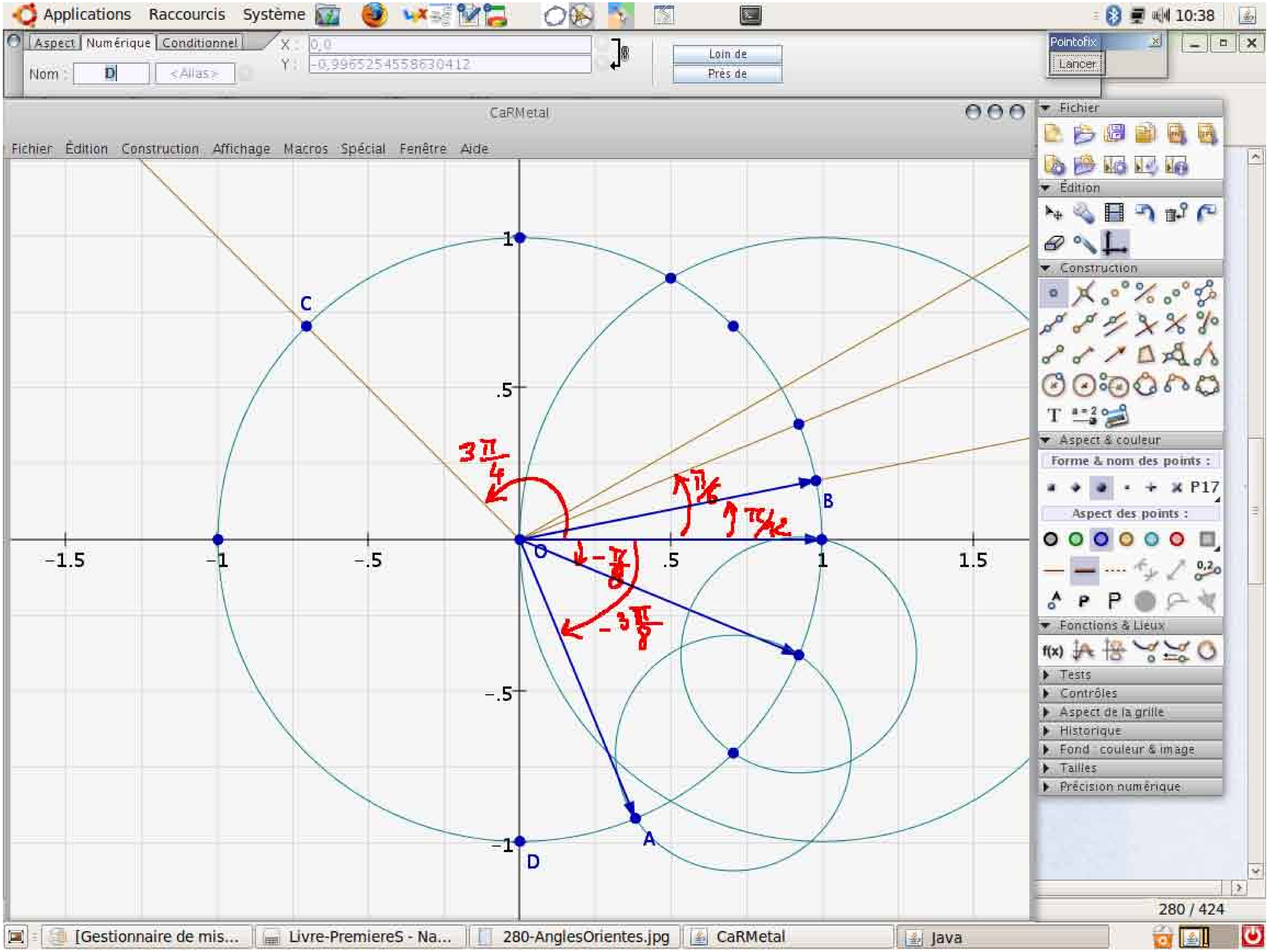
X : 2*x(O)-x(P6)

Y : 2*y(O)-y(P6)

☑ Fixe

☐ Lié à la fenêtre

20090903-AnglesOrientes-Ex15page279



Nom : D

X : 0,0

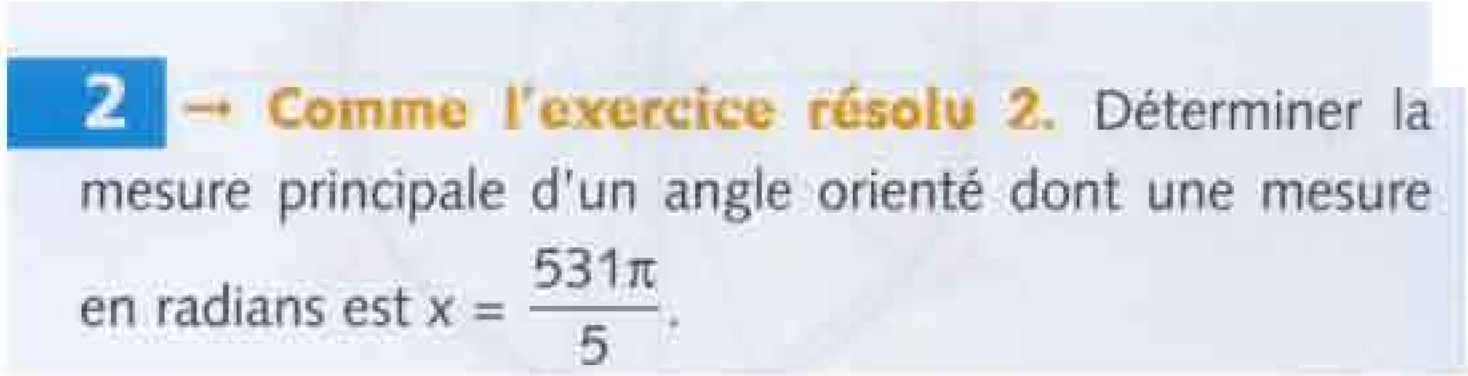
Y : -0,9965254558630412

20090903-AnglesOrientes-Ex16page279

$531 = 530 + 1$

$531 = 5 \times 106 + 1$)

division euclidienne de 531 par 5



2 → **Comme l'exercice résolu 2.** Déterminer la mesure principale d'un angle orienté dont une mesure en radians est $x = \frac{531\pi}{5}$.

$$\boxed{531\frac{\pi}{5} = 106\pi + \frac{\pi}{5}}$$

$k \times 2\pi + \alpha$ avec $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

↳ mesure principale

$-\pi < \frac{\pi}{5} \leq \pi$

$(\vec{OA},\vec{OB}) = \frac{\pi}{3}$

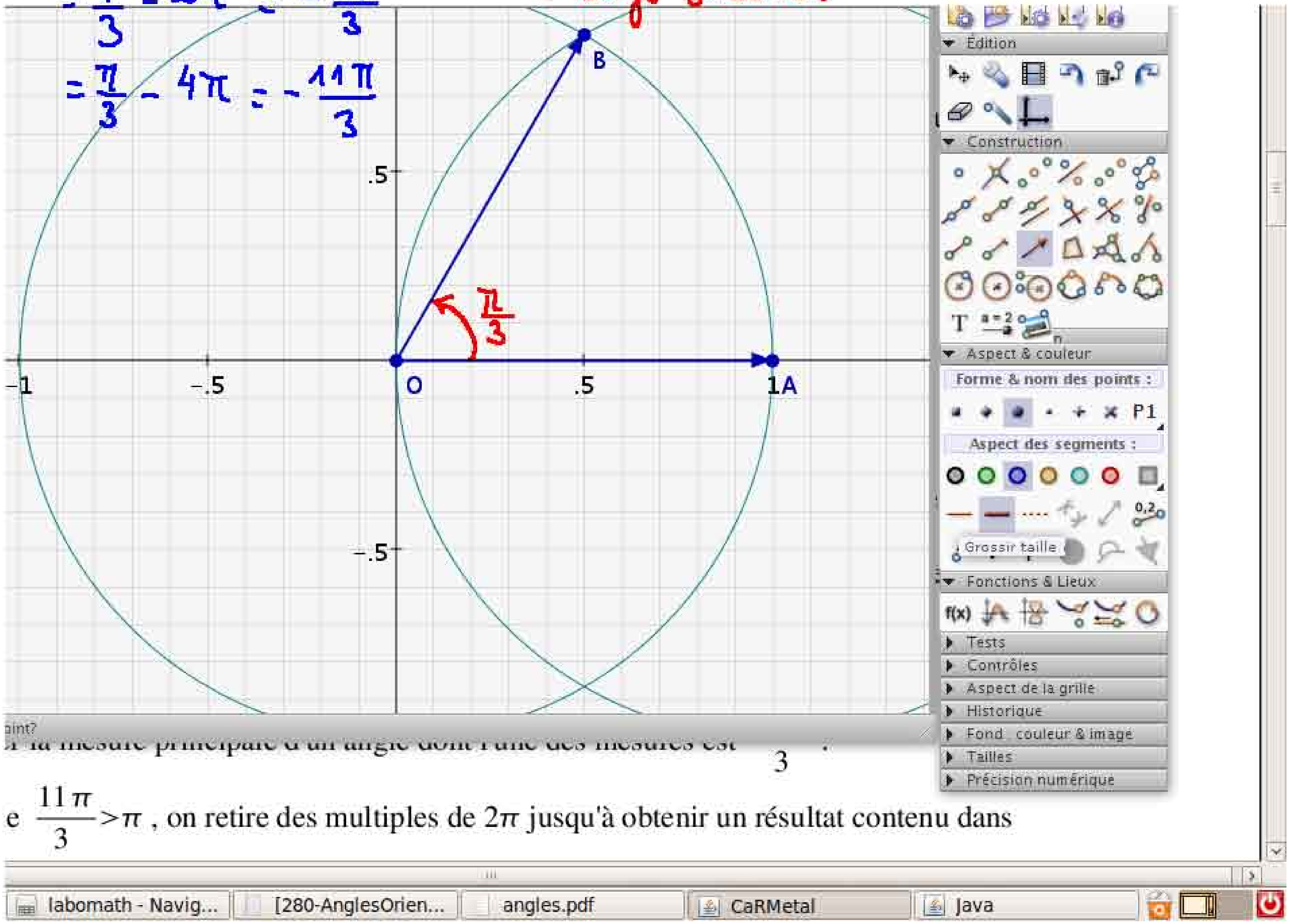
$= \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$

$= \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$

$= \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$

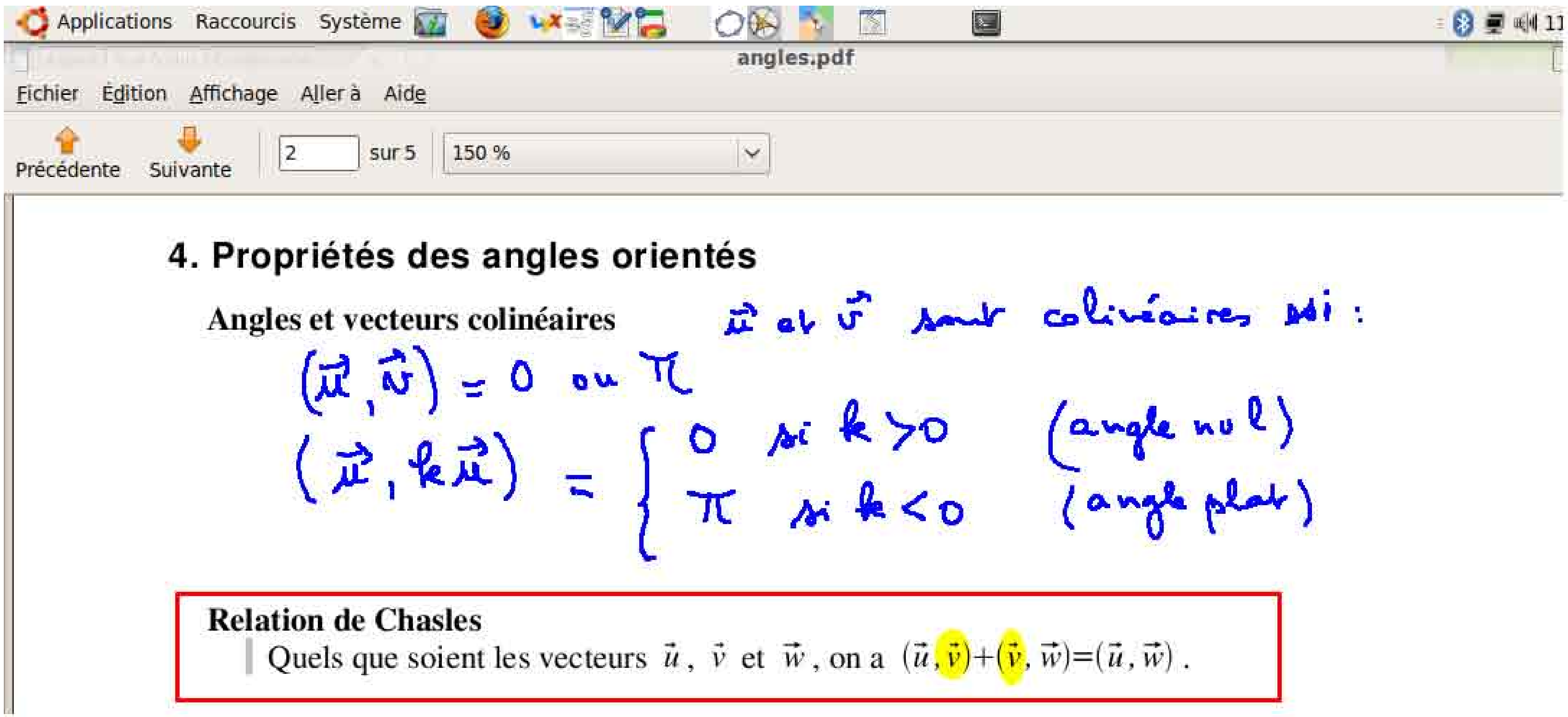
Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, une seule $\in]-\pi;\pi]$

C'est la mesure principale de l'angle orienté.



la mesure principale d'un angle dont l'une des mesures est 3 .

e $\frac{11\pi}{3} > \pi$, on retire des multiples de 2π jusqu'à obtenir un résultat contenu dans



4. Propriétés des angles orientés

Angles et vecteurs colinéaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi :

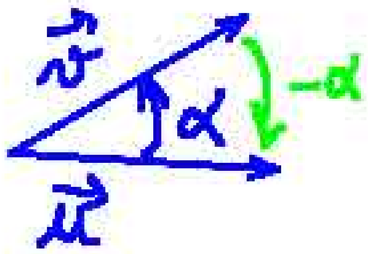
$(\vec{u},\vec{v}) = 0$ ou π

$$(\vec{u}, k\vec{u}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k>0 \quad \text{(angle nul)} \\ \pi & \text{si } k<0 \quad \text{(angle plat)} \end{cases}$$

Relation de Chasles

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$.

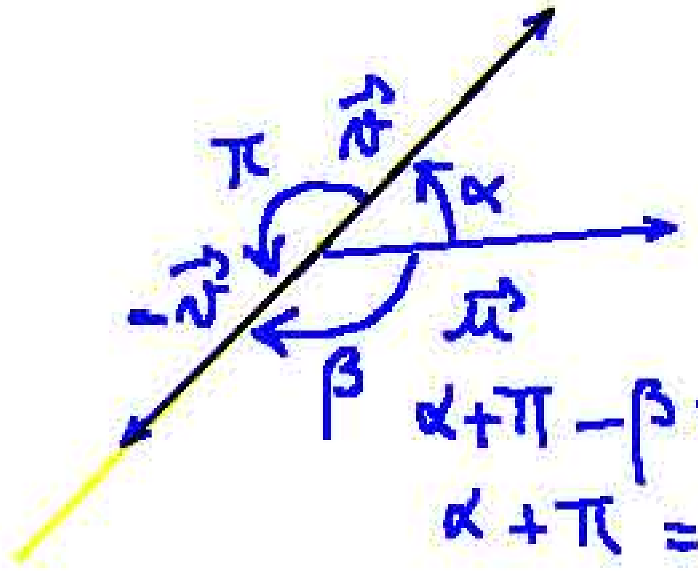
Conséquences :



- $(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v})$
- $(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$
- $(\vec{v},-\vec{u}) = (\vec{v},\vec{u}) + \pi$
  $= -(\vec{u},\vec{v}) + \pi$

$(\vec{v},-\vec{u}) = \pi - (\vec{u},\vec{v})$

- $(-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})$



$\alpha + \pi - \beta = 0$

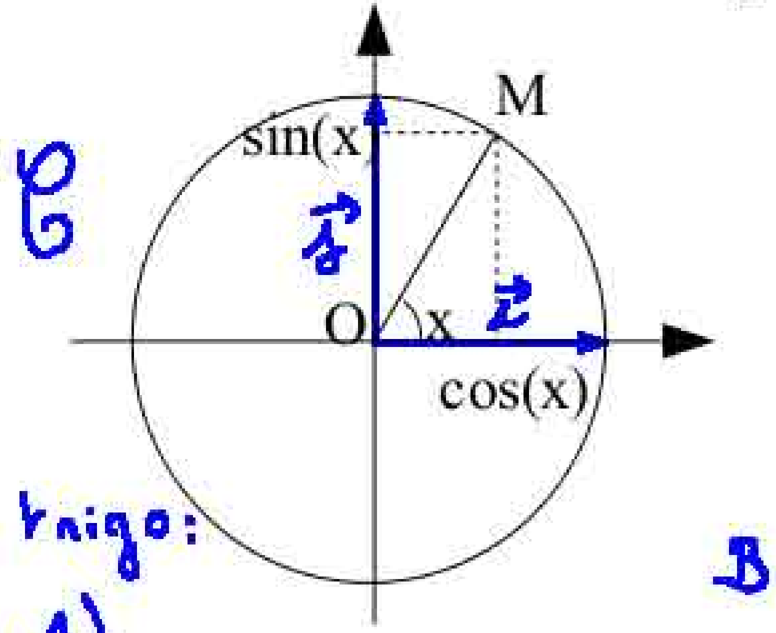
$\alpha + \pi = \beta$

C Sinus et cosinus d'un angle orienté

1. Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct; on a $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

On considère le cercle trigonométrique, cercle de centre O et de rayon 1.

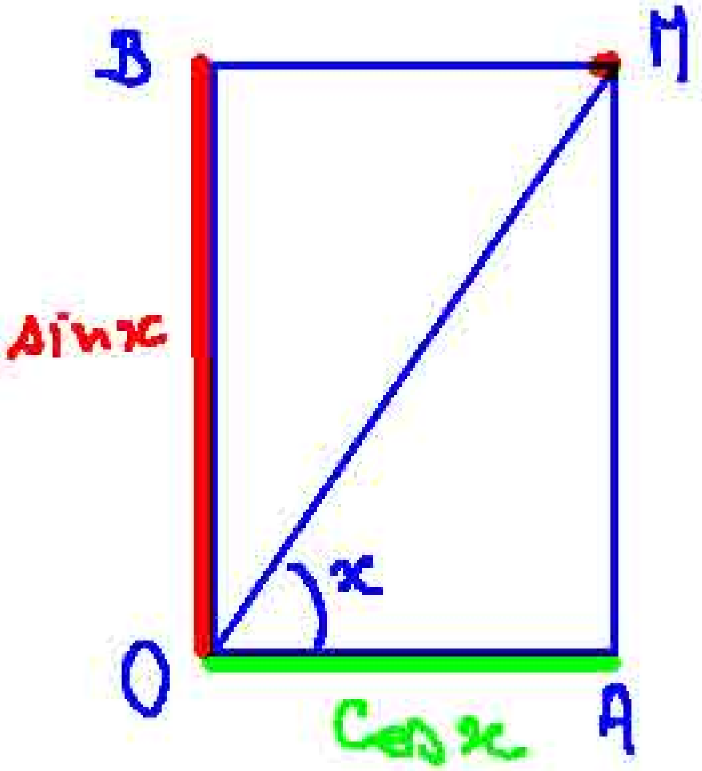


A tout réel x, on associe le point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

On appelle alors **cos(x)** l'abscisse du point M et **sin(x)** l'ordonnée du point M.

cercle trigo :
$\mathscr{C}(O, 1)$

$M(\cos x ; \sin x)$



$\cos x = \frac{OA}{OM}$ $\quad M \in \mathscr{C}$

donc $OM = 1$

$OA = \cos x$

$\sin x = \frac{AM}{OM} = \frac{AM}{1}$ donc

$AM = \sin x$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ existe ssi

1) $g(x)$ existe donc $x \in \mathbb{R}$

2) $f(x)$ existe donc $x \in \mathbb{R} - \{-4\}$

3) $f(x)$ ne doit pas s'annuler :

$f(x) \neq 0$

$(x+2)^2 \neq 0$

$x+2 \neq 0$

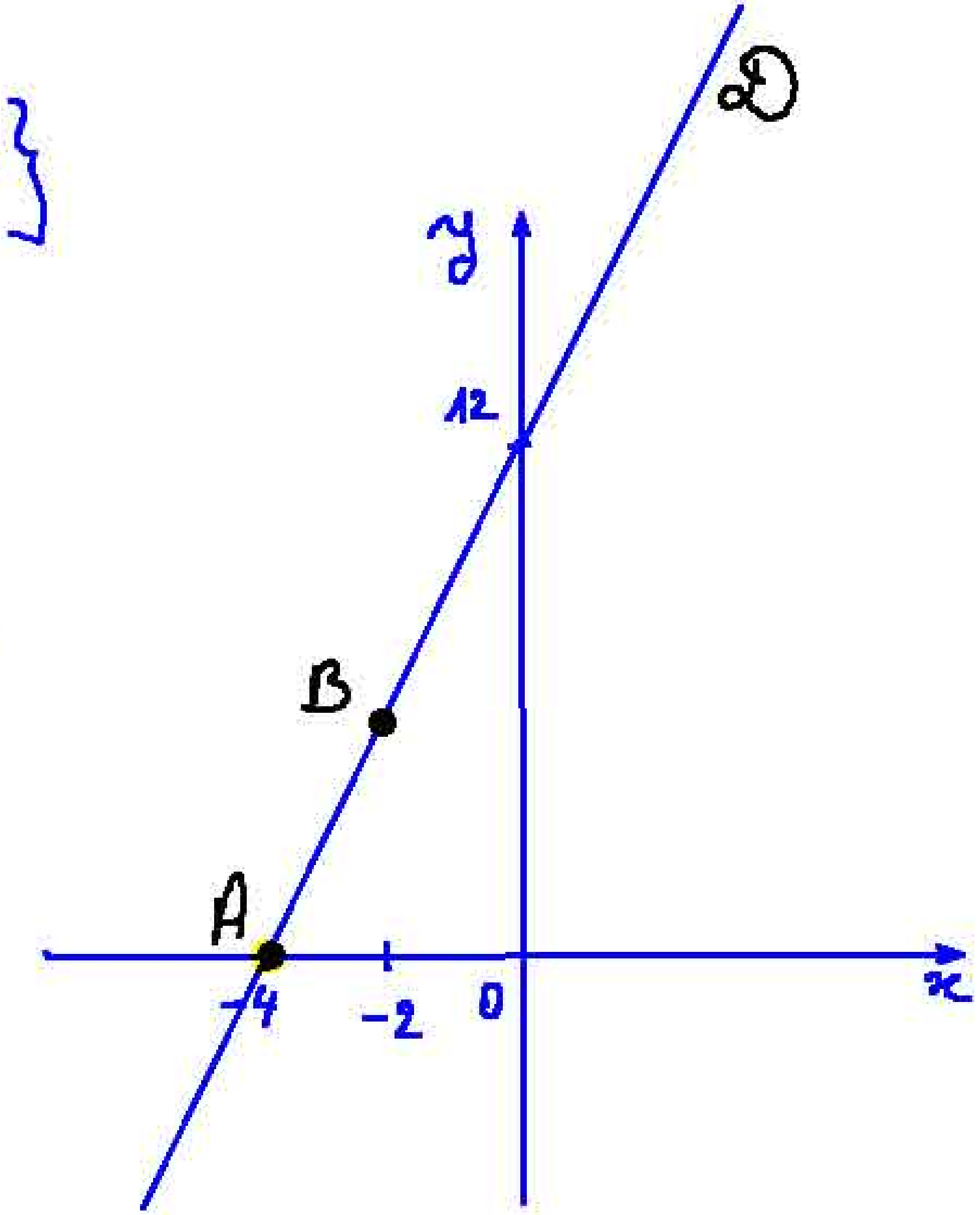
$x \neq -2$

CONCLUSION :

$\frac{g}{f}$ existe sur $\mathbb{R} - \{-2;-4\}$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = 3(x+4)$$

La représentation graphique de $\frac{g}{f}$ est la droite $\mathcal{D}$ privée des points A et B.



5)

$$f\circ g : x \xrightarrow{g} 3(x+2)^2 \xrightarrow{f} 3(x+2)^2 + \frac{4}{3(x+2)^2+4}$$

$$f : \boxed{x} \longrightarrow \boxed{x} + \frac{4}{\boxed{x}+4}$$

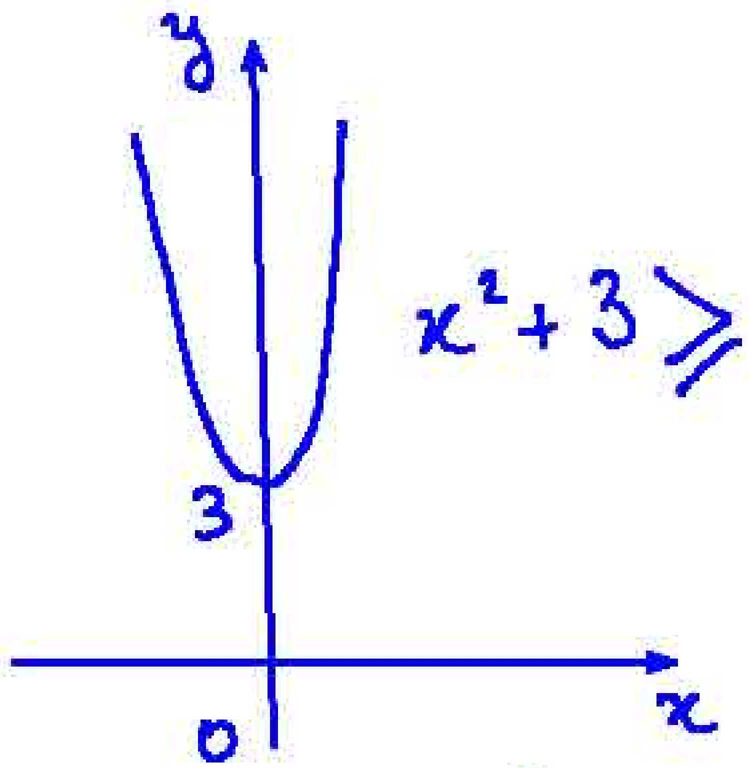
$$f\circ g : \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{f} f(\mathbb{R}^+)$$

$$D_{f\circ g} = \mathbb{R} \, .$$

Exercice 3.

$$f(x) = 7 - \frac{4}{x^2+3}$$

1) f existe si $x^2+3 \neq 0$



$x^2+3 \geqslant 3$ pour tout x réel

Donc $x^2+3>0$

$$D_f = \mathbb{R}$$

2) $f(0) = 7 - \frac{4}{3}$

$= \frac{7\times 3}{3} - \frac{4}{3}$

$= \frac{21}{3} - \frac{4}{3} = \frac{17}{3}$

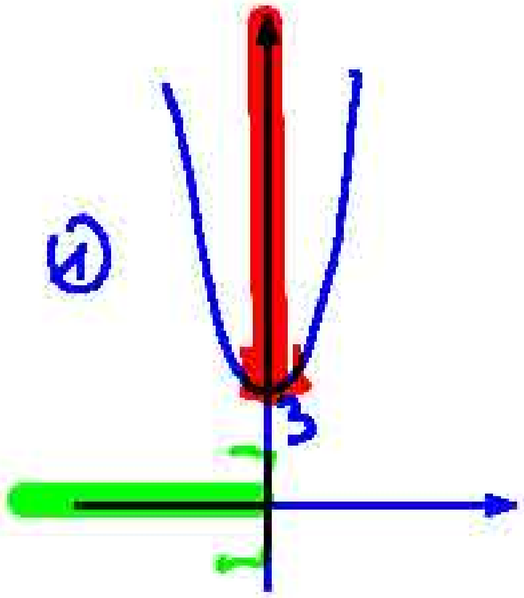
3) $f : x \xmapsto{g} x^2+3 \xmapsto{k} \frac{1}{x^2+3} \xmapsto{h} -4\left(\frac{1}{x^2+3}\right)+7$

$$\boxed{f = h \circ k \circ g}$$

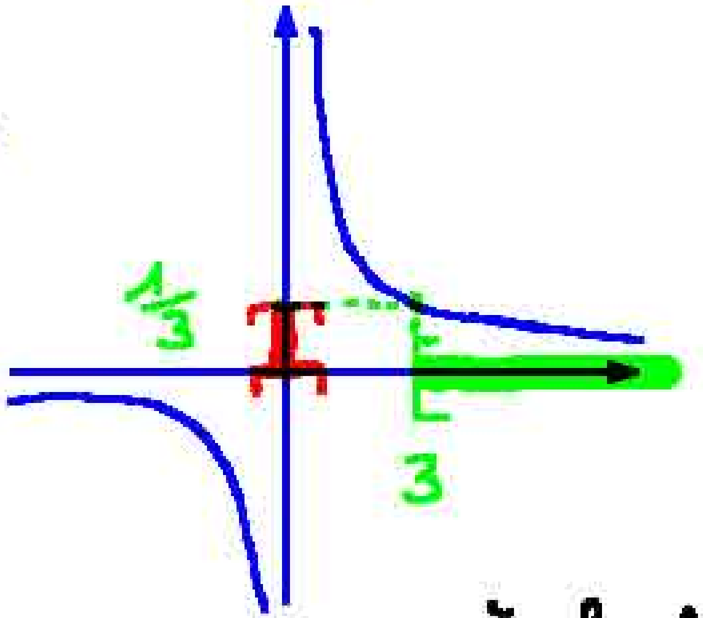
3) a) $]-\infty;0] \underset{①\searrow}{\xrightarrow{g}} [3;+\infty[\underset{②\searrow}{\xrightarrow{k}}]0;\frac{1}{3}] \underset{\searrow}{\xrightarrow{h}} [h(\frac{1}{3});h(0)[$

$[\frac{17}{3};7[$

①



②



à chercher

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$19/3$	↗	7

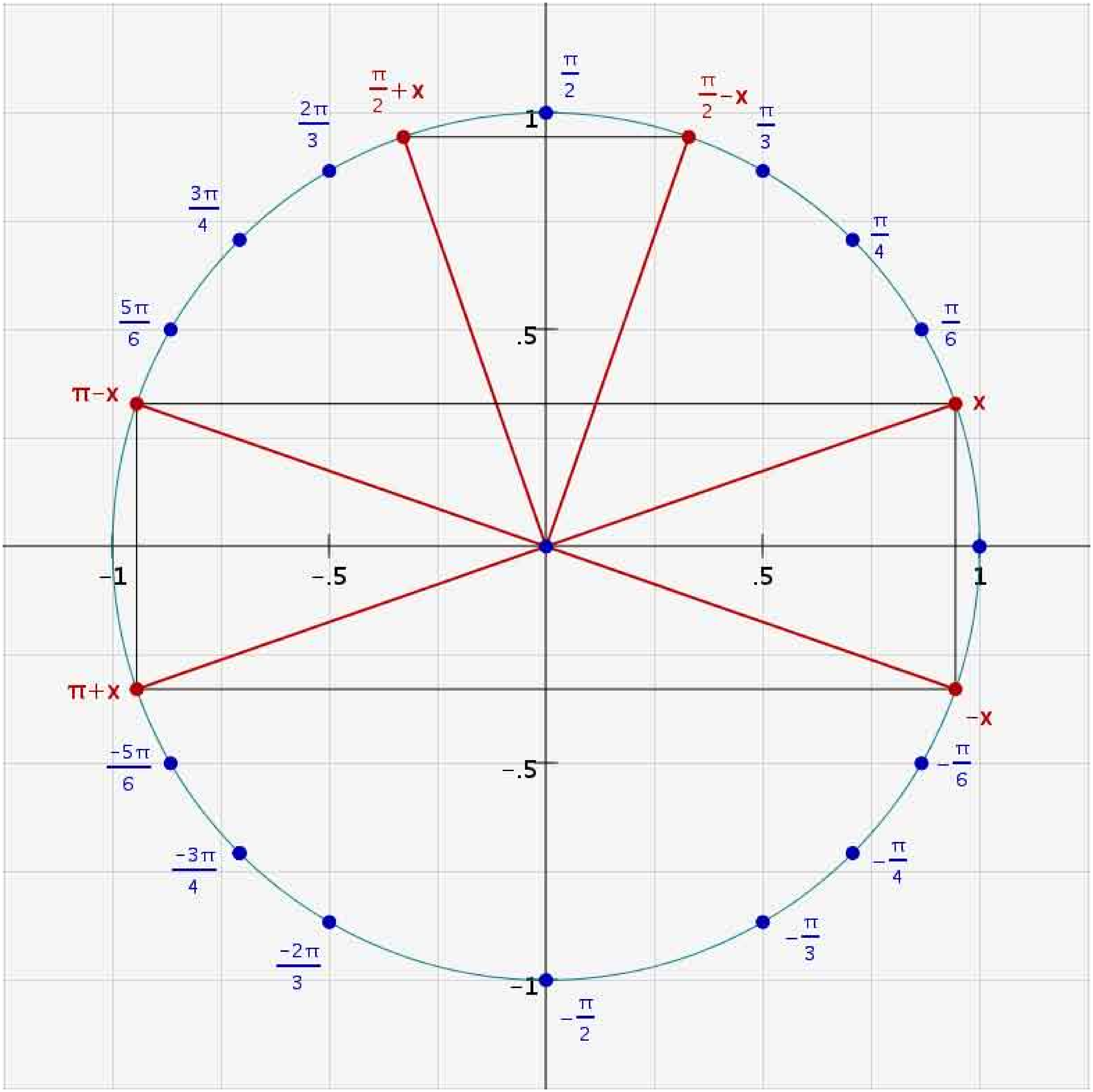
g est décroissante sur $]-\infty;0]$, à valeurs dans $[3;+\infty[$.

k est ↘ sur $[3;+\infty[$ à valeurs dans $]0;\frac{1}{3}]$.

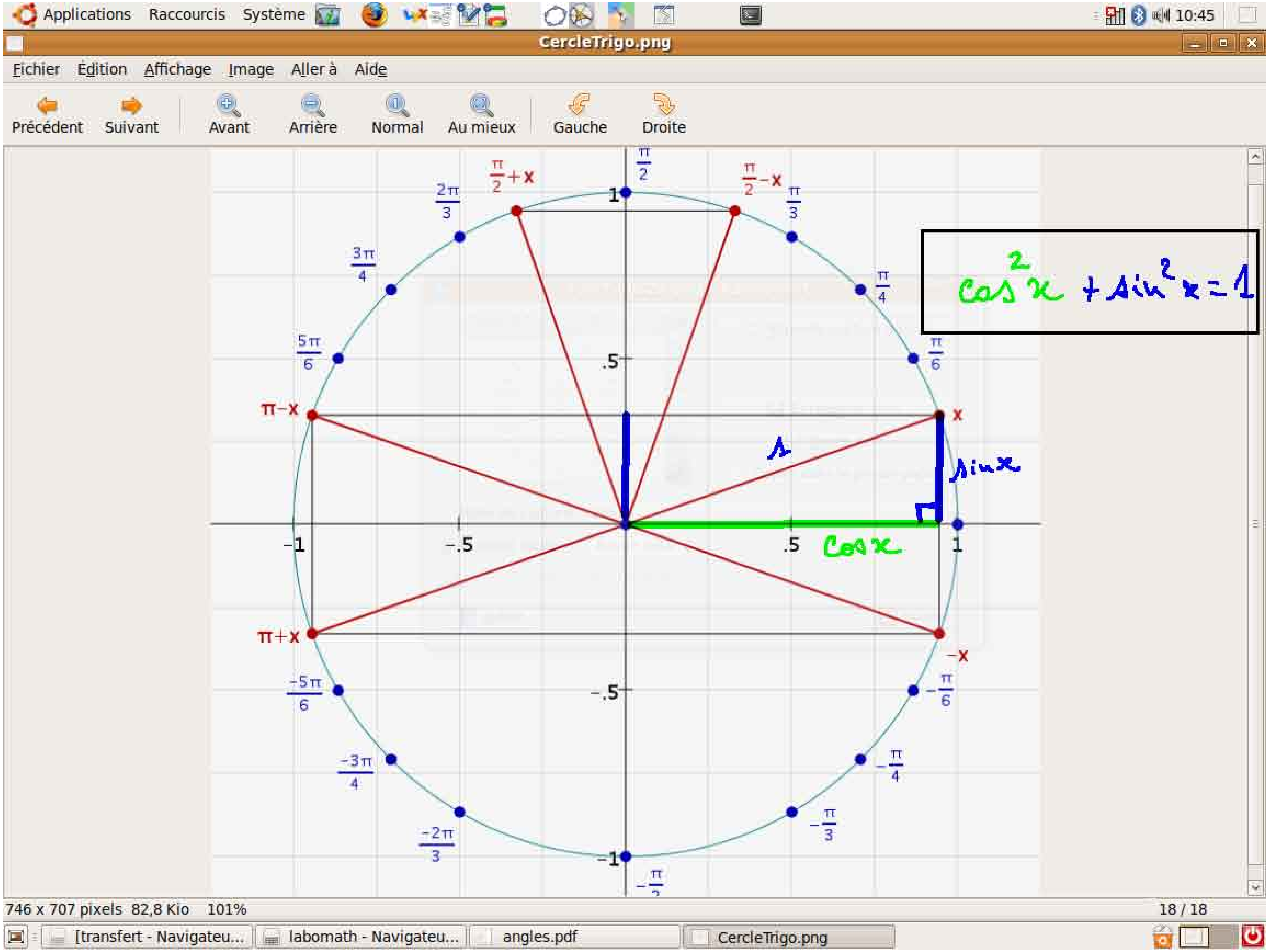
h est ↘ sur $]0;\frac{1}{3}]$, à valeurs dans $[\frac{17}{3};7[$

3) $f: x \xmapsto{g} x^2+3 \xmapsto{k} \boxed{\frac{1}{x^2+3}} \xmapsto{h} -4\boxed{\frac{1}{x^2+3}}+7$

$$\boxed{f = h \circ k \circ g}$$

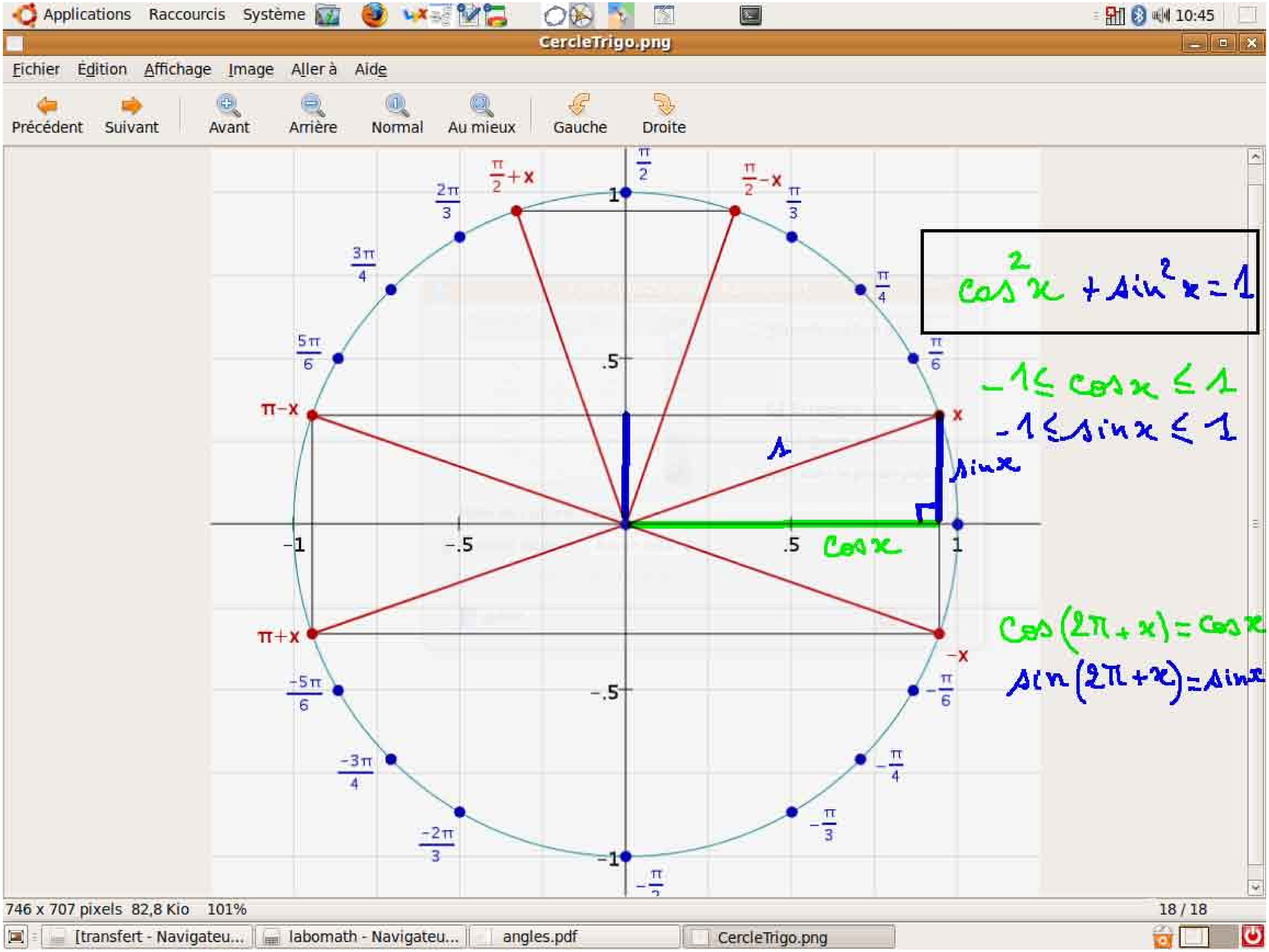


20090908-CercleTrigo



$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

20090911-cercleTrigo



$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

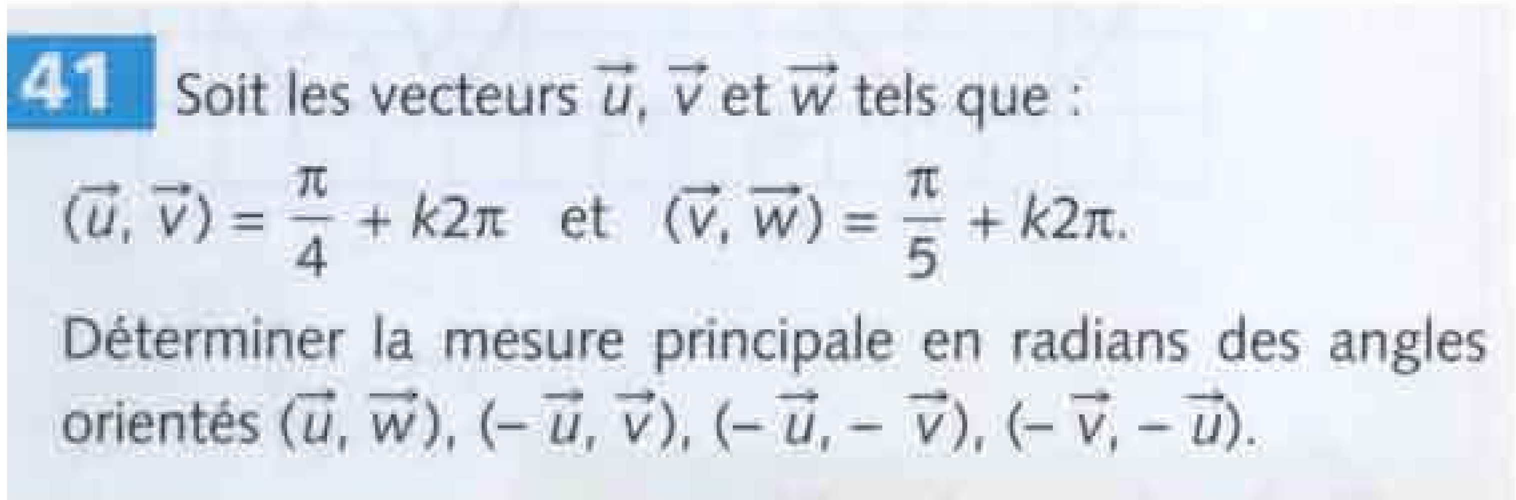
$$\cos(2\pi + x) = \cos x$$

$$\sin(2\pi + x) = \sin x$$

$(\vec{u},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w})$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5}$

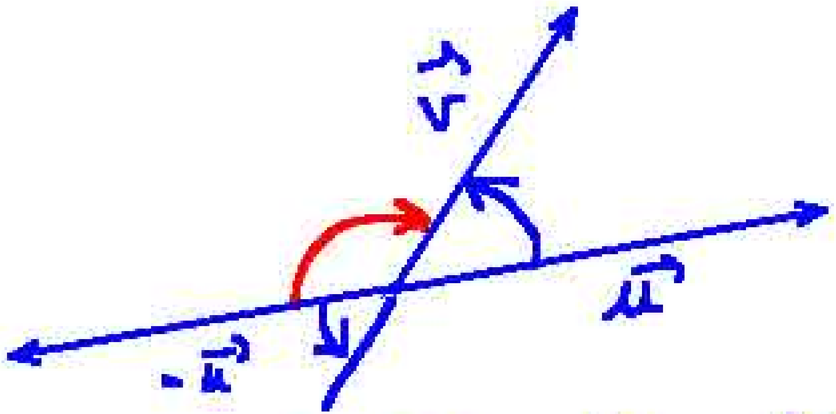
$= \frac{9\pi}{20}$



41 Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :

$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ et $(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{5} + k2\pi$.

Déterminer la mesure principale en radians des angles orientés $(\vec{u}, \vec{w})$, $(-\vec{u}, \vec{v})$, $(-\vec{u}, -\vec{v})$, $(-\vec{v}, -\vec{u})$.



$(-\vec{u},\vec{v}) = -\pi + (\vec{u},\vec{v})$

$= -\pi + \frac{\pi}{4}$

$= -\frac{3\pi}{4}$

$(-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$

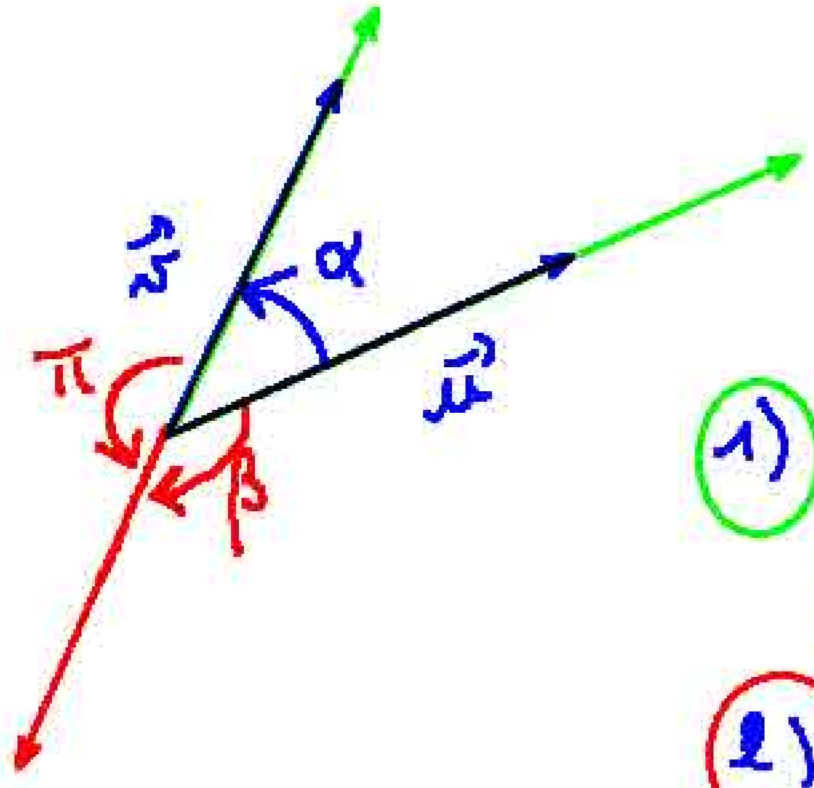
$(-\vec{v},-\vec{u}) = -(-\vec{u},-\vec{v})$

$= -(\vec{u},\vec{v})$

$= -\frac{\pi}{4}$

20090911-Ex41page282

42 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et k et k' deux nombres réels non nuls. Comparer les mesures des angles orientés $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(k\vec{u}, k'\vec{v})$ suivant les signes de k et k'.



$\alpha + \pi - \beta = 0$

1) $k > 0$ $k' > 0$

$(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

2) $k > 0$ $k' < 0$

$(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v})$

$= \pi + (\vec{u}, \vec{v})$

3) $k < 0$ $k' > 0$

$(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{v})$

$= -\pi + (\vec{u}, \vec{v})$ (à 2π près

4) $k < 0$ $k' < 0$

$(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (-\vec{u}, -\vec{v})$

$= (\vec{u}, \vec{v})$

* si k et k' sont de mê signe,
$(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

* si k et k' sont de signe contraire,
$(k\vec{u}, k'\vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v})$

PS1 – interro de maths – Vendredi 11 septembre 2009 - LAR

1. Placer sur le cercle trigonométrique (que l'on prendra de rayon 7 cm) les points d'abscisse :

$$\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6},\pi,-\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{2},-\frac{2\pi}{3},-\frac{3\pi}{4},-\frac{5\pi}{6}$$

2. Soit x un réel $\in\ [\ 0;\frac{\pi}{2}\ ]$.

Placer sur le même cercle le point d'abscisse x (en dehors des points déjà tracés).
Placer alors les points d'abscisse :

$$\pi-x\,;\pi+x\,;\frac{\pi}{2}-x\,;\frac{\pi}{2}+x \quad \text{et} \quad -x \ .$$

3. Remplir alors le tableau suivant :

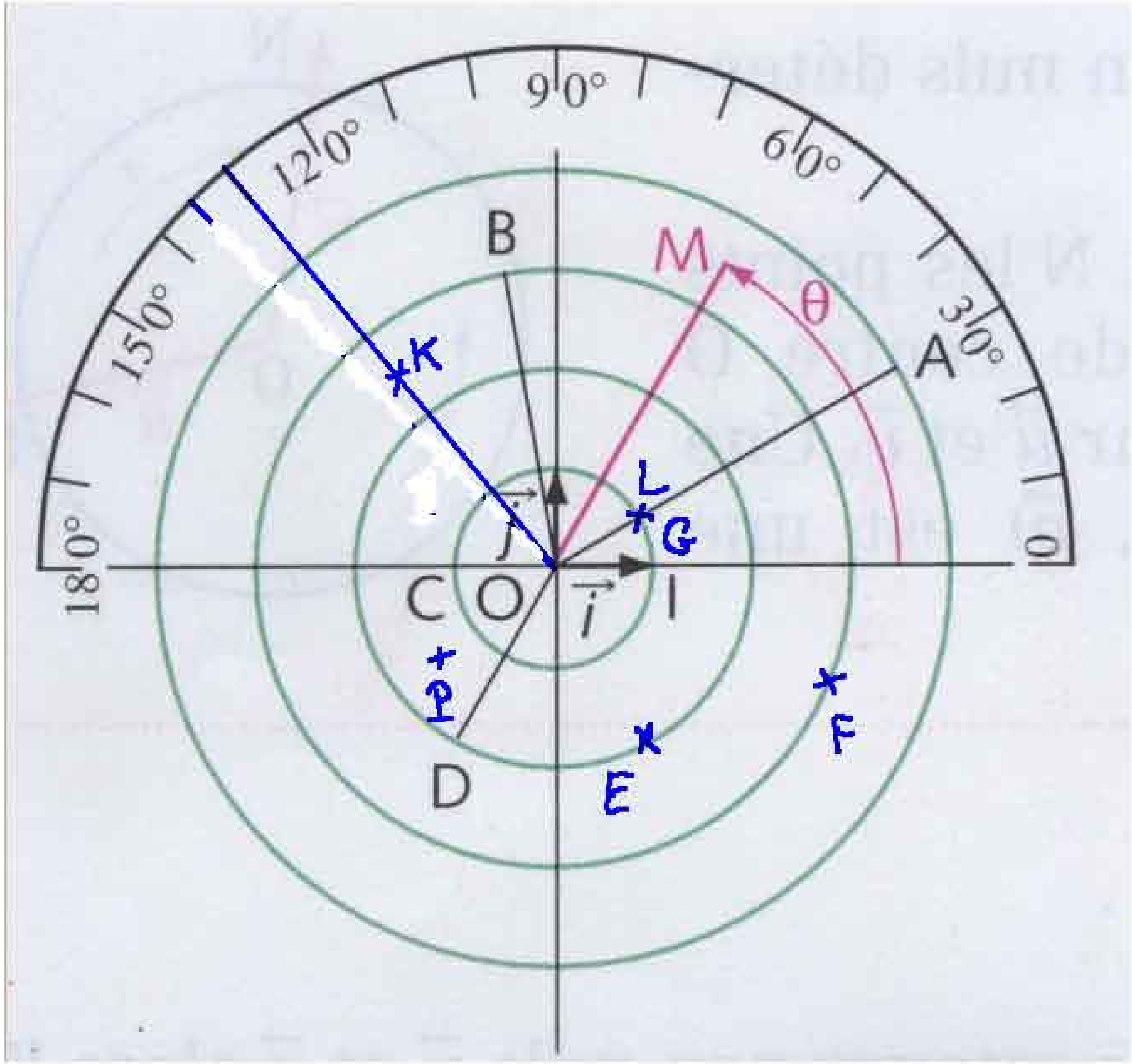
(on utilisera les symétries de la figure pour répondre) en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

$\cos(\pi-x)=¿$	$\sin(\pi-x)=¿$
$\cos(\pi+x)=¿$	$\sin(\pi+x)=¿$
$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=¿$	$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=¿$
$\cos(\frac{\pi}{2}+x)=¿$	$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=¿$
$\cos(-x)=¿$	$\sin(-x)=¿$

$M(x ; y)$ coordonnées cartésiennes (DESCARTES 1634)

$M(\rho ; \theta)$ coordonnées polaires

$\rho = OM \quad \theta = (\vec{i}, \vec{OM})$



1)

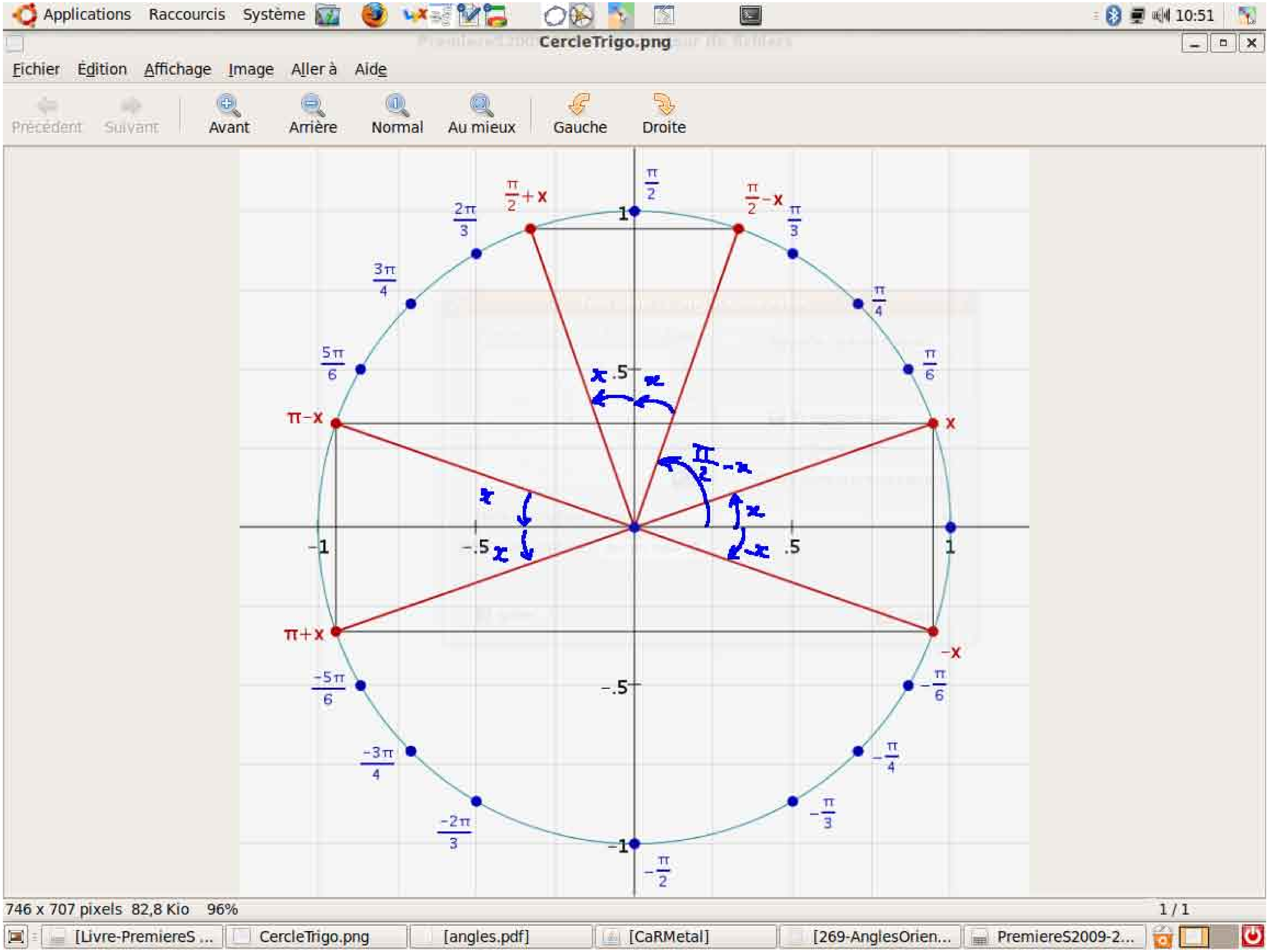
θ en degrés	θ en radians
$M(3,5 ; 60°)$	$M(3,5 ; \frac{\pi}{3})$
$A(4 ; 30°)$	$A(4 ; \frac{\pi}{6})$
$B(3 ; 100°)$	
$C(1 ; 180°)$	$C(1 ; \pi)$
$D(2 ; 240°)$	$D(2 ; -\frac{2\pi}{3})$
$I(1 ; 0)$	

2) $300° = 360° - 60°$

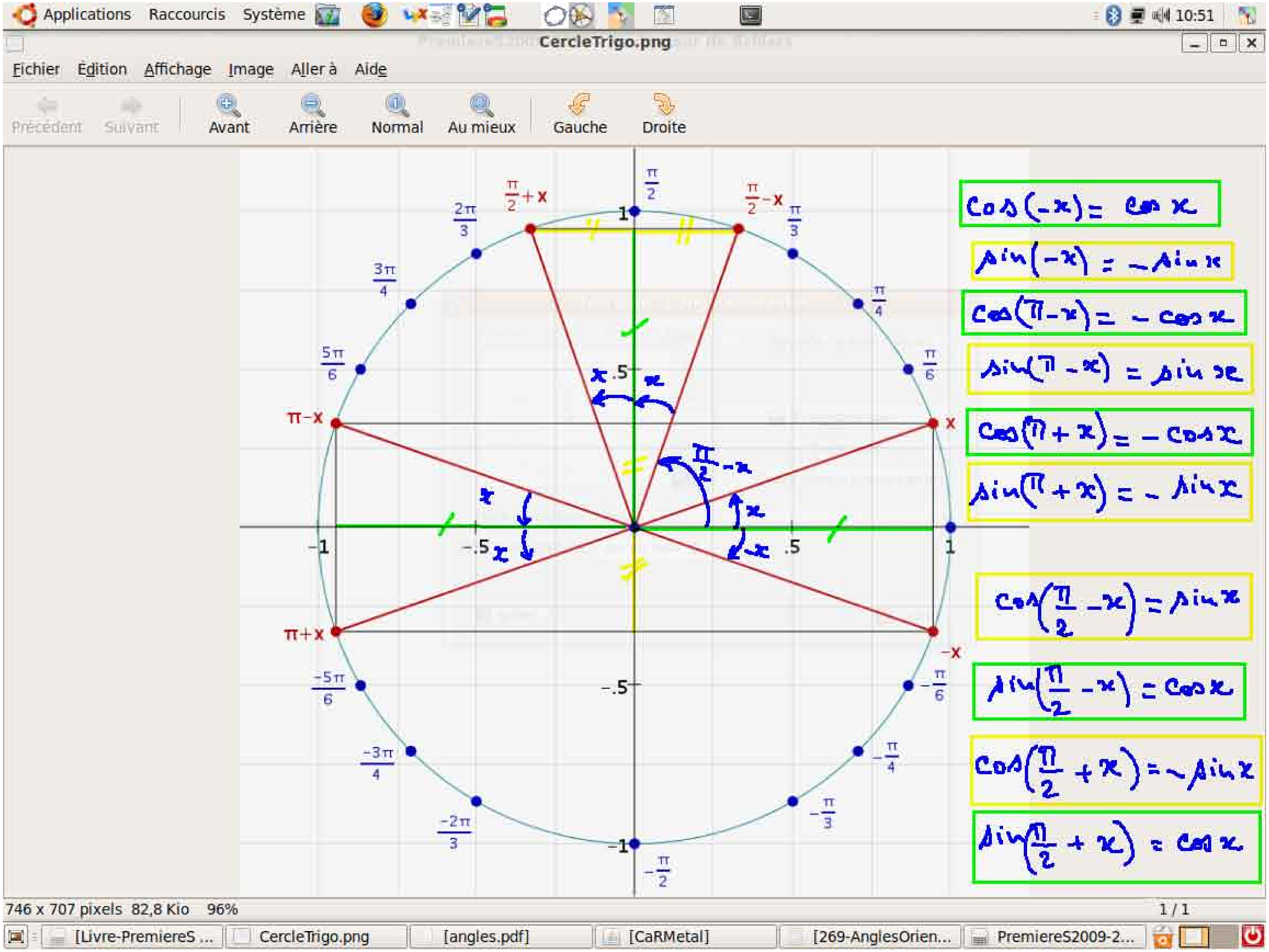
$= -60°$ (à 360° près)

$-230° = 360° - 230°$

$= 130°$



20090915-CercleTrigo1



$\cos(-x) = \cos x$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

20090915-CercleTrigo2

59) $A\left(\frac{3}{2};\frac{\pi}{6}\right)$

$x = \frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{6}$

$= \frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$y = \frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4}$

Coord cart. $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{4};\frac{3}{4}\right)$

$B\left(\sqrt{2};-\frac{3\pi}{4}\right)$

$x = \sqrt{2}\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= -\frac{2}{2}$

$= -1$

$y = \sqrt{2}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= -1$

Coord cart $B(-1;-1)$

$C(3;\pi)$

$x = 3\cos\pi$

$= -3$

$y = 3\sin\pi$

$= 0$

Coord cart $C(-3;0)$

62 p.283) • $A(4;4)$ coord cartésiennes

$A(\rho;\theta)$ $\rho = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

θ est déterminé par :

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{\rho} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{y}{\rho} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \text{d'où } \theta = \frac{\pi}{4}$$

Coord polaires de A : $\boxed{A\left(4\sqrt{2} ; \frac{\pi}{4}\right)}$

• $B(3;\sqrt{3})$ cartésiennes.

$B(\rho;\theta)$ $\rho = \sqrt{3^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

θ est déterminé par :

$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ d'où $\theta = \frac{\pi}{6}$

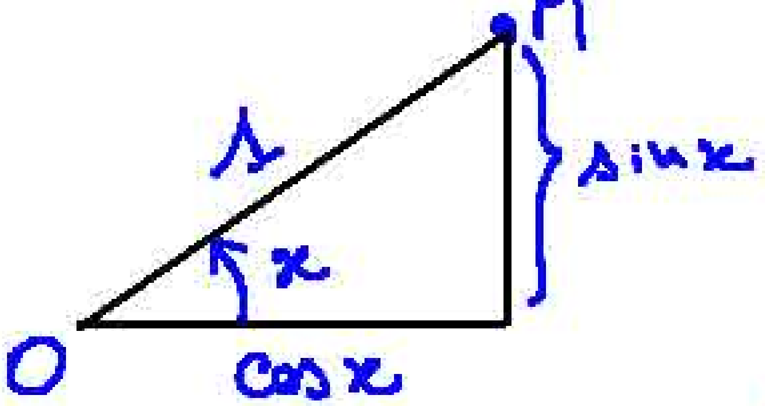
Coord pol de B : $\boxed{B\left(2\sqrt{3} ; \frac{\pi}{6}\right)}$

• $C(5;0)$ cart. $C \in (Ox)$ axe des abscisses

$C(5;0)$ aussi en coord polaires.

D] Coordonnées polaires

le plan a pour repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$



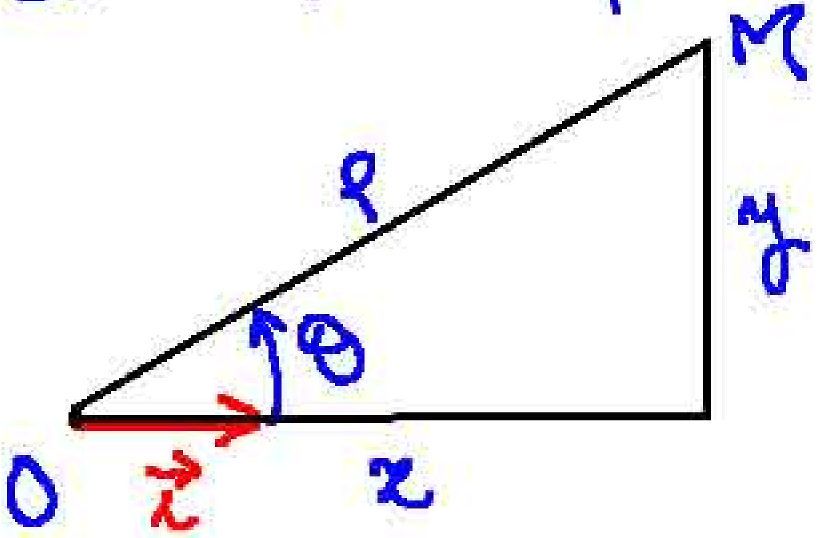
M est un point du cercle trigonométrique.

Il a pour coord cartésiennes

$M(\cos x\,;\ \sin x)$

Ses coordonnées polaires sont $M(1\,;\ x)$

Soit M un point du plan de coord cartésiennes $(x\,;\ y)$



ρ est la distance OM

θ est l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

Les coordonnées polaires du point M sont données par (ρ, θ)

on a : (1) $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$ (2) $\sin\theta = \frac{y}{\rho}$ d'où : $\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}}$

(Polaires → Cartésiennes)

Des Coord. cartésiennes aux coord. polaires.

x et y sont connues. $x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = \rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$x^2 + y^2 = \rho^2$ D'où $\boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2}}$ et θ est donné par (1) et (2).

74).

$$\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 1$$

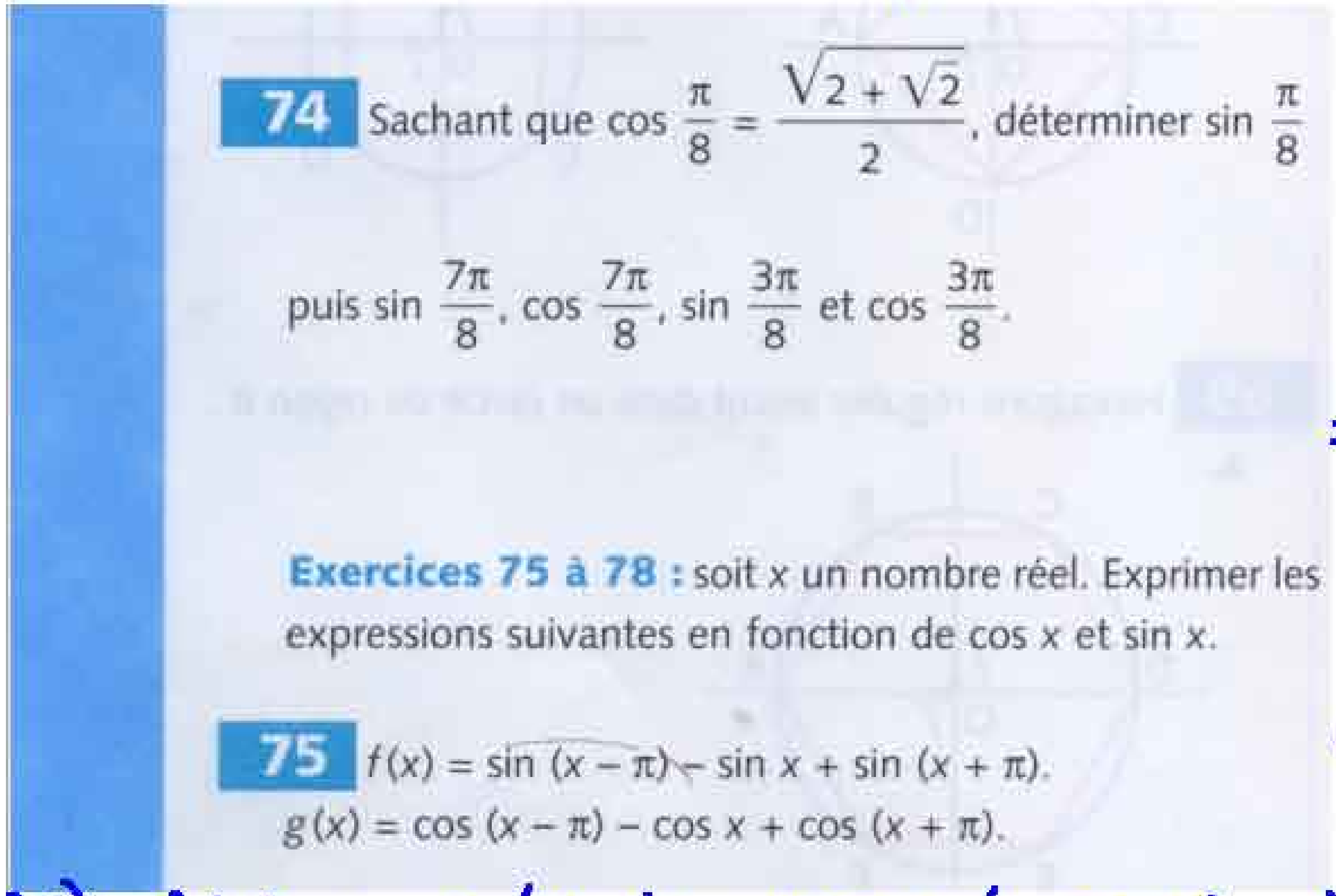
$$\frac{2+\sqrt{2}}{4} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 1$$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{4}{4} - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\frac{\pi}{8} \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\frac{\pi}{8} \geq 0$

D'où :

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$



74 Sachant que $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, déterminer $\sin\frac{\pi}{8}$

puis $\sin\frac{7\pi}{8}$, $\cos\frac{7\pi}{8}$, $\sin\frac{3\pi}{8}$ et $\cos\frac{3\pi}{8}$.

Exercices 75 à 78 : soit x un nombre réel. Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

75 $f(x) = \sin(x - \pi) - \sin x + \sin(x + \pi)$.

$g(x) = \cos(x - \pi) - \cos x + \cos(x + \pi)$.

* $\sin\frac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

* $\cos\frac{7\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

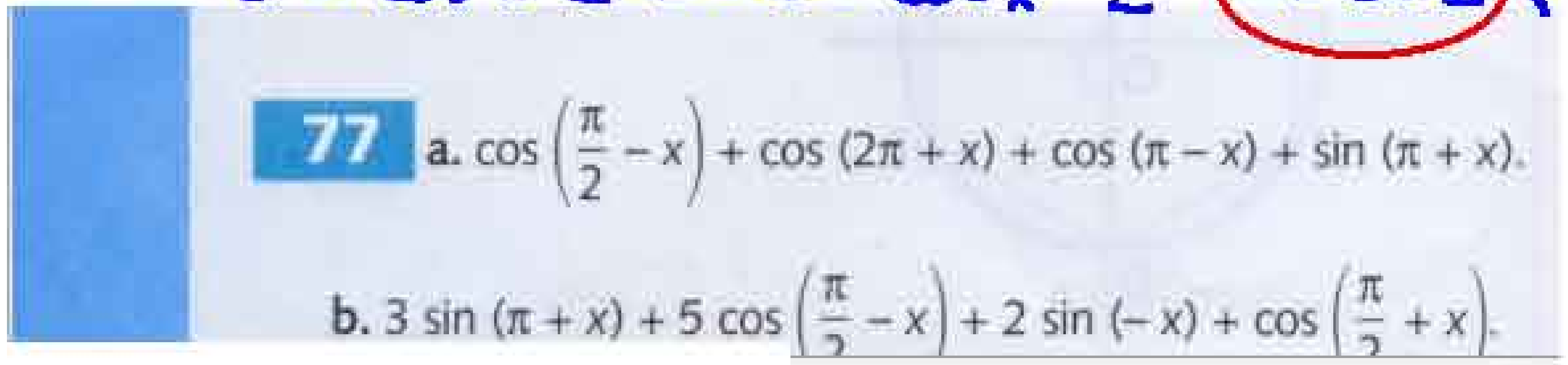
* $\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = +\cos\frac{\pi}{8}$

* $\cos\frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{8}$.

75)

$$f(x) = -\sin(\pi - x) - \sin x + (-\sin x) = -\sin x - \sin x - \sin x = \boxed{-3\sin x}$$

$$g(x) = \cos(\pi - x) - \cos x - \cos x = -\cos x - \cos x - \cos x = \boxed{-3\cos x}$$



77 a. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi + x) + \cos(\pi - x) + \sin(\pi + x)$.

b. $3\sin(\pi + x) + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

PS1 – interro de maths – Lundi 21 septembre 2009 – LAR - 1h

1. Remplir le tableau suivant :

angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cosinus						
sinus						

2. Placer sur le cercle trigonométrique (que l'on prendra de rayon 7 cm) les points X, Y, Z, T d'abscisse respective :

$$\frac{79\pi}{6}, -\frac{11\pi}{12}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{9\pi}{8}$$

3. Sachant que $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, déterminer $\sin\frac{\pi}{8}$ puis $\sin\frac{7\pi}{8}$, $\cos\frac{7\pi}{8}$, $\sin\frac{3\pi}{8}$ et $\cos\frac{3\pi}{8}$.

4. a) Donner les coordonnées cartésiennes

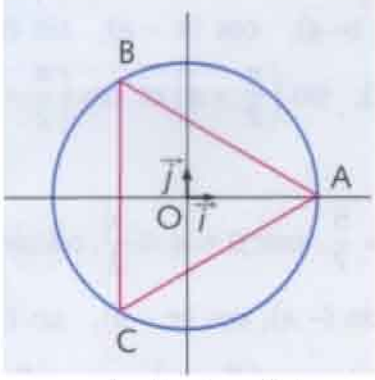
- du point A dont les coordonnées polaires sont $A\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$
- du point B dont les coordonnées polaires sont $B\left(7, 13\frac{\pi}{6}\right)$

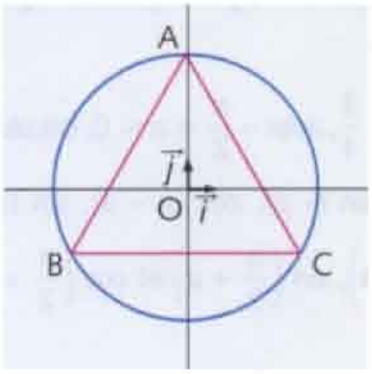
b) Le point N a (2, -2) comme coordonnées cartésiennes. Quelles sont ses coordonnées polaires ?

c) Placer les points A, B et N sur le cercle trigonométrique de la première question.

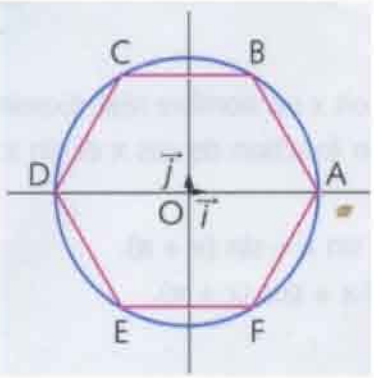
5. Déterminer les coordonnées cartésiennes et polaires des sommets des polygones réguliers suivants :

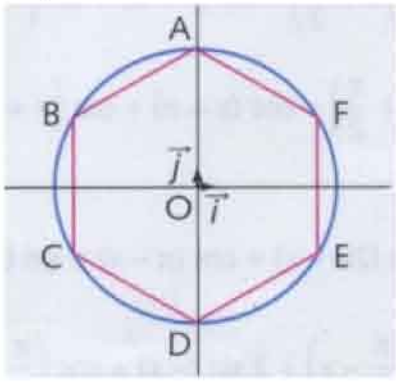
a) Triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon 4.





b) Hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 8.





LE TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

ax^2+bx+c $\quad a \neq 0$

I FORME CANONIQUE

$$f(x) = ax^2+bx+c = a\left[\underbrace{x^2+\frac{b}{a}x}+\frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

forme canonique

On appelle discriminant le terme :

$$\Delta = b^2-4ac$$

On a alors : $f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

II FACTORISATION

1er cas : $\Delta \geqslant 0$ alors $f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}\right]$

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$= a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(x-\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$$

LE TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

ax^2+bx+c $a \neq 0$

$\boxed{f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)}$ avec $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

2e cas : $\Delta < 0$

$-\Delta > 0$

$$f(x) = a\underbrace{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}_{\text{on a la somme de 2 carrés}}$$

f n'est pas factorisable.

III Résolution de l'équation $\boxed{ax^2+bx+c=0}$

$ax^2+bx+c=0$ si et seulement si

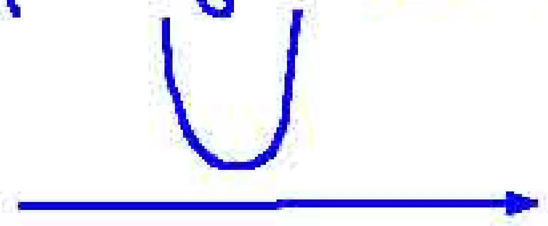
$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$ forme canonique

1er cas : $\Delta \geqslant 0$ $a(x-x_1)(x-x_2) = 0$ $S = \{x_1 ; x_2\}$

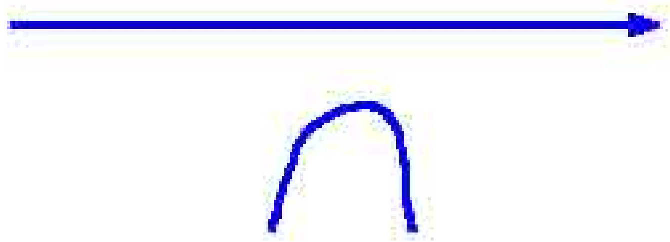
$(a \neq 0)$ $x - x_1 = 0$ ou $x - x2 = 0$

2e cas : $\Delta < 0$ f n'est pas factorisable :

$a > 0$



$a < 0$



LE TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

$ax^2 + bx + c$ $\quad a \neq 0$

IV Sens de Variation

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$$

la parabole qui représente f est la translatée de la parabole d'équation $y = ax^2$ par une translation de vecteur :

$$\boxed{-\frac{b}{2a}\vec{i} - \frac{\Delta}{4a^2}\vec{j}}$$

ex : $(x-4)^2+3$ $\quad 4\vec{i}+3\vec{j}$ $\quad \underset{4}{\cup}$

ex : $(x+7)^2-5$ $\quad -7\vec{i}-5\vec{j}$ $\quad \underset{-7}{\cup}$

$a>0$ $\quad \cup \; (x^2)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$-\frac{\Delta}{4a^2}$	↗	

$a<0$ $\quad \cap \; (-x^2)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↗	$-\frac{\Delta}{4a^2}$	↘	

LE TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

ax^2+bx+c $a \neq 0$

Exemple : sens de variation de $f(x) = \overset{a}{-2}x^2 \overset{b}{+7}x \overset{c}{-1}$

$a=-2$ $b=7$ $c=-1$

$f(x) = -2\left(\underbrace{x^2 - \frac{7}{2}x} + \frac{1}{2}\right)$

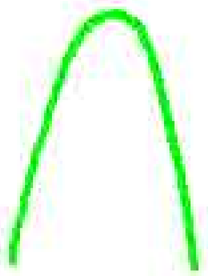
$= -2\left(\left(x-\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)$

$-\frac{49}{16} + \frac{1}{2} = -\frac{49}{16} + \frac{8}{16}$

$= -\frac{41}{16}$

$= -2\left(\left(x-\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{41}{16}\right)$ forme canonique.

$a<0$



x	$-\infty$		x_1		$\frac{7}{4}$		x_2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{41}{8}$	↘	0	↘	$-\infty$

$f\left(\frac{7}{4}\right) = -2 \times \left(-\frac{41}{16}\right)$

* Solutions de $f(x)=0$?

$-2\left(\left(x-\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{41}{16}\right) = 0$

$-2\left[\left(x-\frac{7}{4}-\sqrt{\frac{41}{16}}\right)\left(x-\frac{7}{4}+\sqrt{\frac{41}{16}}\right)\right] = 0$

$f(x)=0$ a 2 solutions :

$x_1 = \frac{-7-\sqrt{41}}{-4}$

$x_2 = \frac{-7+\sqrt{41}}{-4}$

LE TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

$ax^2 + bx + c$ $\quad a \neq 0$

Exemple : Calculer le discriminant de

$$f(x) = \boxed{5}x^2 + \boxed{3}x \boxed{-7}$$

$a = 5$
$b = 3$ $\quad c = -7$

et les racines de f.

Les racines d'un trinôme sont les solutions de l'équation $f(x)=0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-7)$$
$$= 9 + 140$$
$$= 149 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{149}}{10} \qquad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{149}}{10}$$

f se factorise et on a :

$$f(x) = 5\left(x - \frac{-3 - \sqrt{149}}{10}\right)\left(x - \frac{-3 + \sqrt{149}}{10}\right)$$

LE TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

ax^2+bx+c $a \neq 0$

V Signe du trinôme.

forme canonique : $f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

1) $\Delta < 0$: $f(x)$ est du signe de a.

2) $\Delta \geqslant 0$: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

$a > 0$ $f(x)$ est du signe de $\underbrace{(x-x_1)(x-x_2)}_{P}$

$x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

f est positif à l'extérieur des racines et <0 entre.

$a<0$ f est négatif à l'extérieur des racines et >0 entre.

Théorème : f est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines.

LE TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

$ax^2 + bx + c$ $\quad a \neq 0$

Exemples : 1) signe de $f(x) = -3x^2 - x - 1$

2) signe de $f(x) = -7x^2 + x + 1$

1) $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-3)\times(-1) = 1 - 12 = -11 < 0$

$\Delta < 0$ f est du signe de $a = -3$ donc < 0 sur $\mathbb{R}$.

2) $\Delta = 1^2 - 4(-7)\times 1 = 1 + 28 = 29 > 0$

$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{-14} = \dfrac{1+\sqrt{29}}{14}$ $\qquad x_2 = \dfrac{1-\sqrt{29}}{14}$

f est < 0 sur $\left]-\infty ; \dfrac{1-\sqrt{29}}{14}\right[\cup \left]\dfrac{1+\sqrt{29}}{14} ; +\infty\right[$

et $\geqslant 0$ sur $\left[\dfrac{1-\sqrt{29}}{14} ; \dfrac{1+\sqrt{29}}{14}\right]$.

Forme canonique $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3$

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\frac{3}{4}$	↗

$\mathcal{C}_f$ est la translatée de la parabole d'éq. $y = x^2$ par le vecteur $\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j}$

Pour tout x réel, on a :

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$ (avec égalité lorsque $x = \frac{3}{2}$)

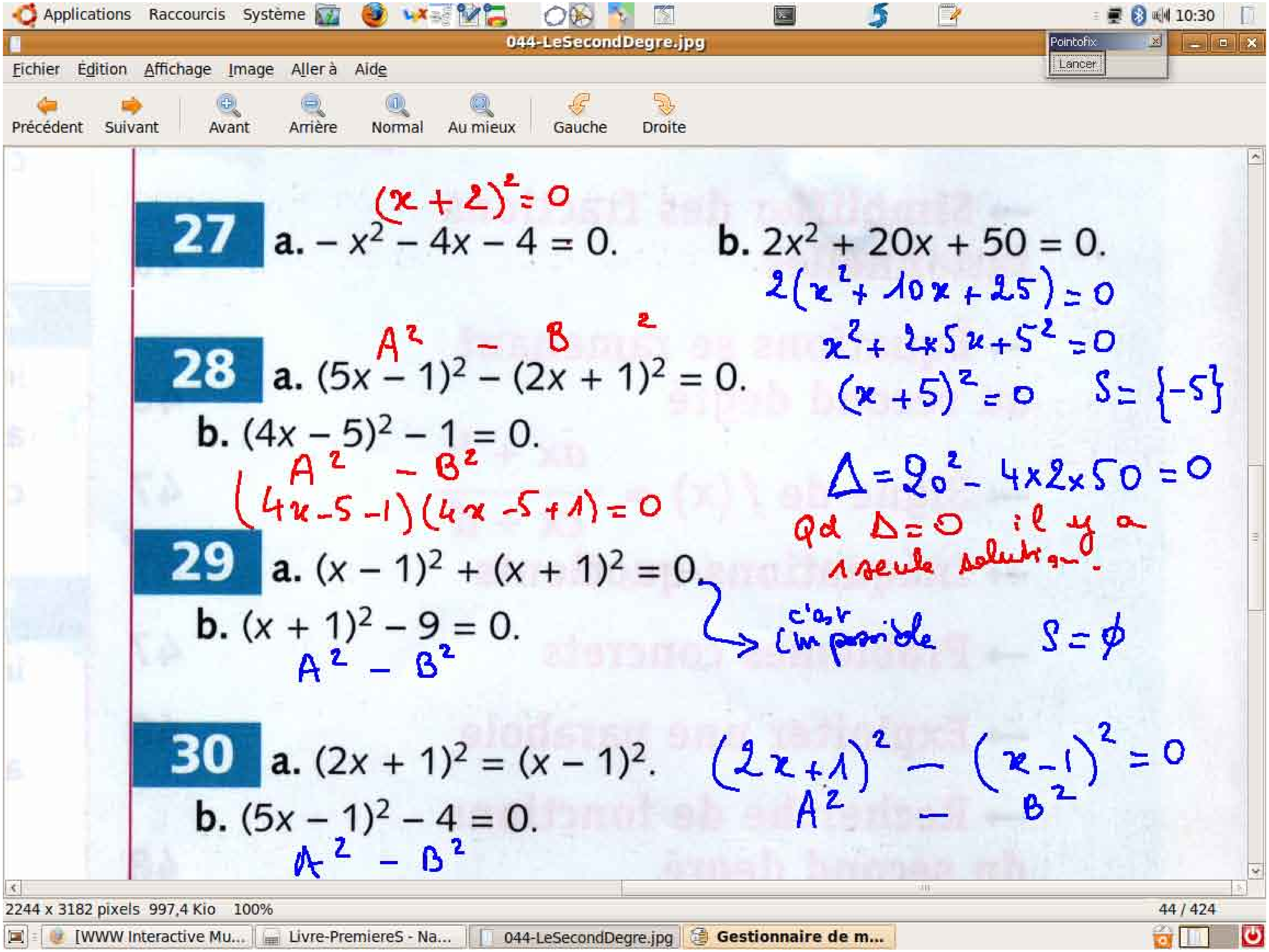
$f(x)$ $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4}$ (avec égalité lorsque $x = \frac{3}{2}$)

15 **a.** $f(x) = \underbrace{x^2 - 3x} + 3$.

On a donc :

Pour tout x réel, $f(x) \geqslant \frac{3}{4}$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$

☐ f admet un minimum $\frac{3}{4}$ sur $\mathbb{R}$. Il est atteint pour $x = \frac{3}{2}$.



27 a. $-x^2-4x-4=0$. b. $2x^2+20x+50=0$.

$(x+2)^2=0$

$2(x^2+10x+25)=0$

$x^2+2\times5x+5^2=0$

$(x+5)^2=0$ $S=\{-5\}$

$\Delta=20^2-4\times2\times50=0$

Qd $\Delta=0$ il y a 1 seule solution.

28 a. $(5x-1)^2-(2x+1)^2=0$.

$A^2 - B^2$

b. $(4x-5)^2-1=0$.

$A^2 - B^2$

$(4x-5-1)(4x-5+1)=0$

29 a. $(x-1)^2+(x+1)^2=0$.

$\rightarrow$ c'est impossible $S=\emptyset$

b. $(x+1)^2-9=0$.

$A^2 - B^2$

30 a. $(2x+1)^2=(x-1)^2$.

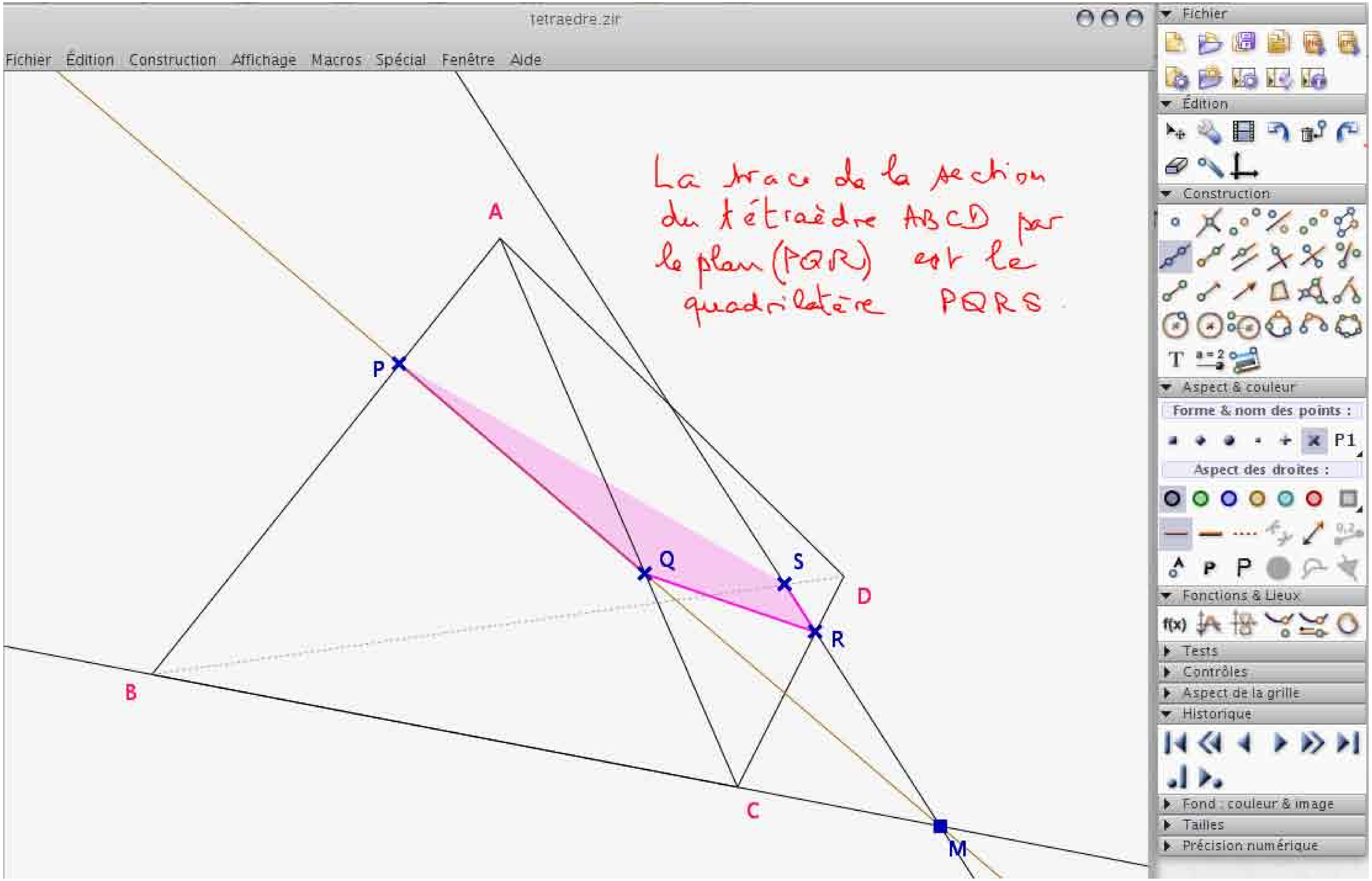
$(2x+1)^2-(x-1)^2=0$

$A^2 - B^2$

b. $(5x-1)^2-4=0$.

$A^2 - B^2$

20091002-Ex27-30page44



La trace de la section du tétraèdre ABCD par le plan (PQR) est le quadrilatère PQRS.

20091002-SectionDeTetraedre

ALGORITHME DE RÉSOLUTION D'une équation du second degré.

LE PROBLÈME

$\textcircled{a}x^2 + \textcircled{b}x + \textcircled{c} = 0$

les données : a, b, c

1ère étape — je calcule Δ

$\Delta = b^2 - 4ac$

2e étape — ? Quel est le signe de Δ ?

→ $\Delta < 0$ Afficher "Pas de solution"

→ $\Delta \geqslant 0$: on calcule

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Afficher x_1, x_2

Programme TI-82 stats

Prompt A
Prompt B
Prompt C
B^2 - 4*A*C $\overset{\text{STO}}{\boxed{\rightarrow}}$ D

Si IF condition D < 0 Alors Then

Disp "Pas de solution"

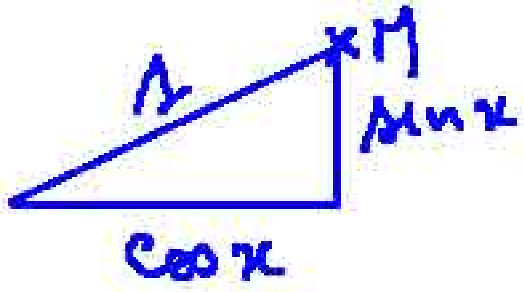
Sinon Else

(-B - √D) / (2*A) $\overset{\text{STO}}{\boxed{\rightarrow}}$ X1

(-B + √D) / (2*A) $\boxed{\rightarrow}$ X2

Disp X1
Disp X2
END

20091005-AlgorithmeSecondDegre



$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 1$$

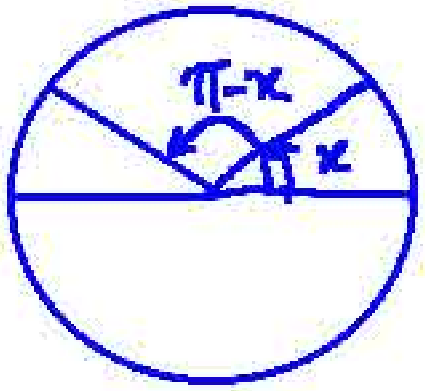
$$\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{8}$$

3. Sachant que $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, déterminer $\sin\frac{\pi}{8}$ puis $\sin\frac{7\pi}{8}$, $\cos\frac{7\pi}{8}$, $\sin\frac{3\pi}{8}$ et $\cos\frac{3\pi}{8}$.

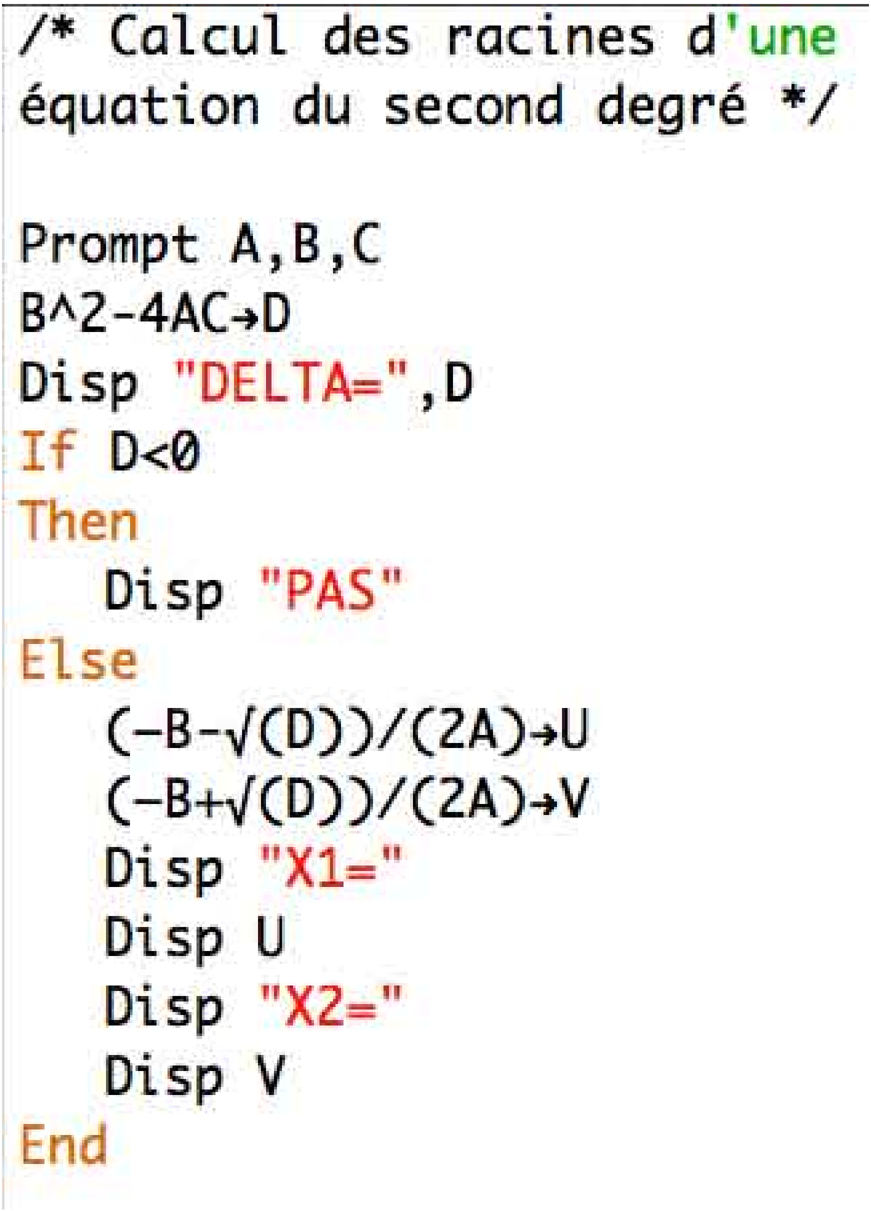
$$\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}{2^2} = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{4}{4} - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\pi}{8} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \text{ donc } \sin\frac{\pi}{8} > 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

- ● $\sin\frac{7\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$



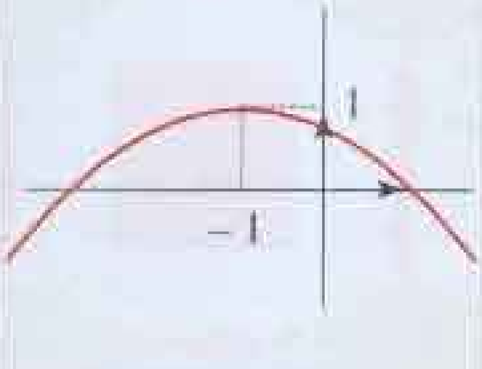
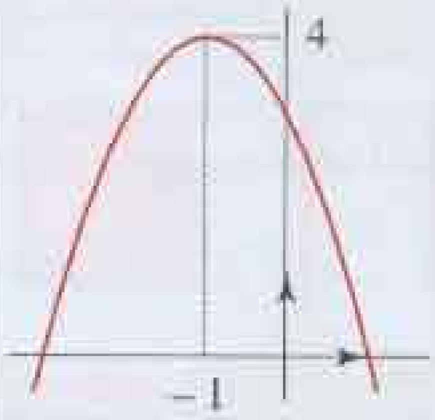
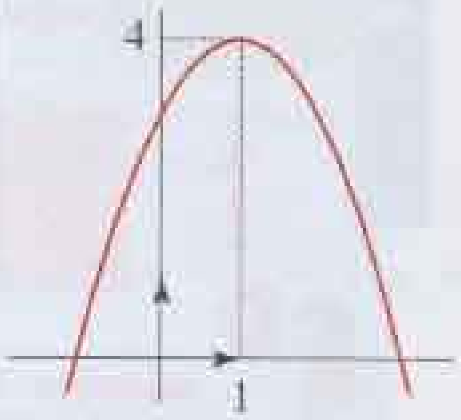
- ● $\cos\frac{7\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
- ● $\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{4\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
- ● $\cos\frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{4\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

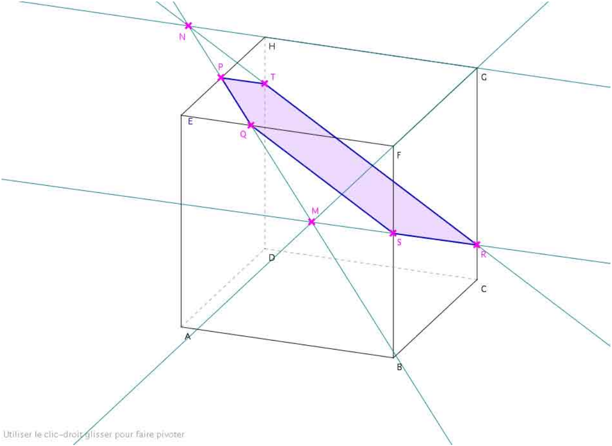


```
/* Calcul des racines d'une
équation du second degré */

Prompt A,B,C
B^2-4AC→D
Disp "DELTA=",D
If D<0
Then
   Disp "PAS"
Else
   (-B-√(D))/(2A)→U
   (-B+√(D))/(2A)→V
   Disp "X1="
   Disp U
   Disp "X2="
   Disp V
End
```

20091005-ProgrammeTI82-RacinesDuneEquationDuSecondDegre

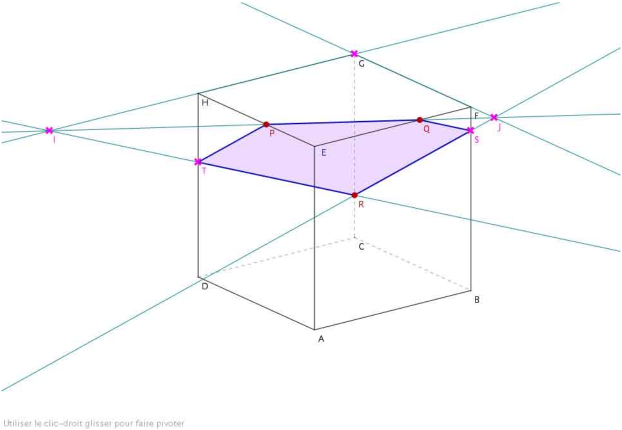
A, B, C proposent trois réponses possibles à la question posée : choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).

		A	B	C
1	Quelles sont les équations du second degré ?	$2x(x-1)-2x^2+4=0$	$2x(x-1)+4x^2+5=0$	$(x-1)(x+2)=5+x^2$
2	$x^2+(1+\sqrt{3})x$ $=2x^2-2x+2\sqrt{3}$ s'écrit $ax^2+bx+c=0$, avec…	$a=-1$ $b=3+\sqrt{3}$ $c=-2\sqrt{3}$	$a=1$ $b=1+\sqrt{3}$ $c=0$	$a=1$ $b=-3-\sqrt{3}$ $c=\sqrt{3}$
3	$4x^2-5x+1=0$…	a pour solutions -1 et $-\frac{1}{4}$	a pour solutions 1 et $\frac{1}{4}$	n'a pas de solution
4	Combien l'équation $912x^2+172x-159=0$ a de solutions ?	Elle n'a pas de solution	Elle a deux solutions distinctes	Je ne peux pas répondre sans la calculatrice
5	Parmi les équations suivantes, lesquelles ont pour solutions 2 et 5 ?	$-2x^2+14x-20=0$	$x^2-7x+12=0$	$x^2-7x+10=0$
6	Lesquels de ces trinômes sont positifs pour tout x ?	$4x^2-5x+1$	$4x^2+5x+1$	$4x^2+5x+3$
7	Quelle factorisation pour $20x^2+40x-60$?	$20(x-1)(x+3)$	$(x-1)(x+3)$	$-20(1-x)(3+x)$
8	Quelle est la représentation graphique de $x\mapsto -x^2-2x+3$?			
9	1 et − 1 sont les racines…	d'une seule équation du second degré	de deux équations du second degré	d'une infinité d'équations du second degré
10	$\frac{x^2-4x+3}{x-1}=0$ a pour ensemble de solution…	$\{1\,;3\}$	$\{1\}$	$\{3\}$



Utiliser le clic-droit glisser pour faire pivoter

20091006-SectionDeCube

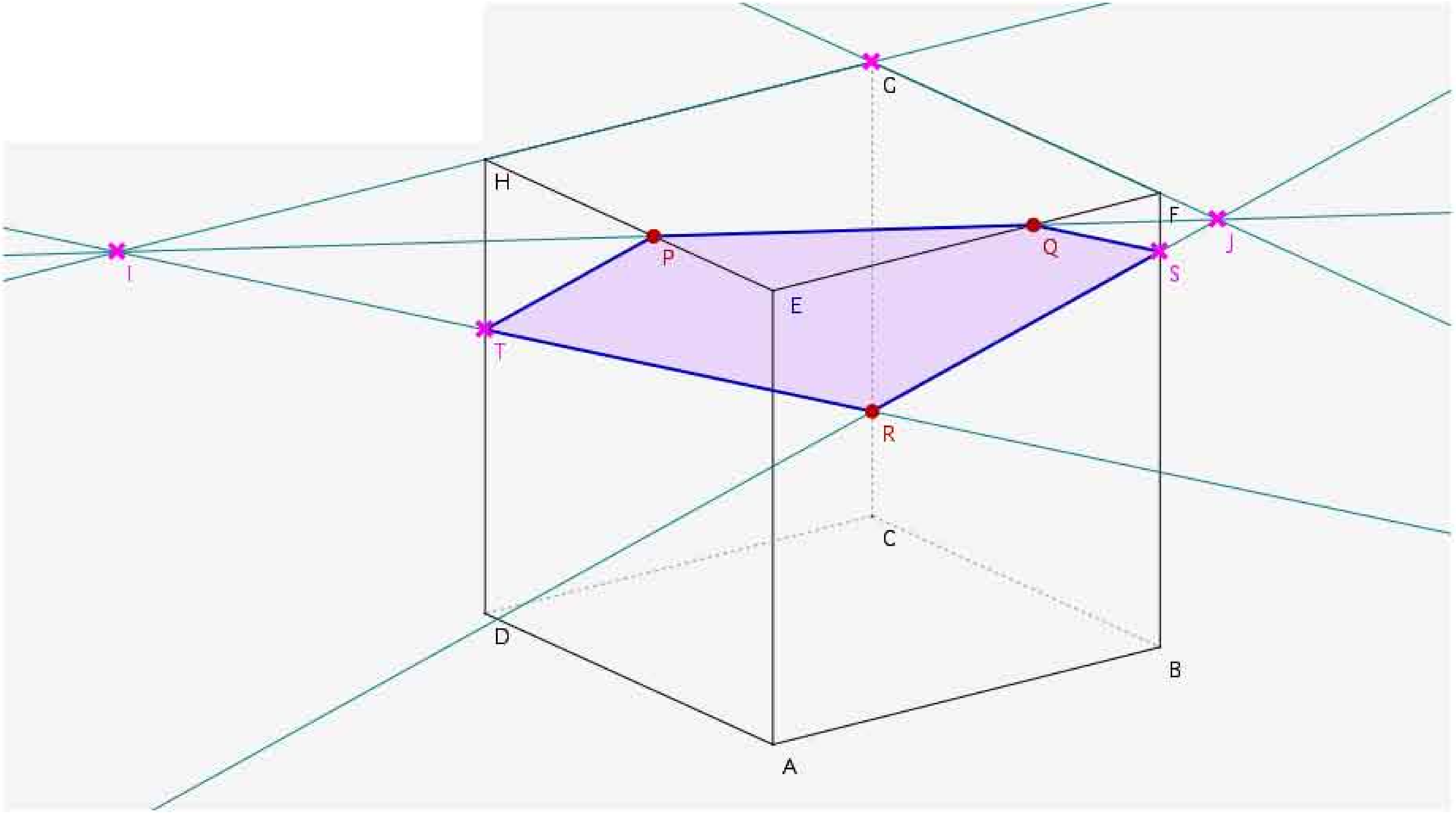


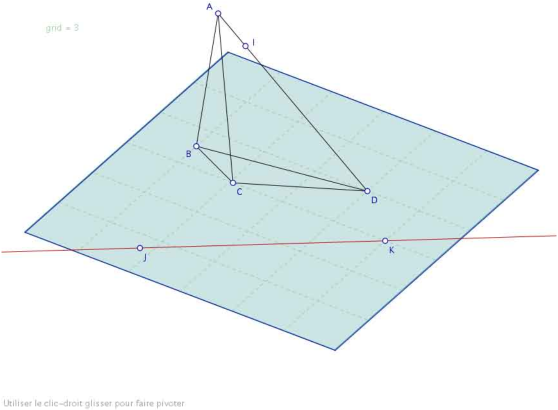
Utiliser le clic-droit glisser pour faire pivoter

20091006-SectionDeCube3

Dessiner la section du cube ABCDEFGH par le plan PQR.

La section est le pentagone PQSRT.





grid = 3

Utiliser le clic-droit glisser pour faire pivoter

20091006-SectionDeTetraedre2

101) $f(x) = a(x-1)(x-3)$

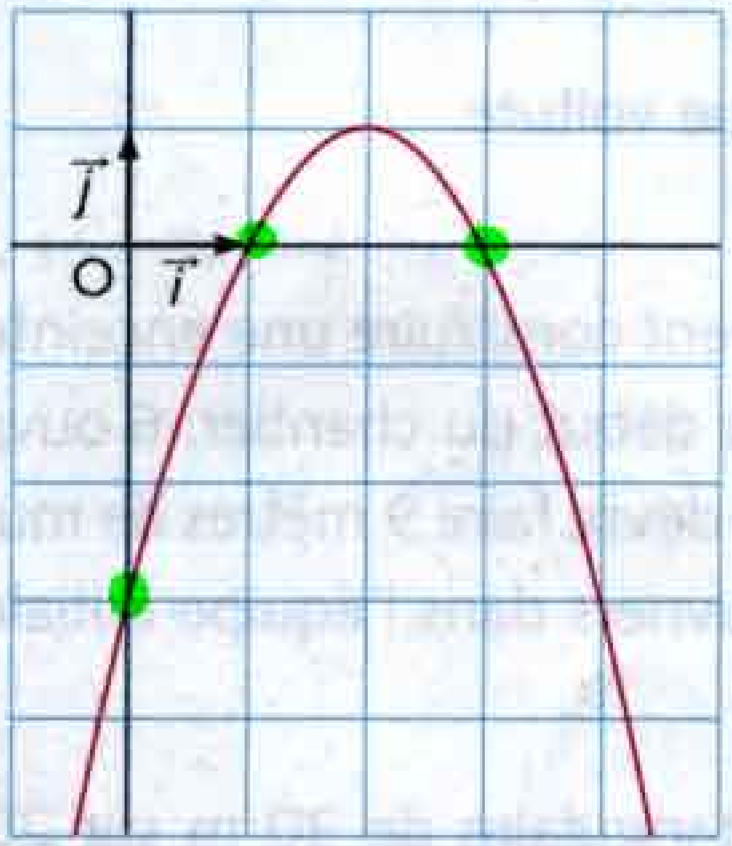
$f(0) = -3 = a(0-1)(0-3)$

donc $3a = -3$ d'où $a = -1$

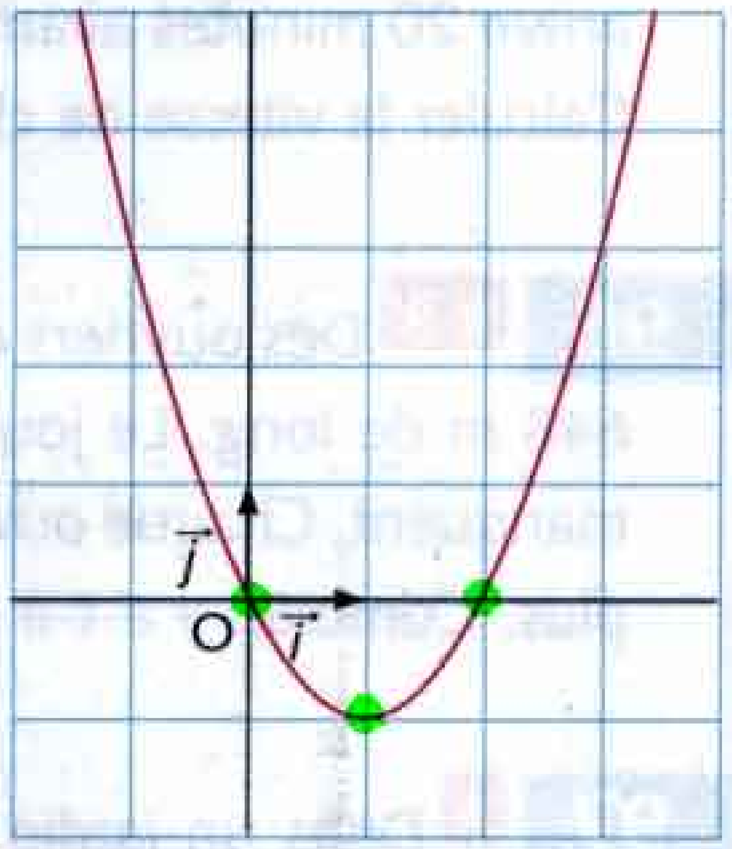
$f(x) = -(x-1)(x-3)$

$\boxed{f(x) = -x^2 + 4x - 3}$

101



102



102) $f(x) = a(x-0)(x-2)$

$= ax(x-2)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -1 \\ f(1) = a\times(1)(1-2) \\ \quad = a(-1) \\ \quad = -a \end{array}\right\} \begin{array}{l} -a = -1 \\ a = 1 \end{array}$$

$f(x) = x(x-2)$

$\boxed{f(x) = x^2 - 2x}$

103 On considère les fonctions f et g définies respectivement par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $g(x) = -x^2 + 4x + 5$.

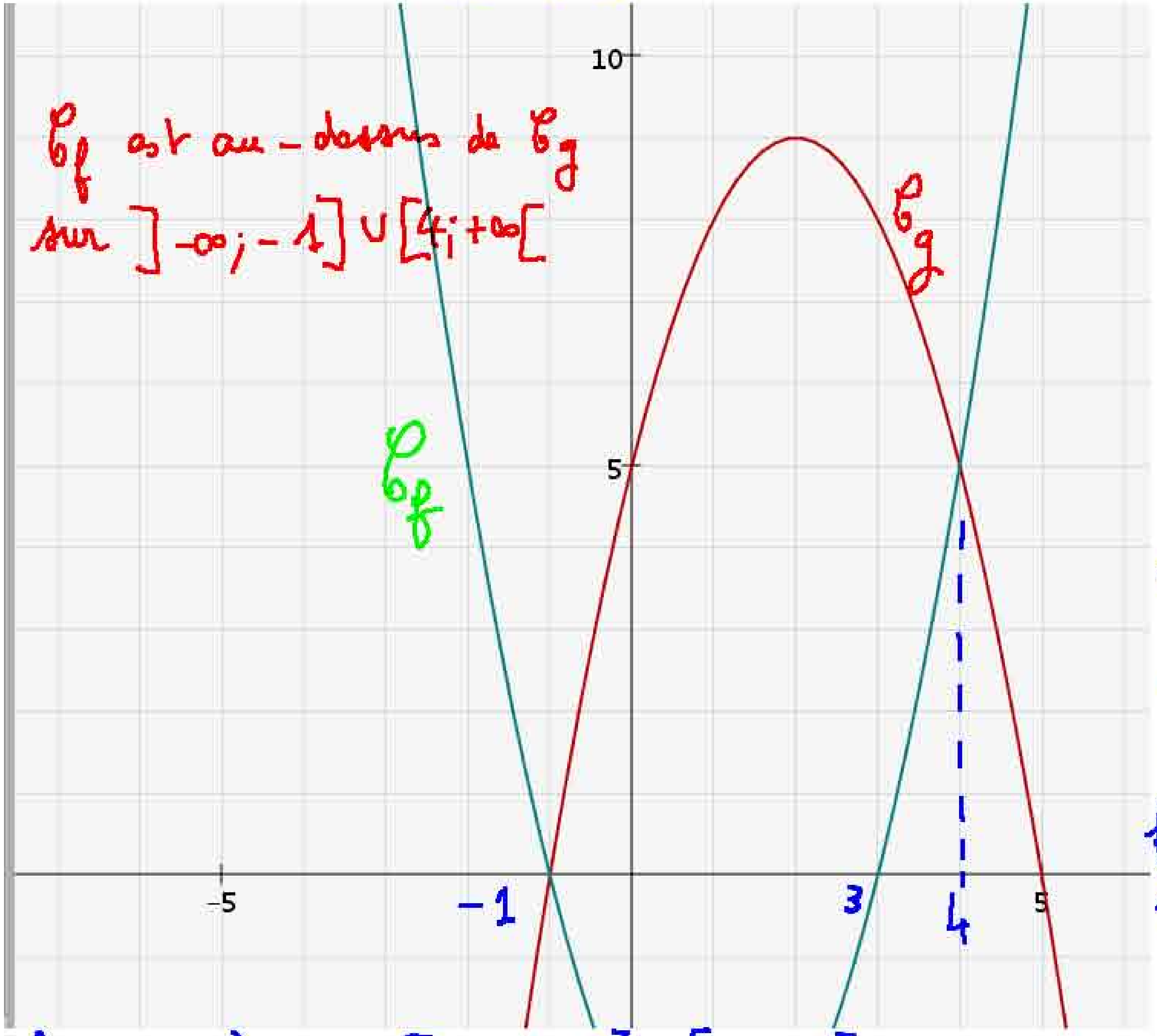
a. Faire afficher, sur une calculatrice, la représentation graphique des fonctions f et g dans le même repère orthonormal.

20091009-Ex101-102page48

$g(x) \geqslant f(x)$ sur $[-1;4]$

$f(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty;-1] \cup [3;+\infty[$

$g(x) \geqslant 0$ sur $[-1;5]$



$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty;-1] \cup [4;+\infty[$

$f(x) \geqslant g(x)$ sur $]-\infty;-1] \cup [4;+\infty[$

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

$g(x) = -x^2 + 4x + 5$

$\Delta_f = 16 = 4^2$ $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

$\Delta_g = 36 = 6^2$ $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

- Pour f :

$a = 1 \geqslant 0$ donc f est $\geqslant 0$ à l'extérieur des racines.

- Pour g

$a \leqslant 0$ donc g est $\geqslant 0$ entre les racines.

$f(x) \geqslant g(x)$ éq. à :

$f(x) - g(x) \geqslant 0$

$2x^2 - 6x - 8 \geqslant 0$

$x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$

$\Delta = 25$ $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$

$a = 1 > 0$

72) $\Delta = 73$ $\quad x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{73}}{2 \times 3}$ $\quad x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{73}}{2 \times 3}$

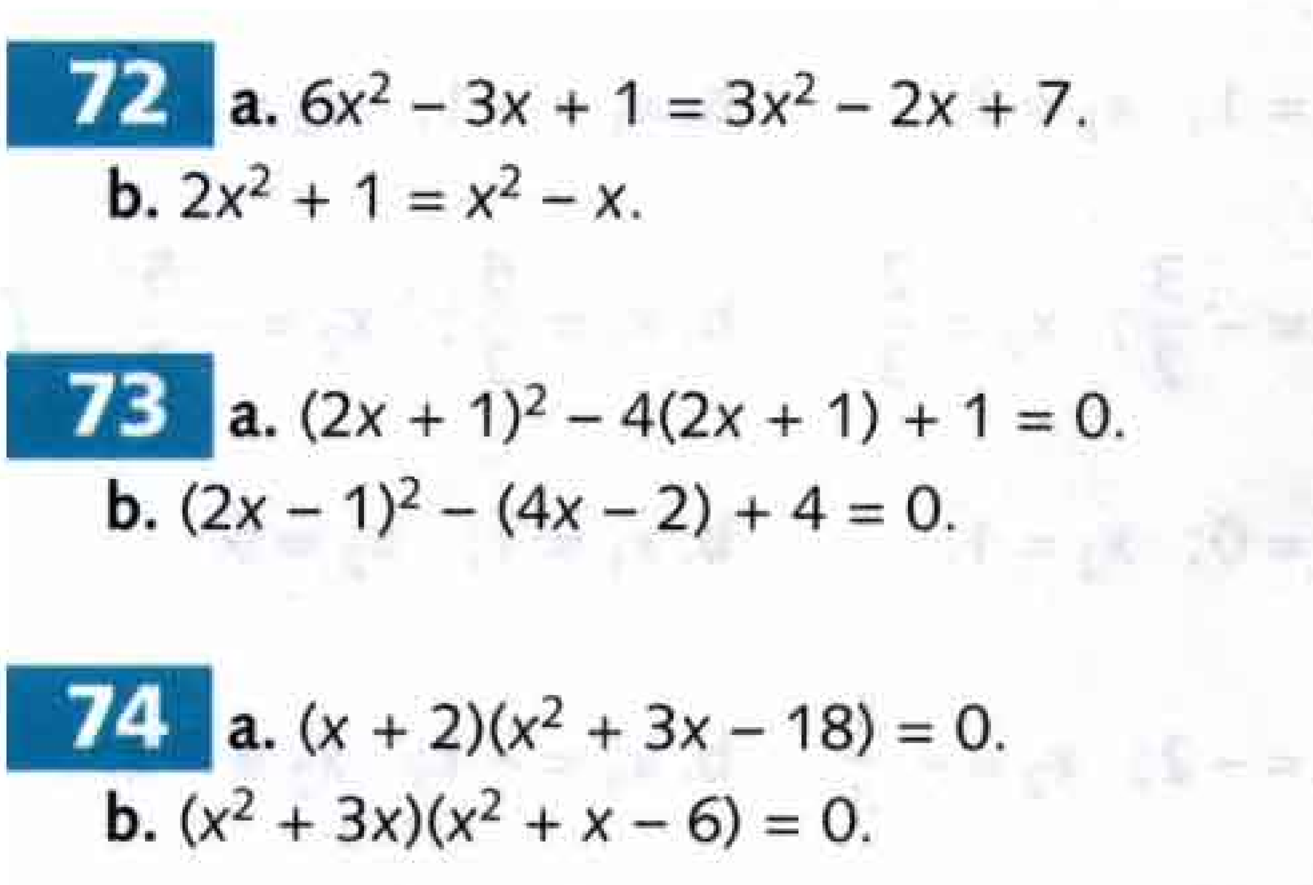
$S = \left\{ \dfrac{1-\sqrt{73}}{6} ; \dfrac{1+\sqrt{73}}{6} \right\}$

46) $f(x) = 5x^2 - 3x - 2$

$\Delta = 49 = 7^2$ $\quad x_1 = -\dfrac{2}{5}$ $\quad x_2 = 1$

$f(x) = 5\left(x - \left(-\frac{2}{5}\right)\right)(x - 1)$ $\qquad f(x) = 5\left(x + \frac{2}{5}\right)(x - 1)$

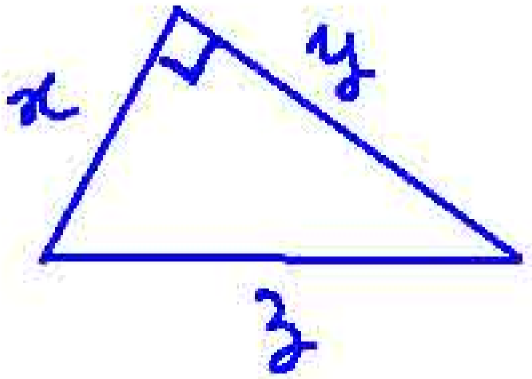
$$\boxed{f(x) = (5x + 2)(x - 1)}$$



72 **a.** $6x^2 - 3x + 1 = 3x^2 - 2x + 7$.
b. $2x^2 + 1 = x^2 - x$.

73 **a.** $(2x + 1)^2 - 4(2x + 1) + 1 = 0$.
b. $(2x - 1)^2 - (4x - 2) + 4 = 0$.

74 **a.** $(x + 2)(x^2 + 3x - 18) = 0$.
b. $(x^2 + 3x)(x^2 + x - 6) = 0$.



$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ \underbrace{x^2+y^2}_{z^2}+z^2=338 \end{cases}$$

car le triangle est rectangle.

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ 2z^2=338 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=30 \\ z^2=169 \end{cases}$$

$z \geqslant 0$ $\quad z=13$

$$\begin{cases} x+y=30-13 \\ x^2+y^2=169 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=17 & L_1 \\ x^2+y^2=169 & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=17-x & L_1 \\ x^2+(17-x)^2=169 & L_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=17-x & L_2 \\ 2x^2-34x+120=0 & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=17-x & L_1 \\ x^2-17x+60=0 & L_2 \end{cases}$$

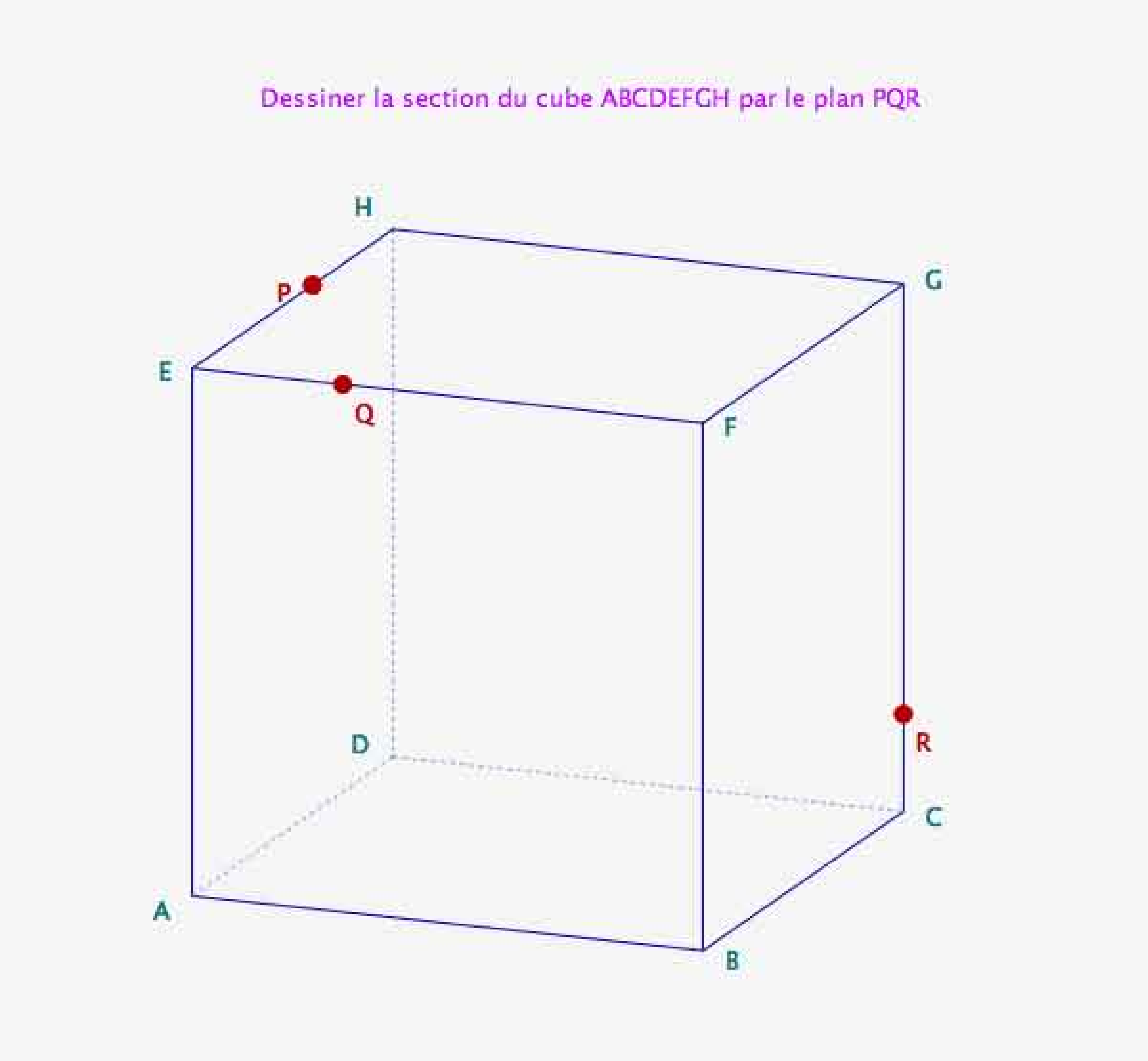
89 La somme des longueurs des côtés d'un triangle rectangle vaut 30 cm. La somme des carrés des longueurs des côtés vaut 338 cm².
Quelles sont les longueurs des trois côtés ?

$\Delta=49 \qquad x_1=5$
$x_2=12$

$x_1=5\text{cm} \qquad y_1=17-5=12\text{cm}$
$z=13$

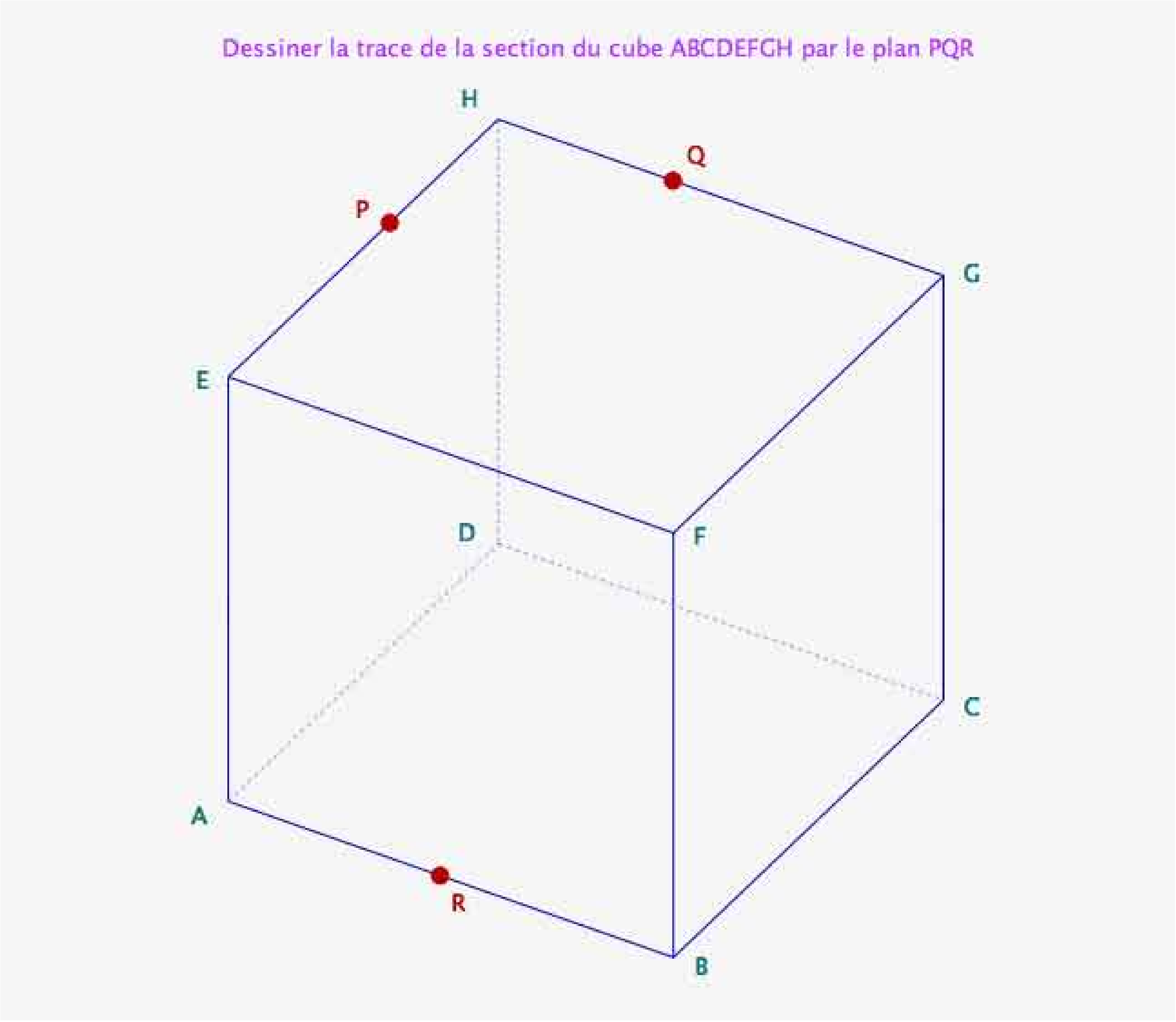
$x_2=12\text{cm} \qquad y_2=17-12=5\text{cm}$
13

$$\boxed{(x,y,z)=(5,12,13)}$$



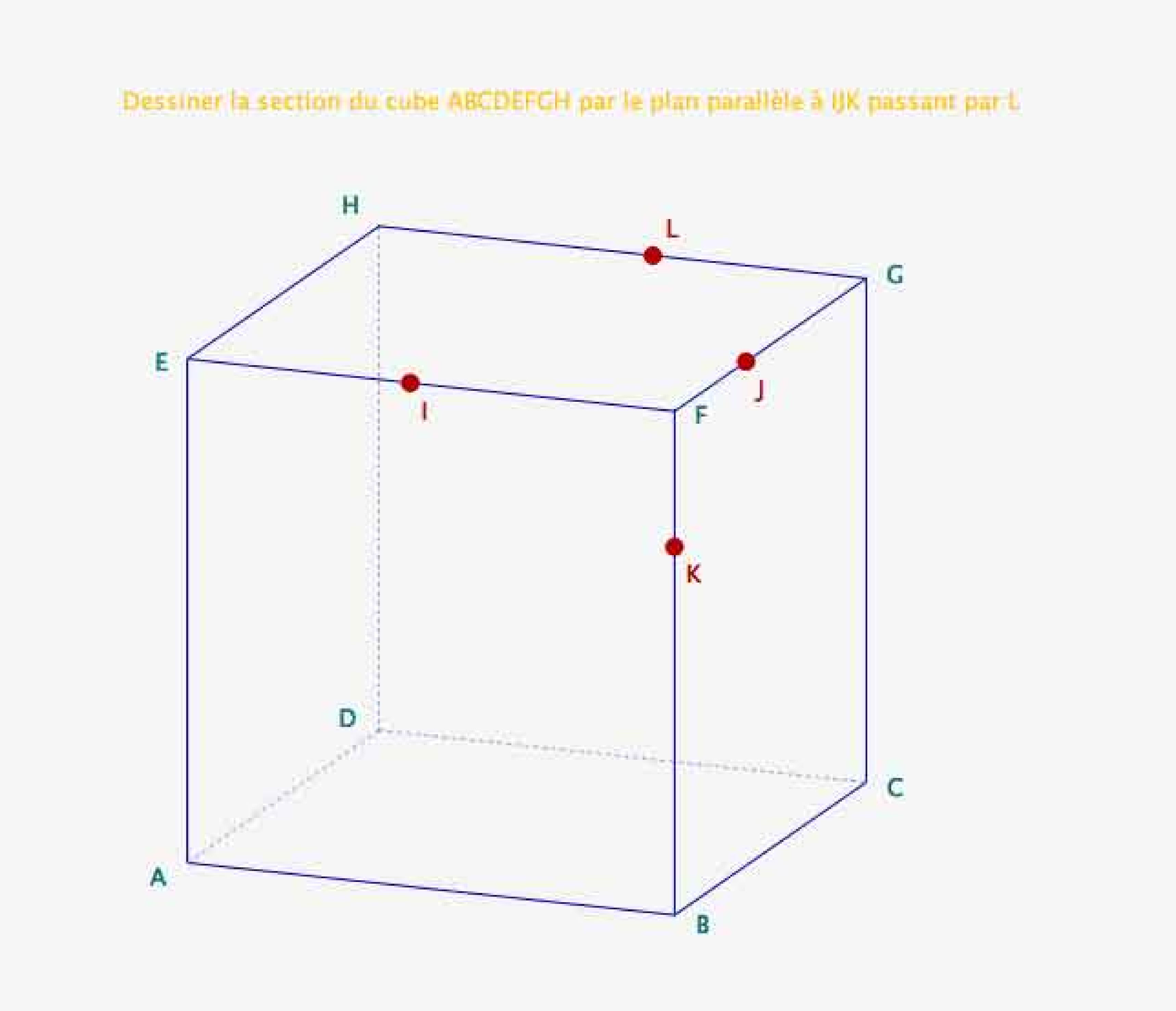
Dessiner la section du cube ABCDEFGH par le plan PQR

20091012-SectionCube1Enonce



Dessiner la trace de la section du cube ABCDEFGH par le plan PQR

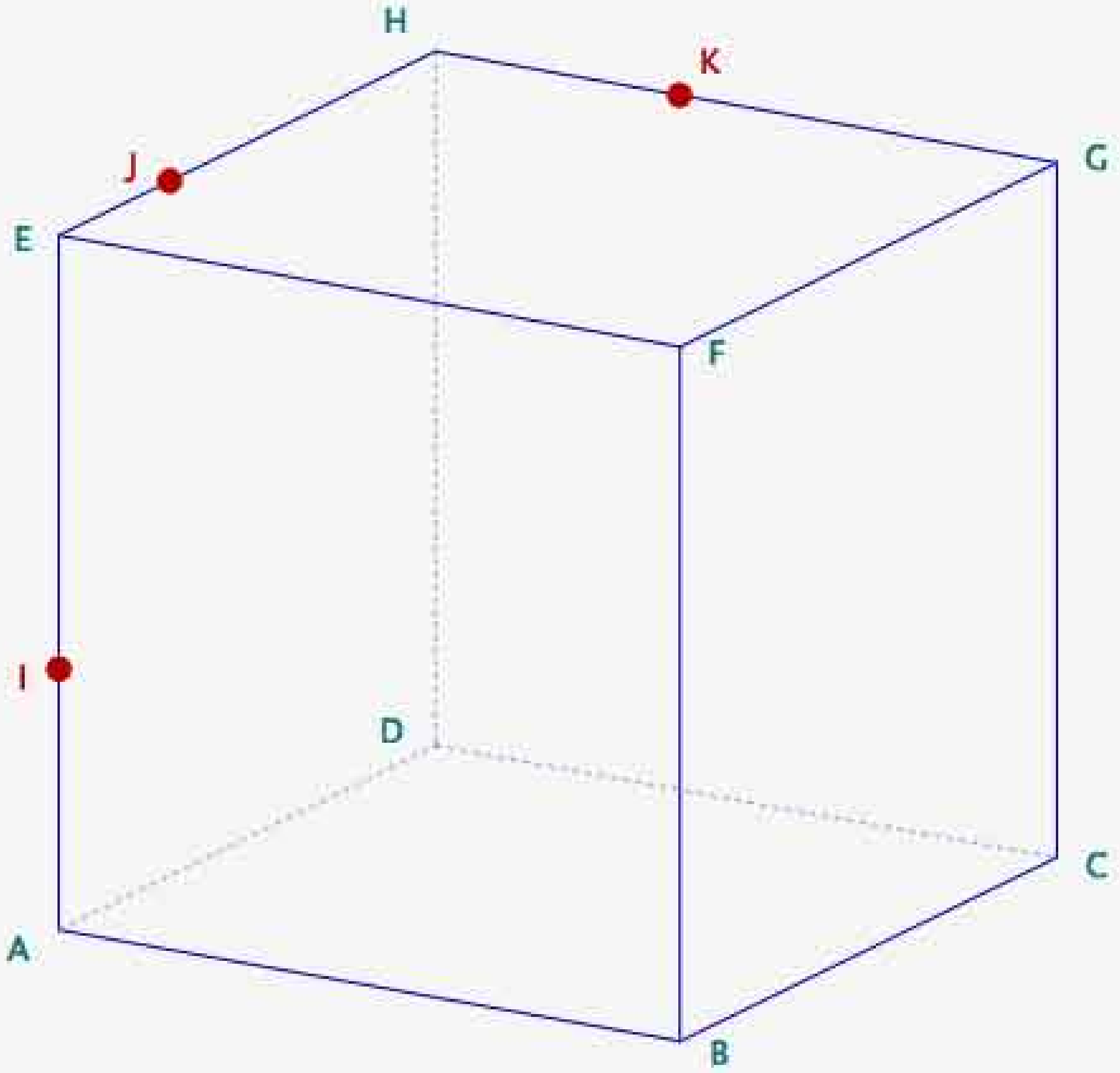
20091012-SectionCube2Enonce



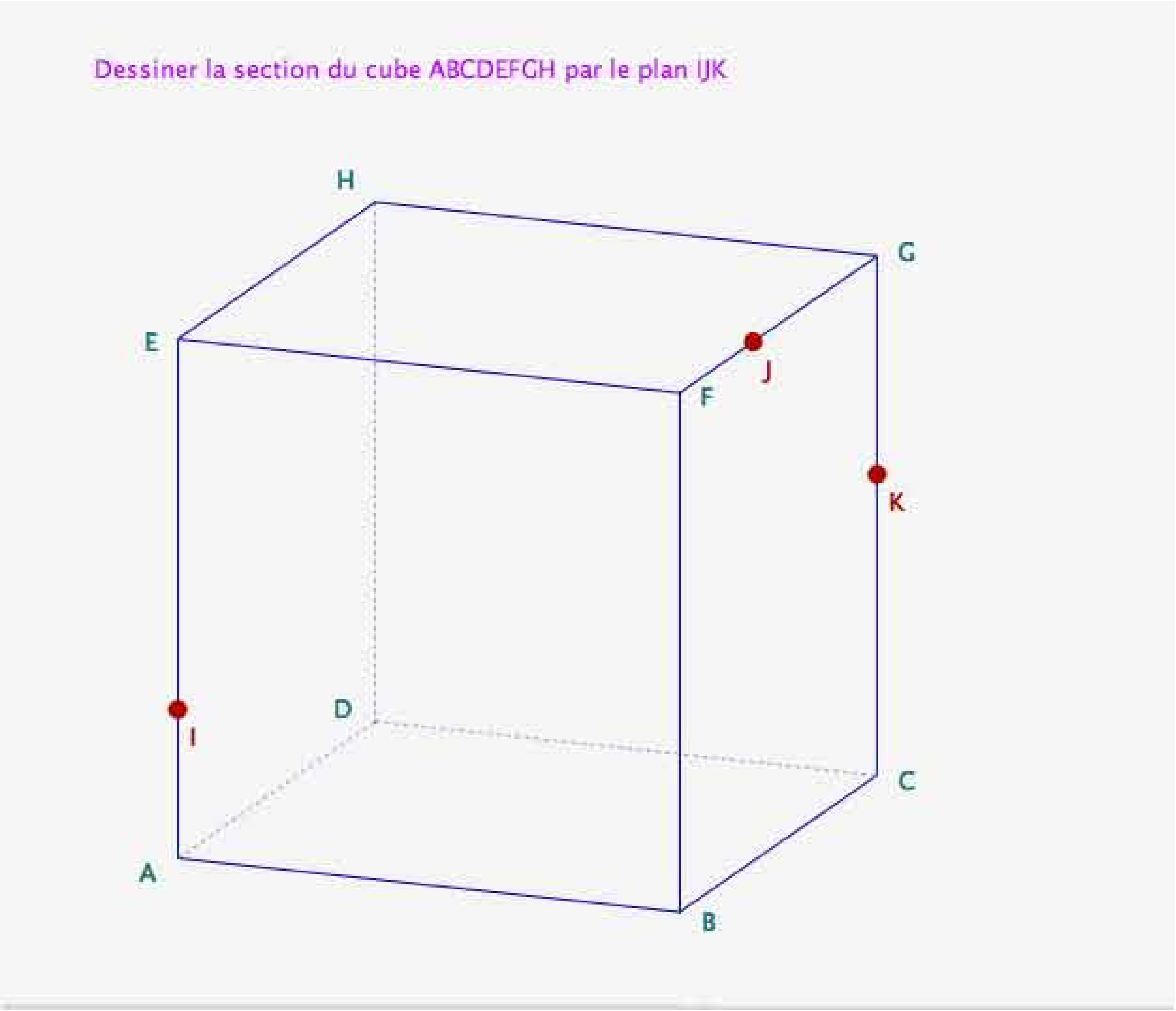
Dessiner la section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle à IJK passant par L

20091012-SectionCube3Enonce

Dessiner la trace de la section du cube ABCDEFGH par le plan IJK

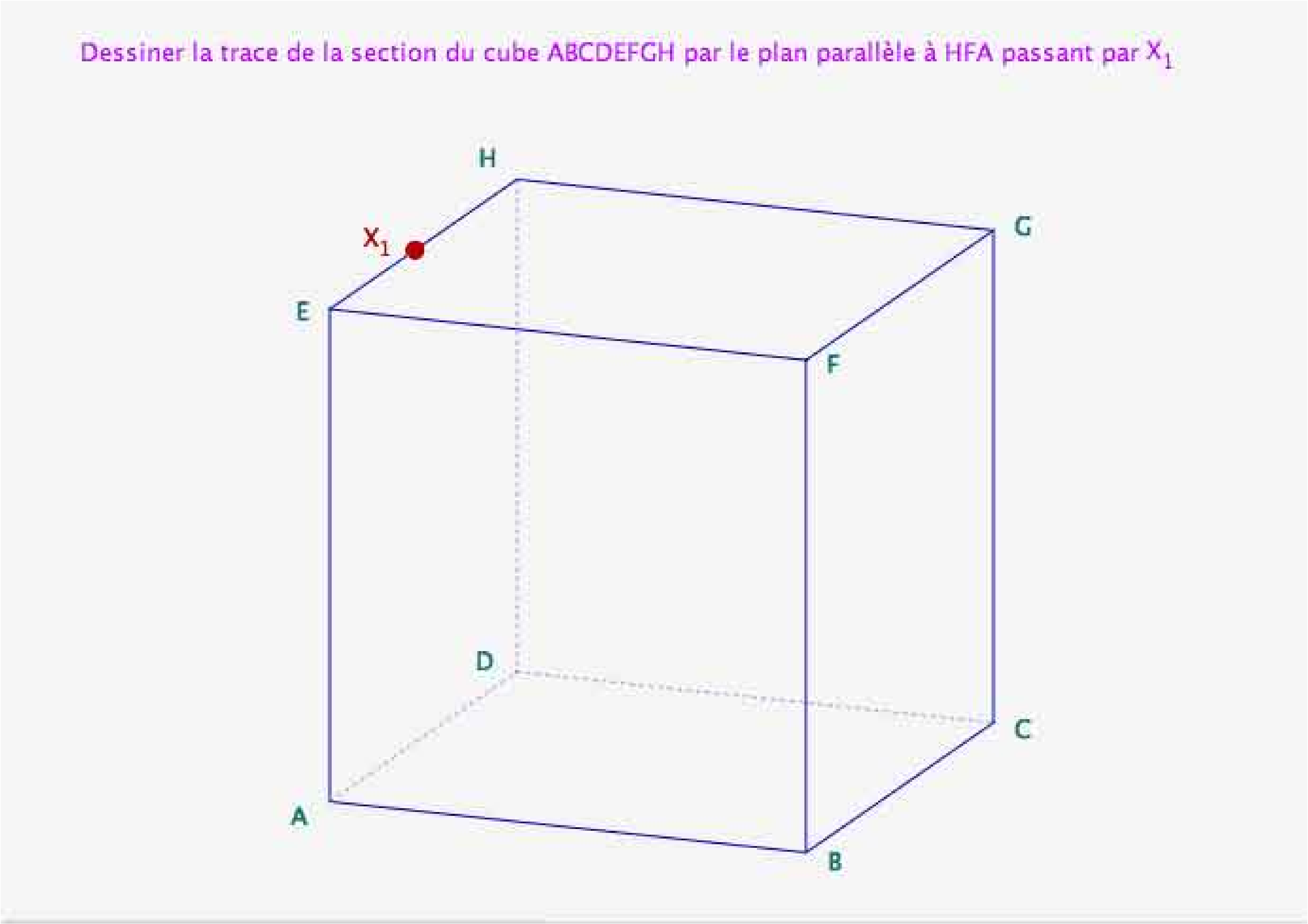


20091012-SectionCube4Enonce



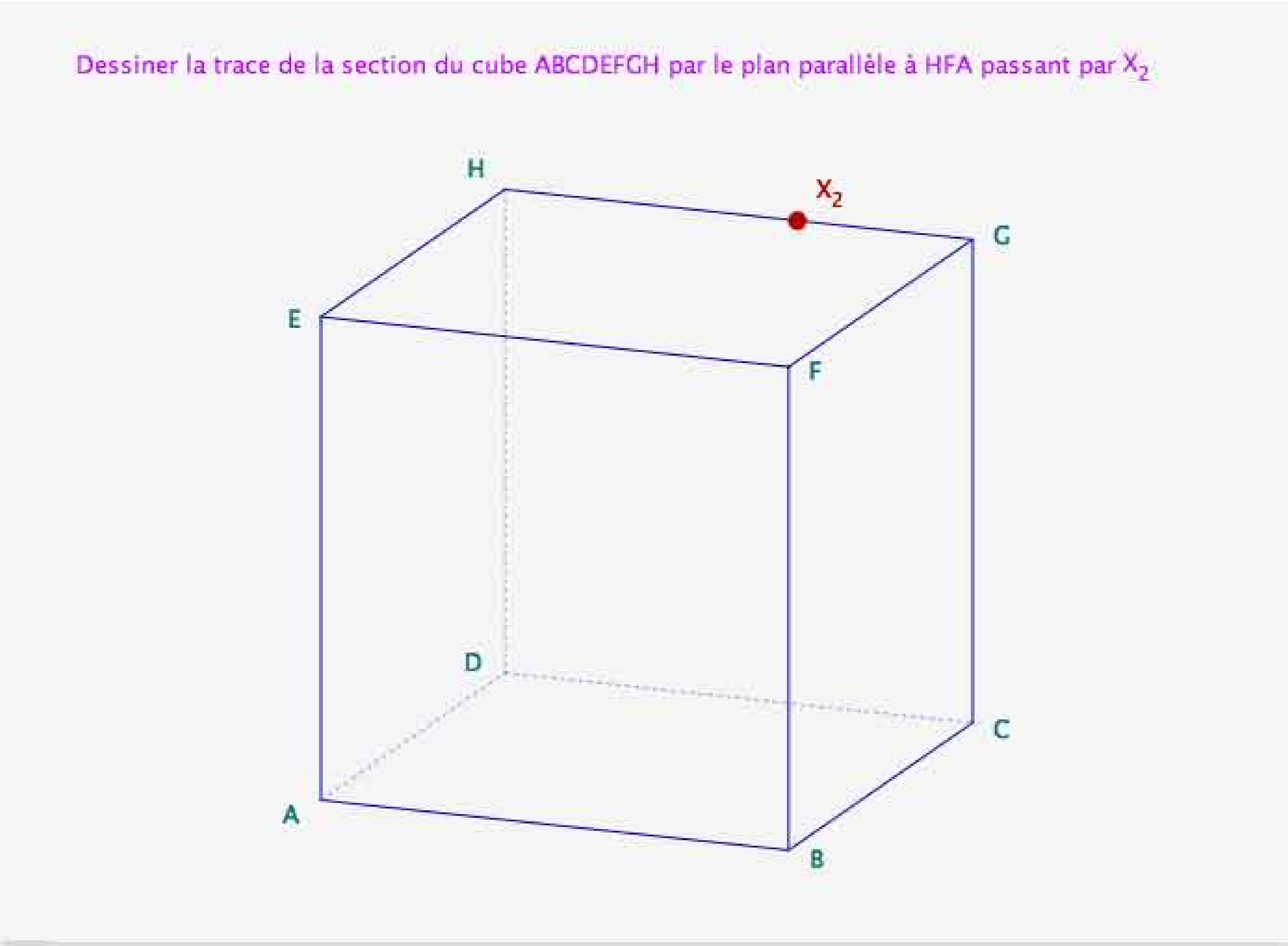
Dessiner la section du cube ABCDEFGH par le plan IJK

20091012-SectionCube5Enonce



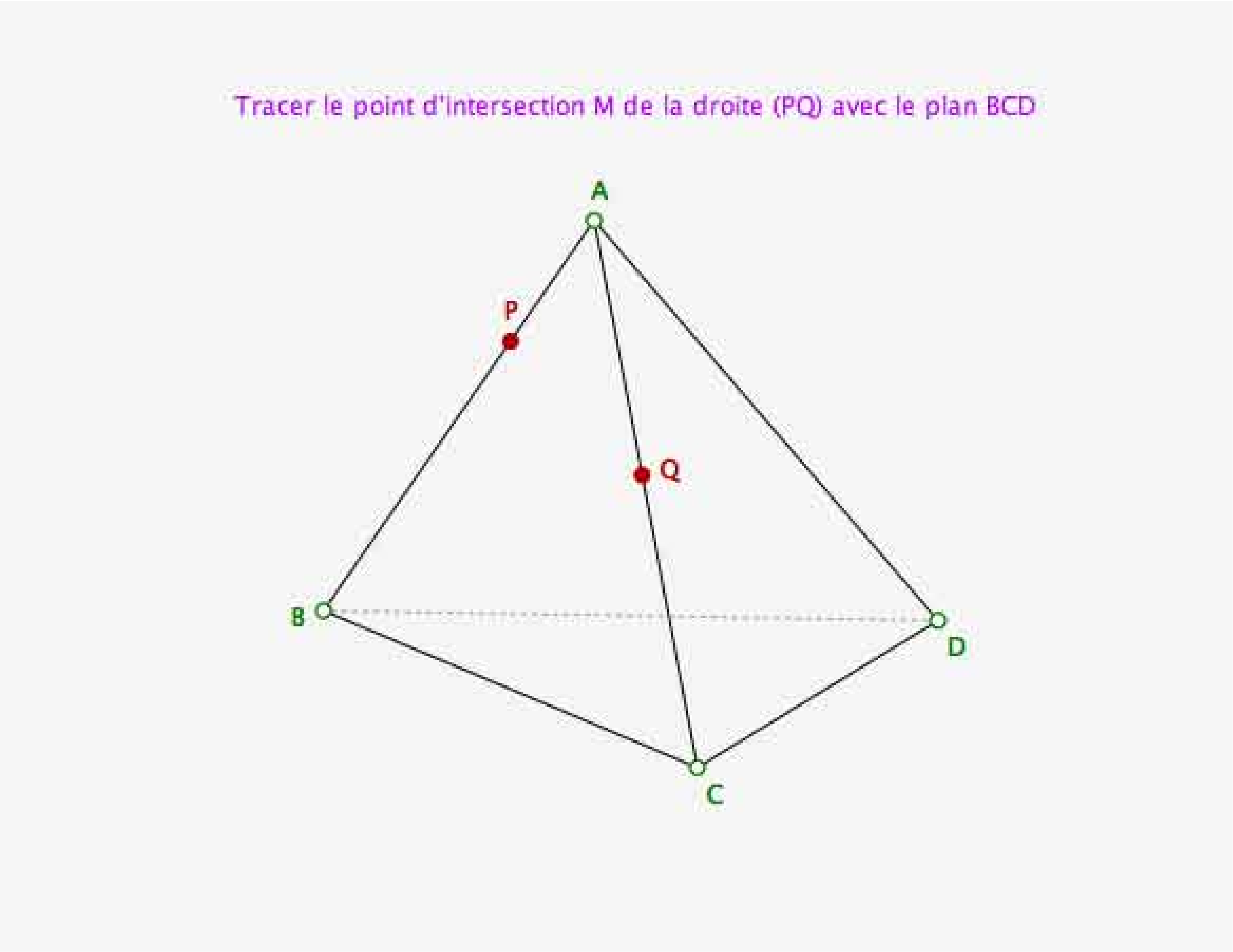
Dessiner la trace de la section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle à HFA passant par X_1

20091012-SectionCube6Enonce



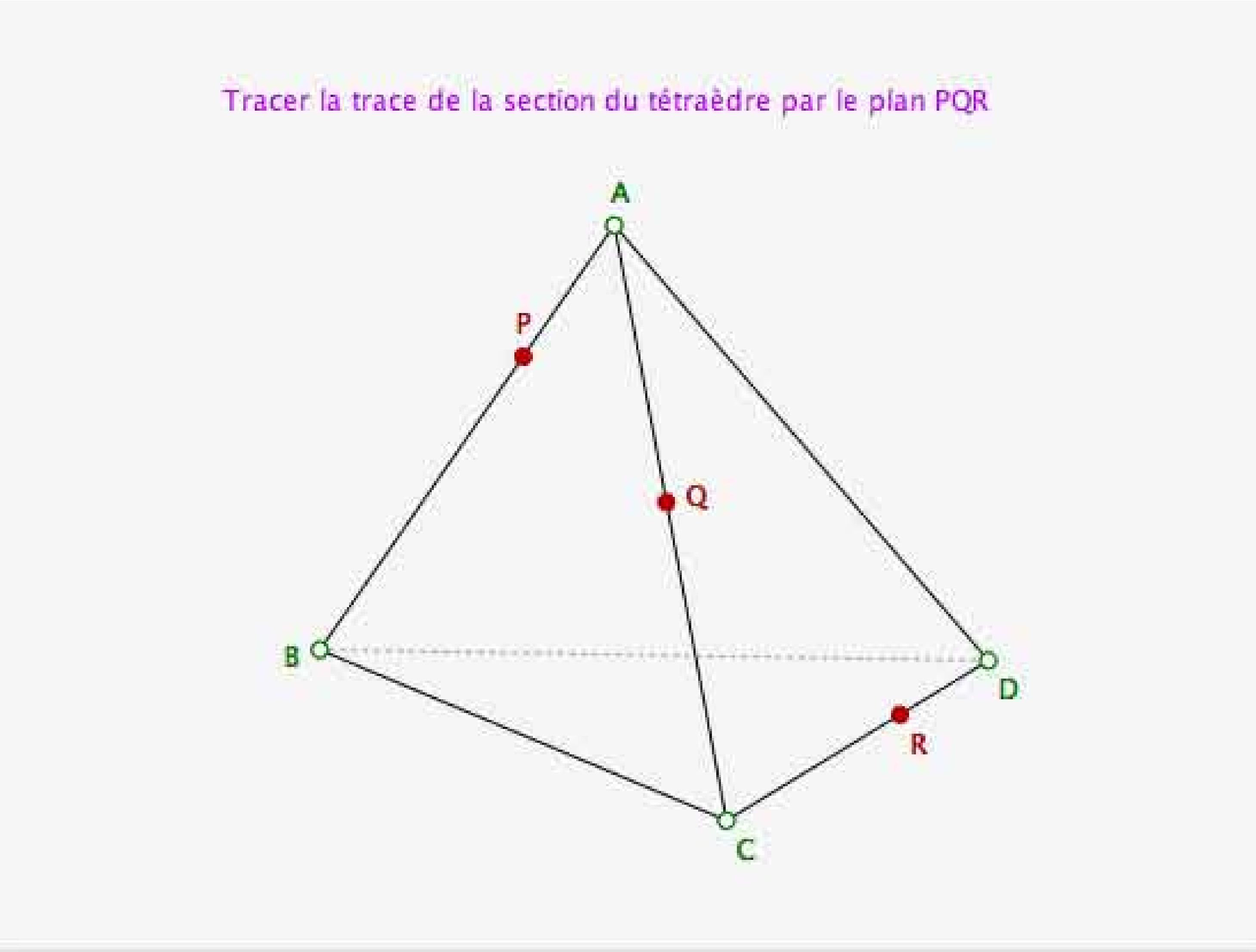
Dessiner la trace de la section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle à HFA passant par X_2

20091012-SectionCube7Enonce



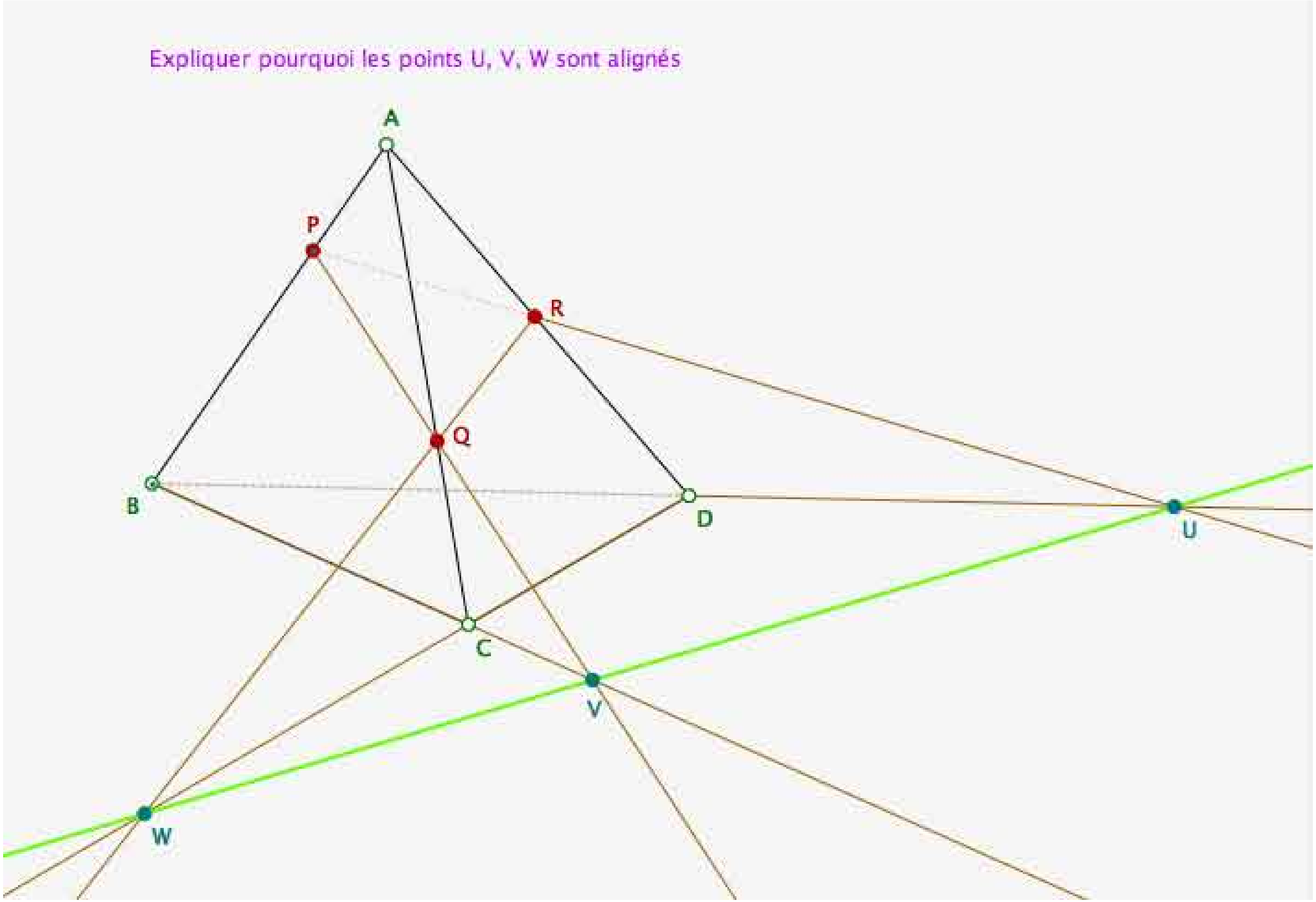
Tracer le point d'intersection M de la droite (PQ) avec le plan BCD

20091012-SectionTetraedre1Enonce



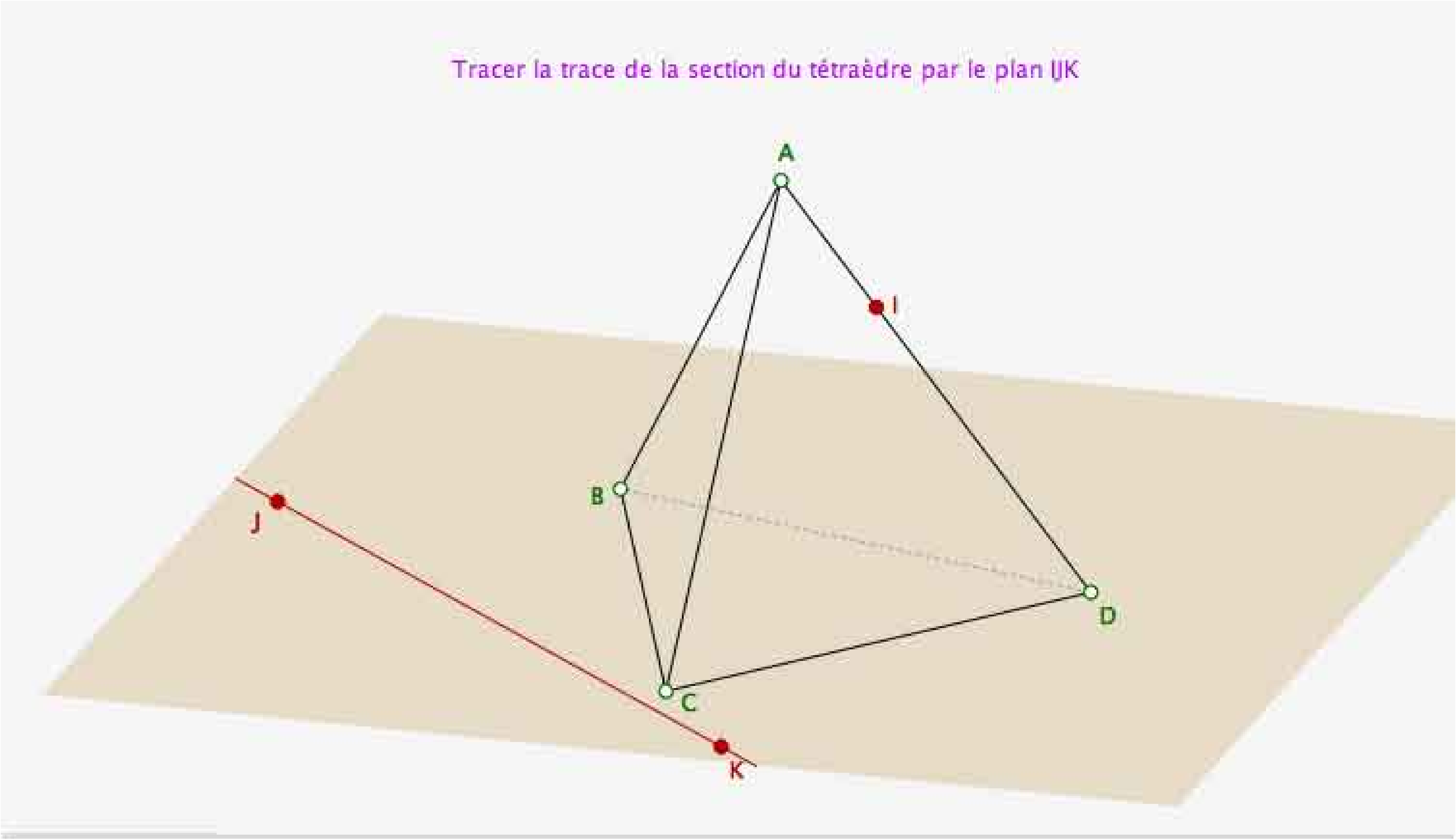
Tracer la trace de la section du tétraèdre par le plan PQR

20091012-SectionTetraedre2Enonce



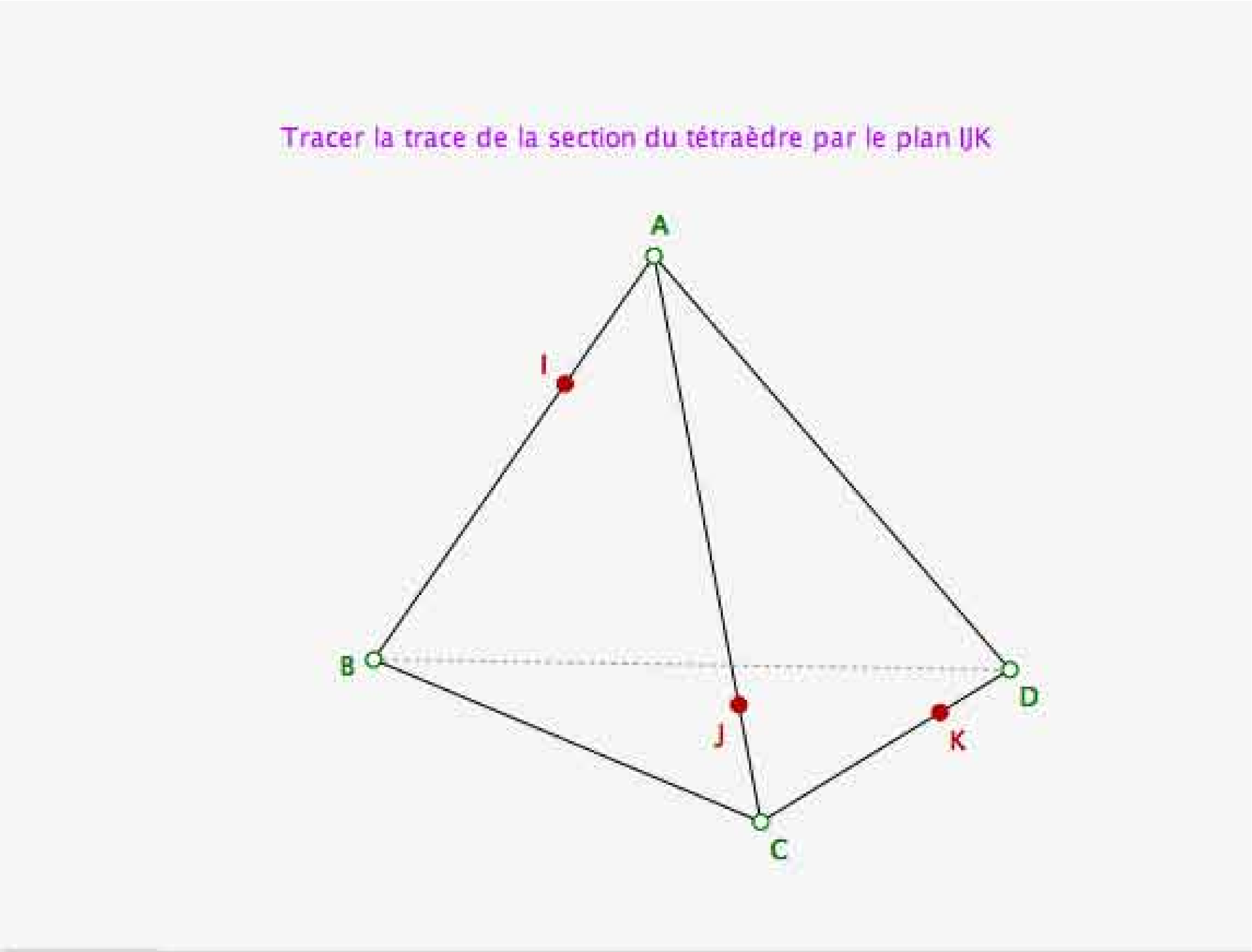
Expliquer pourquoi les points U, V, W sont alignés

20091012-SectionTetraedre3Enonce



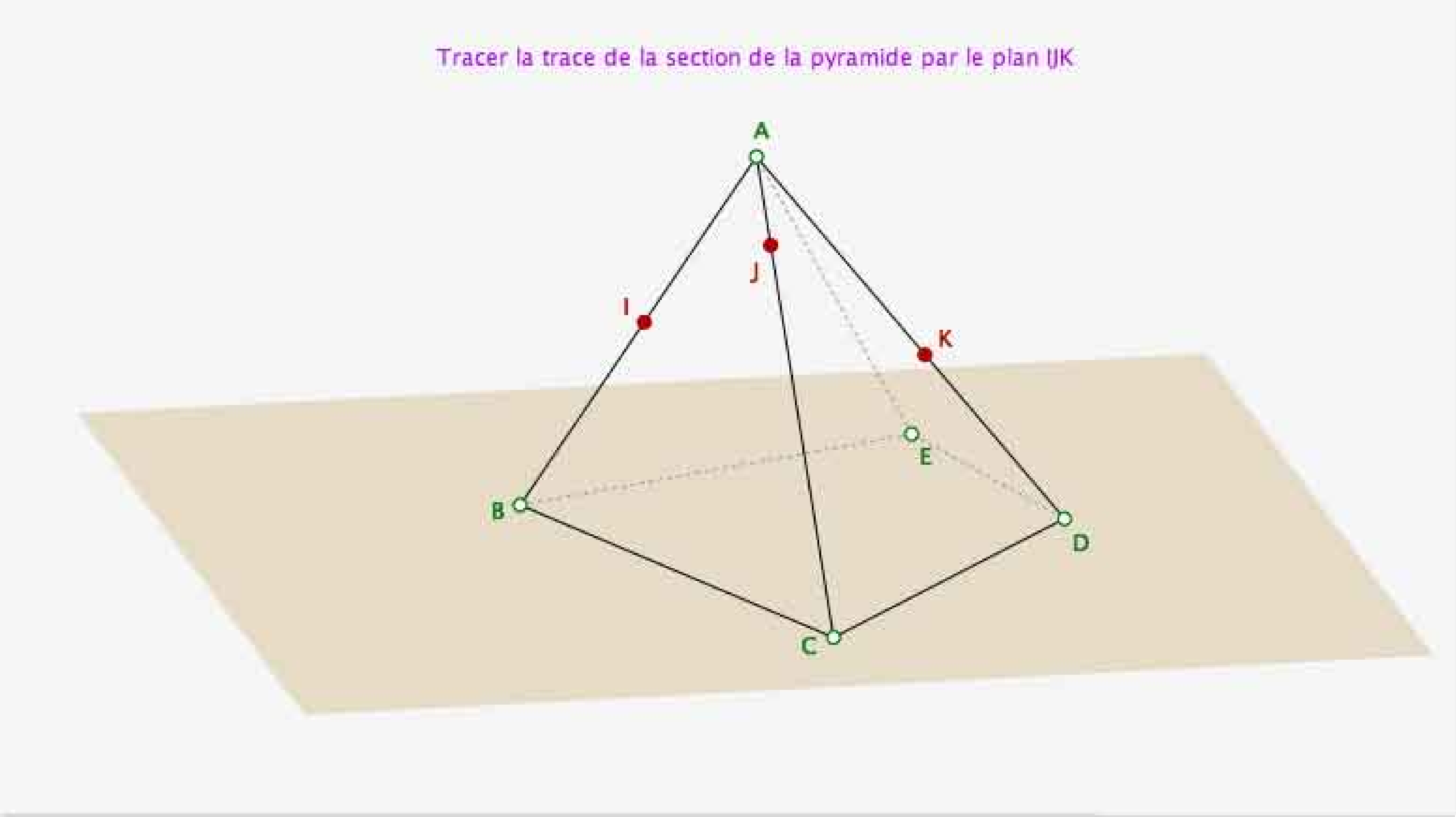
Tracer la trace de la section du tétraèdre par le plan IJK

20091012-SectionTetraedre4Enonce



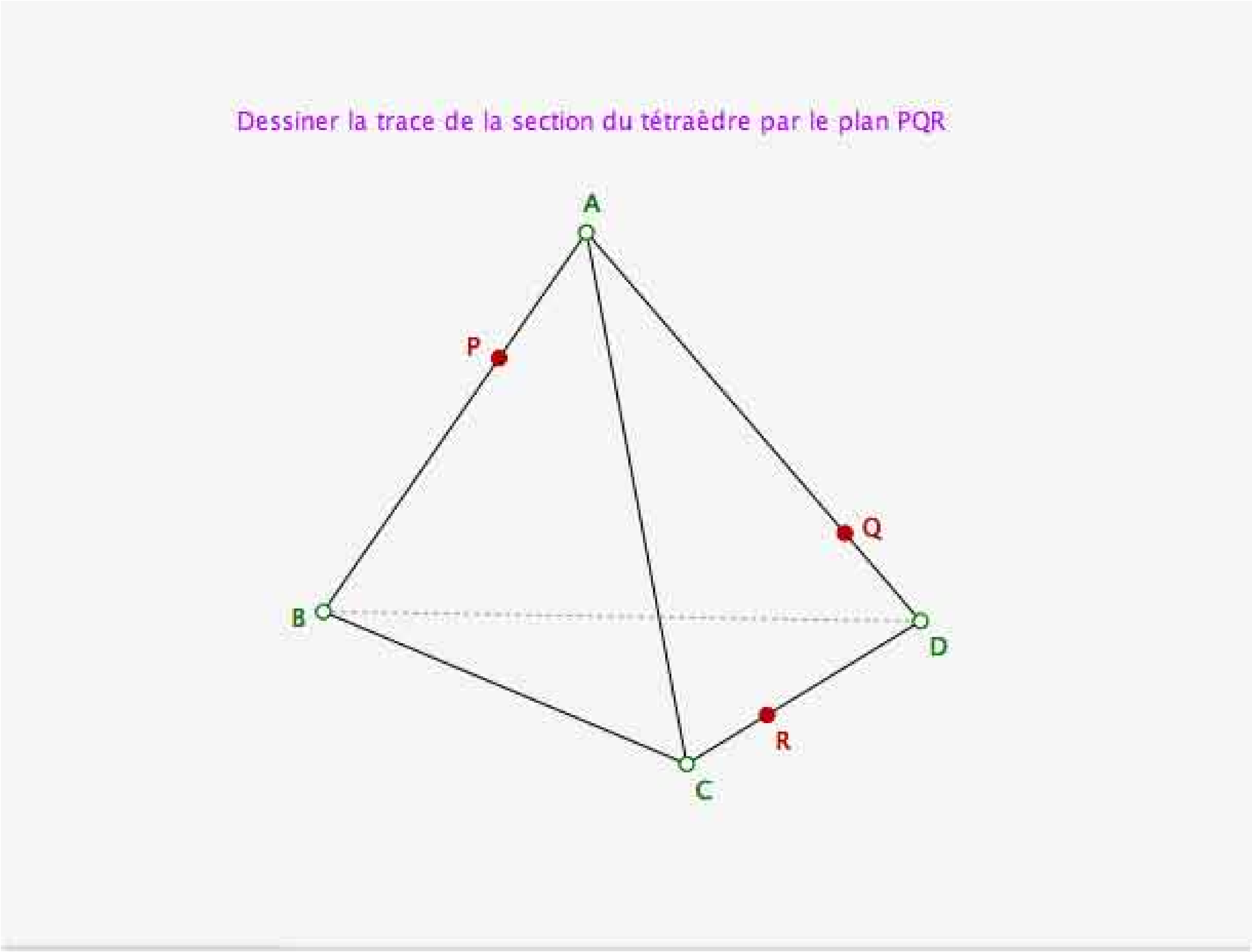
Tracer la trace de la section du tétraèdre par le plan IJK

20091012-SectionTetraedre5Enonce



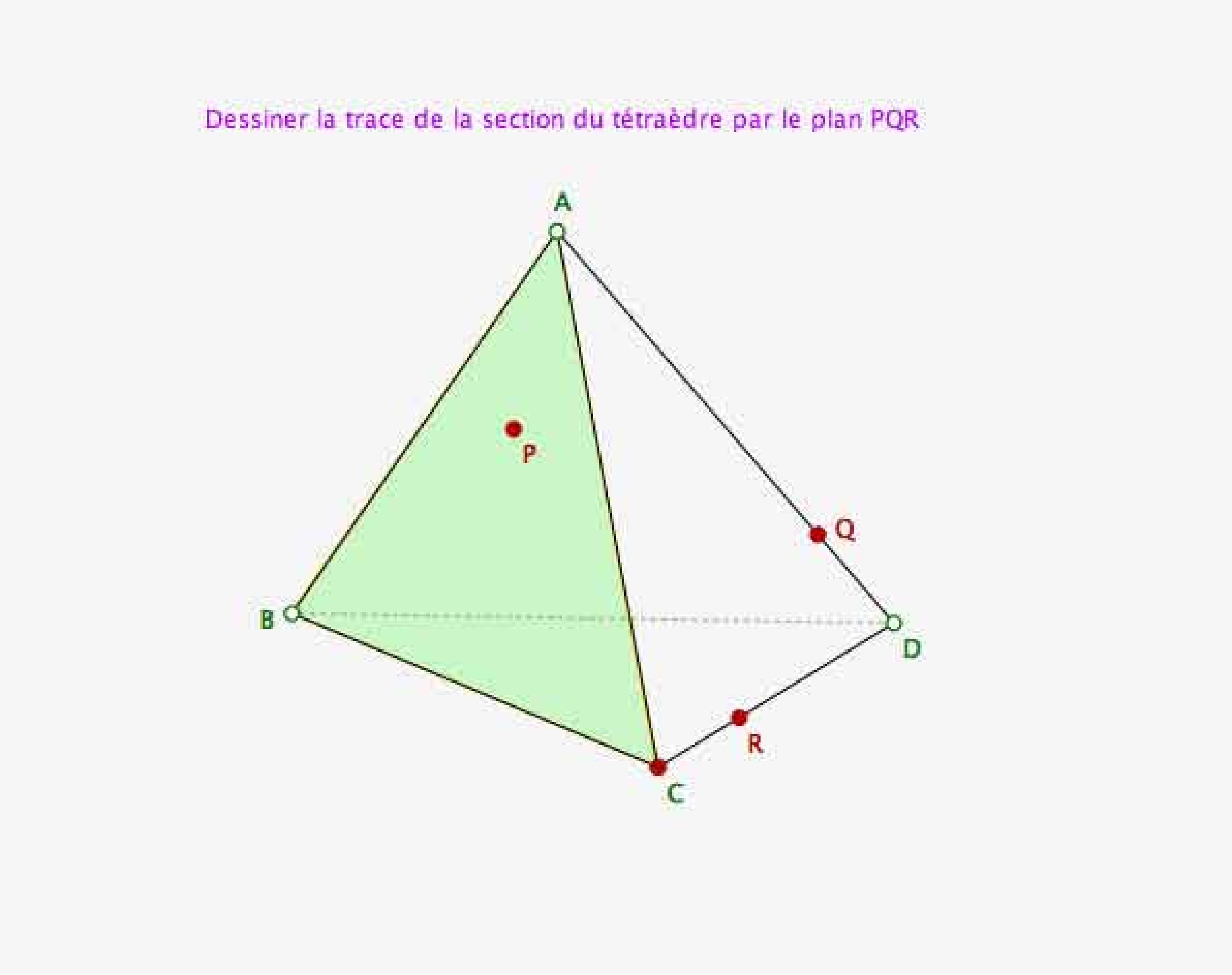
Tracer la trace de la section de la pyramide par le plan IJK

20091012-SectionTetraedre6Enonce



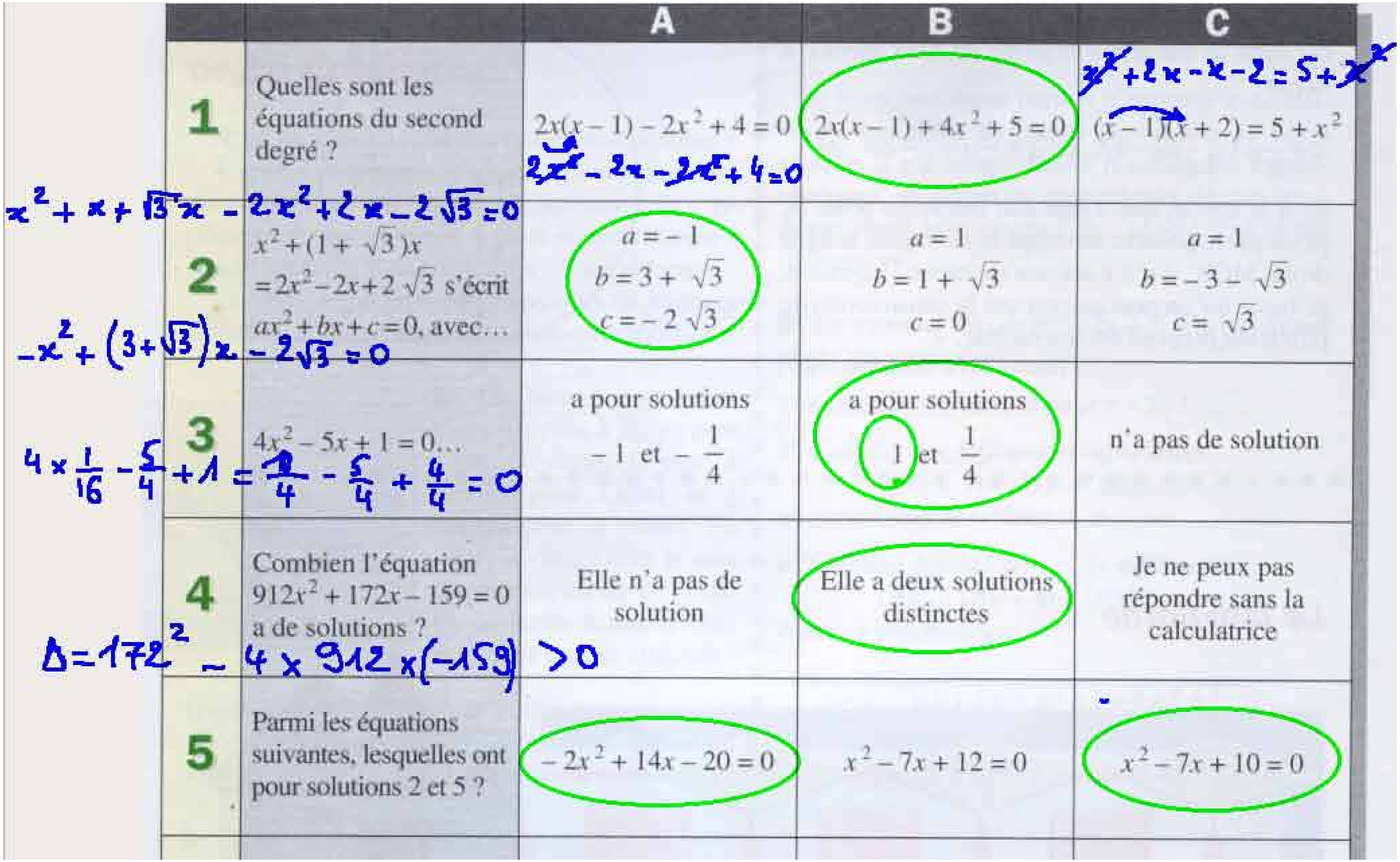
Dessiner la trace de la section du tétraèdre par le plan PQR

20091012-SectionTetraedre7Enonce

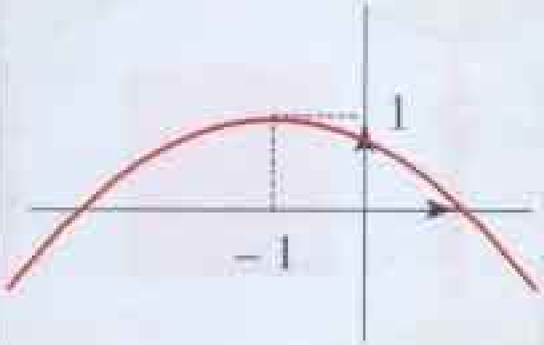
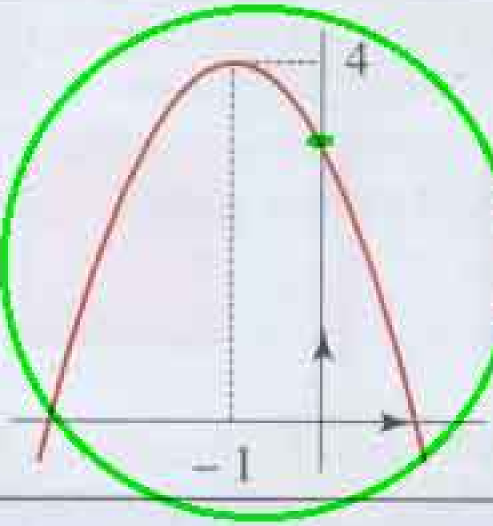
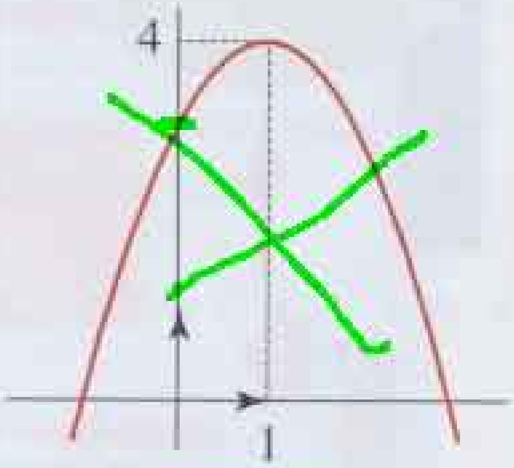


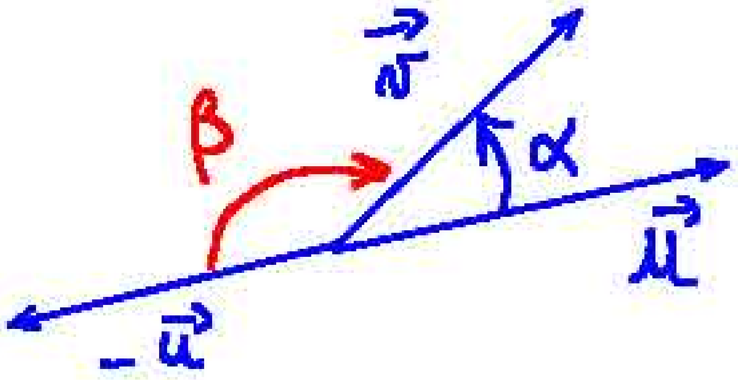
Dessiner la trace de la section du tétraèdre par le plan PQR

20091012-SectionTetraedre8Enonce



		A	B	C
1	Quelles sont les équations du second degré ?	$2x(x-1)-2x^2+4=0$ $2x^2-2x-2x^2+4=0$	[✓ $2x(x-1)+4x^2+5=0$]	$\cancel{x^2}+2x-x-2=5+\cancel{x^2}$ $(x-1)(x+2)=5+x^2$
2	$x^2+x+\sqrt{3}x-2x^2+2x-2\sqrt{3}=0$ $x^2+(1+\sqrt{3})x=2x^2-2x+2\sqrt{3}$ s'écrit $ax^2+bx+c=0$, avec… $-x^2+(3+\sqrt{3})x-2\sqrt{3}=0$	[✓ $a=-1$ $b=3+\sqrt{3}$ $c=-2\sqrt{3}$]	$a=1$ $b=1+\sqrt{3}$ $c=0$	$a=1$ $b=-3-\sqrt{3}$ $c=\sqrt{3}$
3	$4x^2-5x+1=0$… $4\times\frac{1}{16}-\frac{5}{4}+1=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+\frac{4}{4}=0$	a pour solutions -1 et $-\frac{1}{4}$	[✓ a pour solutions 1 et $\frac{1}{4}$]	n'a pas de solution
4	Combien l'équation $912x^2+172x-159=0$ a de solutions ? $\Delta=172^2-4\times912\times(-159)>0$	Elle n'a pas de solution	[✓ Elle a deux solutions distinctes]	Je ne peux pas répondre sans la calculatrice
5	Parmi les équations suivantes, lesquelles ont pour solutions 2 et 5 ?	[✓ $-2x^2+14x-20=0$]	$x^2-7x+12=0$	[✓ $x^2-7x+10=0$]

6	Lesquels de ces trinômes sont positifs pour tout x ?	$\Delta = 25 - 16 > 0$ $4x^2 - 5x + 1$	$\Delta = 25 - 16 > 0$ $4x^2 + 5x + 1$	$\Delta = 25 - 4 \times 4 \times 3 < 0$ [✓ $4x^2 + 5x + 3$]
7	Quelle factorisation pour $\underline{20}x^2 + 40x - 60$?	[✓ $20(x-1)(x+3)$]	~~$(x-1)(x+3)$~~	[✓ $-20(1-x)(3+x)$]
8	Quelle est la représentation graphique de $x \mapsto -x^2 - 2x + 3$? $0 \mapsto 3$ $\quad -1 \mapsto 4$ $1 \mapsto 0$		[✓ ]	
9	1 et – 1 sont les racines… $a(x-1)(x+1)$	d'une seule équation du second degré	de deux équations du second degré	[✓ d'une infinité d'équations du second degré]
10	$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = 0$ a pour ensemble de solution… $x \neq 1$	$\{1 ; 3\}$	$\{1\}$	[✓ $\{3\}$]



$$\boxed{(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v})}$$

$$\alpha - \beta = \pi$$

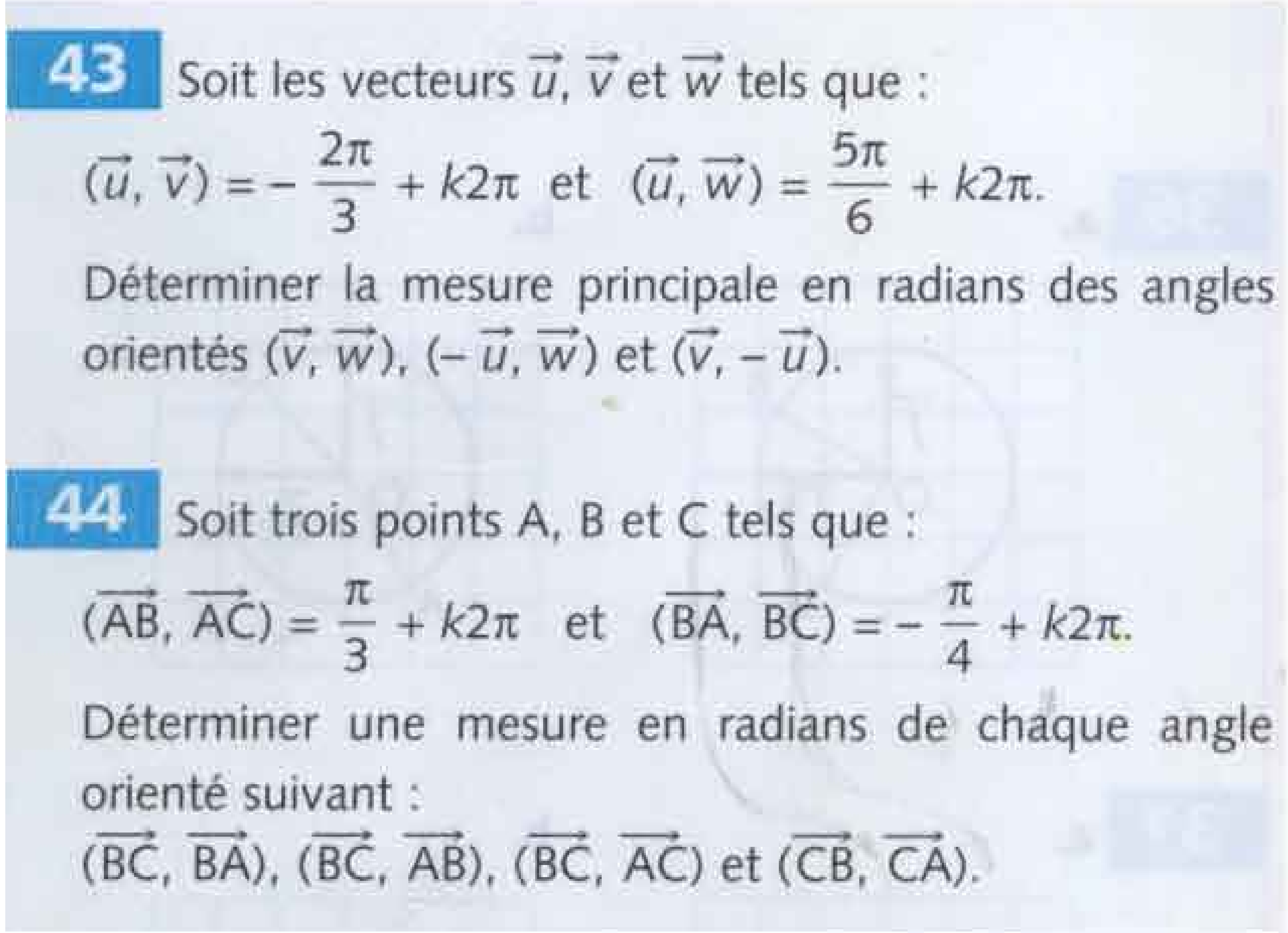
$$\beta = \alpha - \pi$$

$$(-\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) - \pi$$

$+2\pi$

$$\boxed{(-\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi}$$

$$\boxed{(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w})}$$



43 Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :

$$(\vec{u},\vec{v}) = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad \text{et} \quad (\vec{u},\vec{w}) = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$$

Déterminer la mesure principale en radians des angles orientés $(\vec{v},\vec{w})$, $(-\vec{u},\vec{w})$ et $(\vec{v},-\vec{u})$.

44 Soit trois points A, B et C tels que :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi.$$

Déterminer une mesure en radians de chaque angle orienté suivant :
$(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB})$, $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})$.

$$(\vec{u},-\vec{u}) = \pi$$

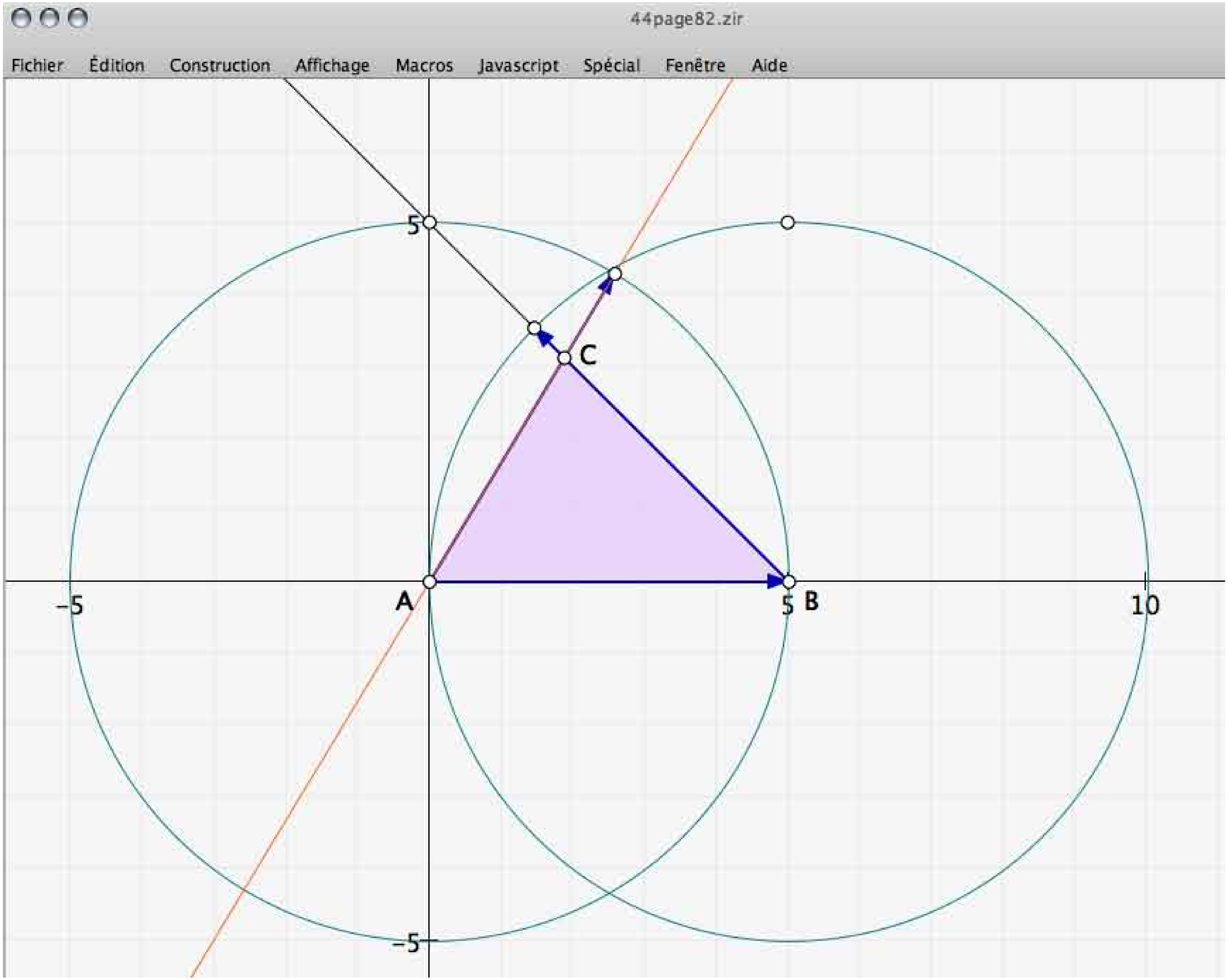
$$(\vec{v},-\vec{u}) + (-\vec{u},\vec{u}) + (\vec{u},\vec{w}) + (\vec{w},-\vec{v}) = (\vec{v}\,;-\vec{v}) = \pi$$

$$(\vec{v},-\vec{u}) + \pi - 2\frac{\pi}{3} + \cancel{\pi} = \cancel{\pi}$$

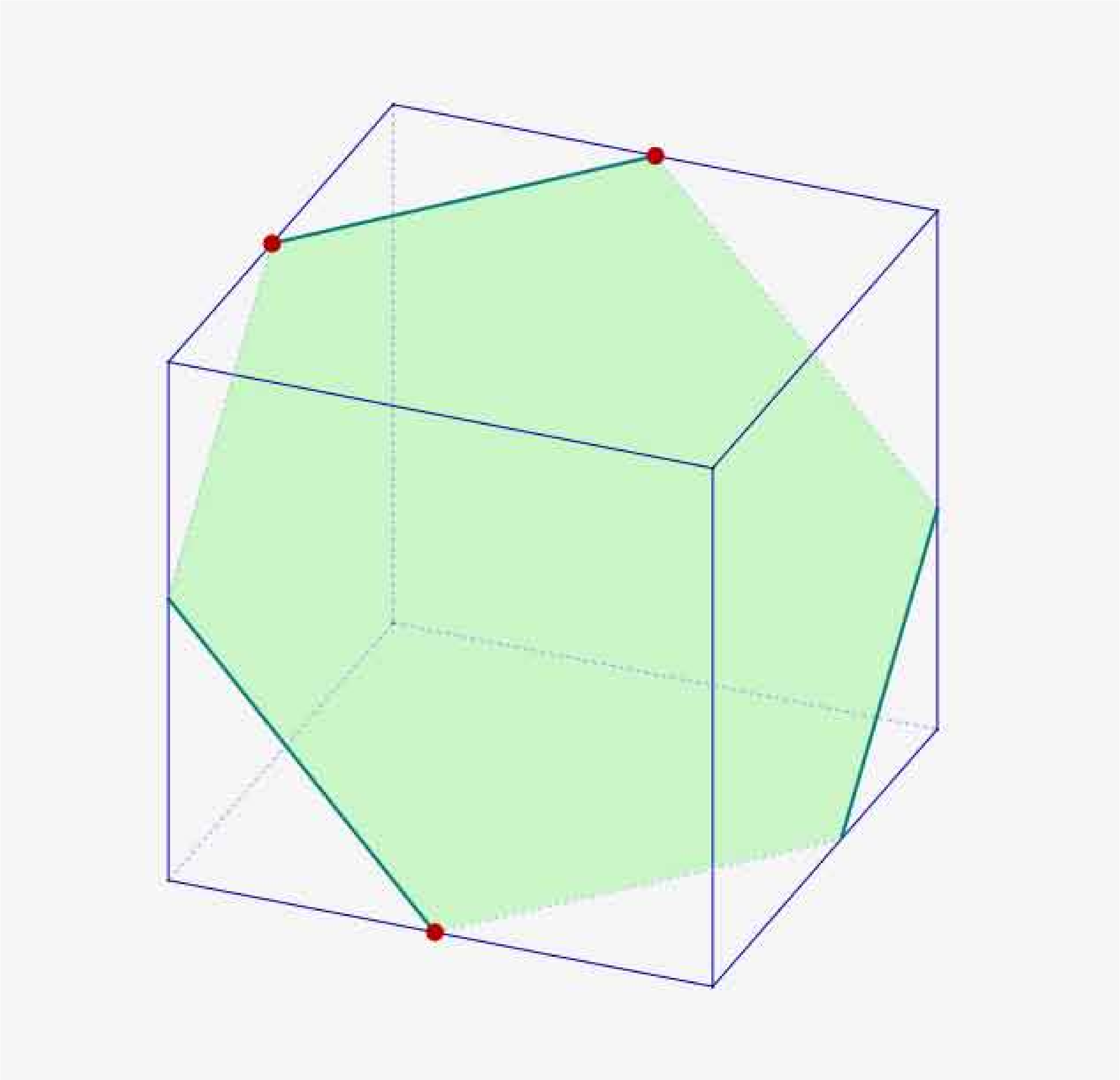
$$(\vec{v},-\vec{u}) = -\pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$(\vec{v},-\vec{u}) = -\frac{\pi}{3}$$

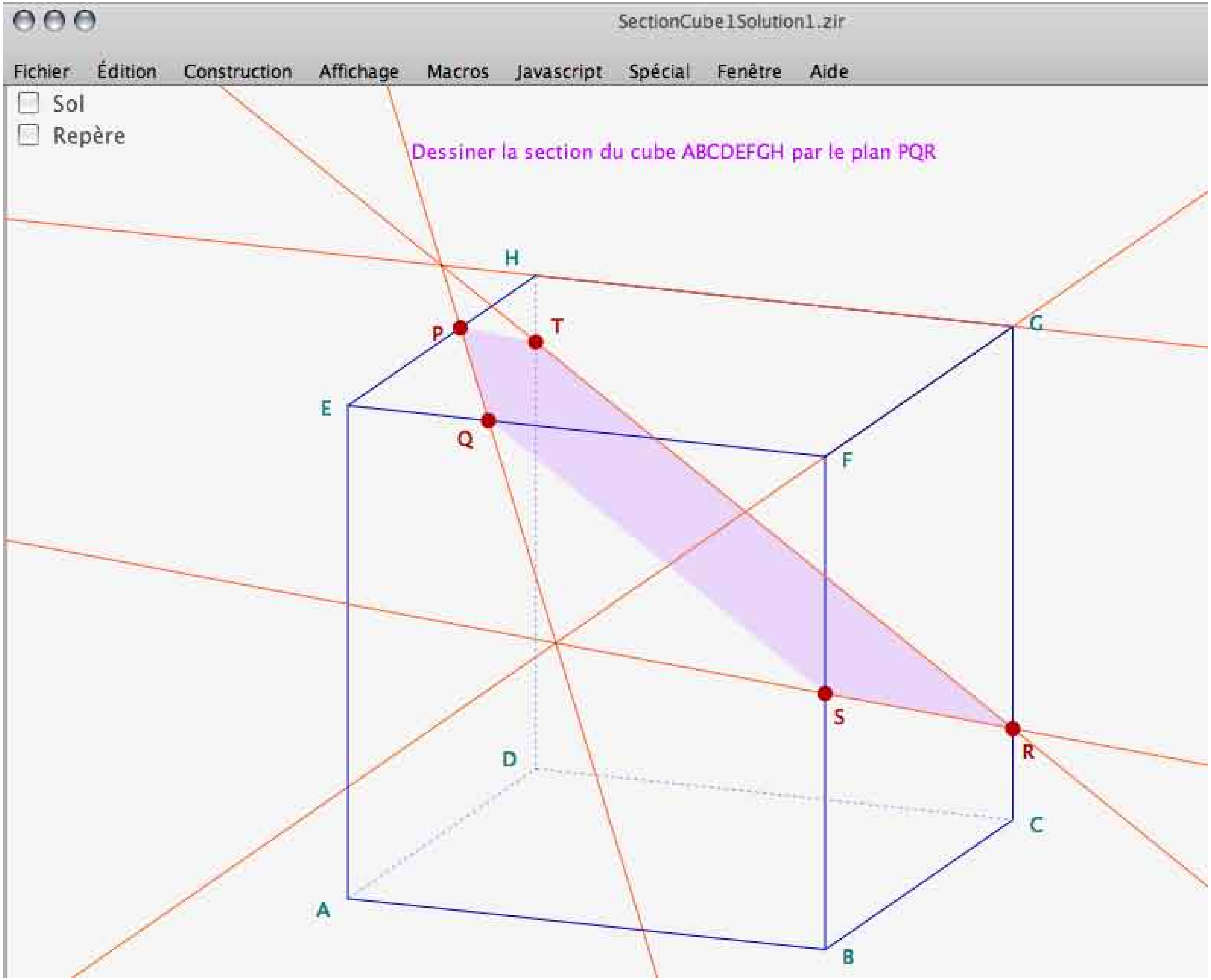
20091026-Ex43page282



20091026-Ex44page82

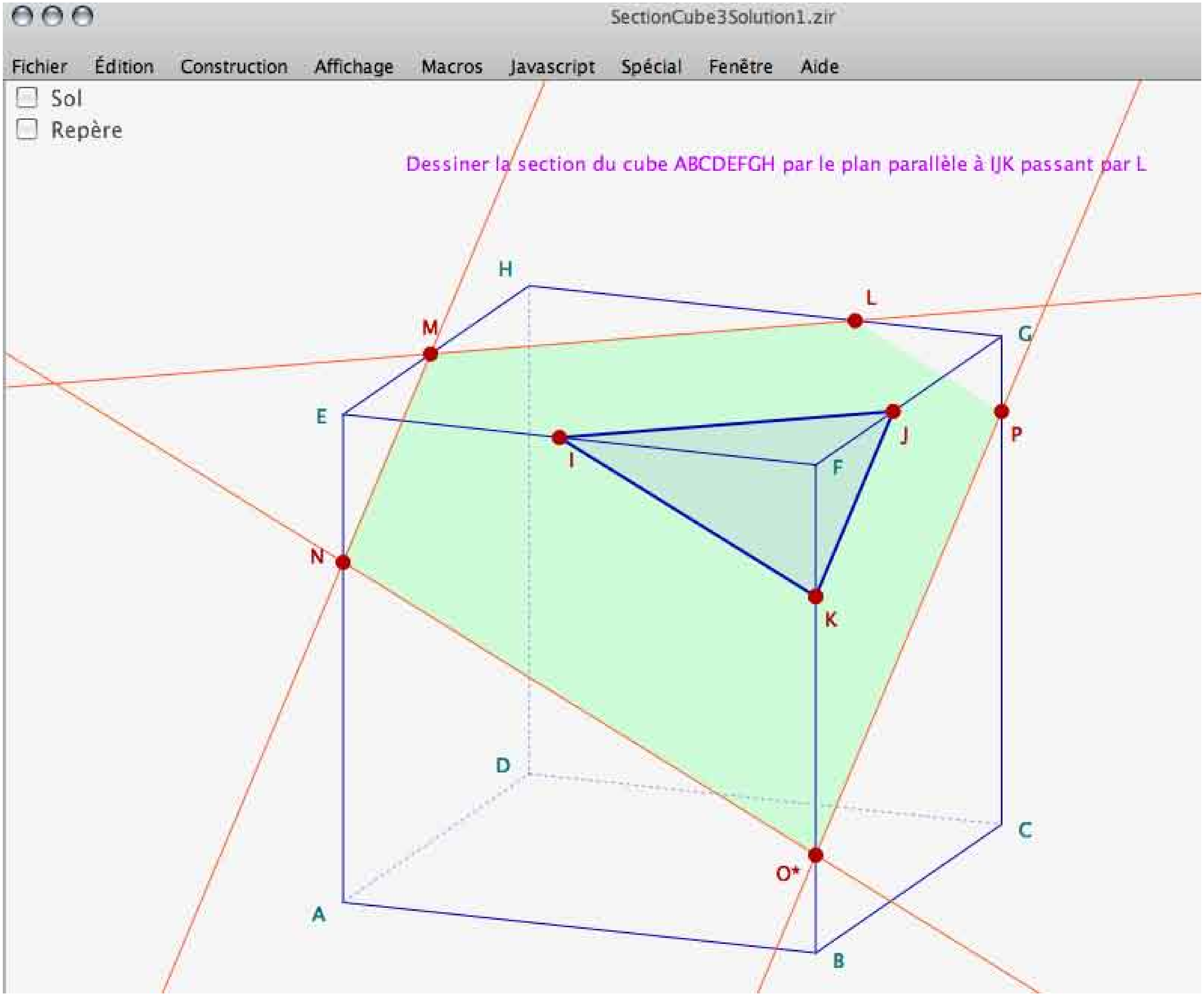


20091026-SectionCube1



Dessiner la section du cube ABCDEFGH par le plan PQR

20091026-SectionCube2

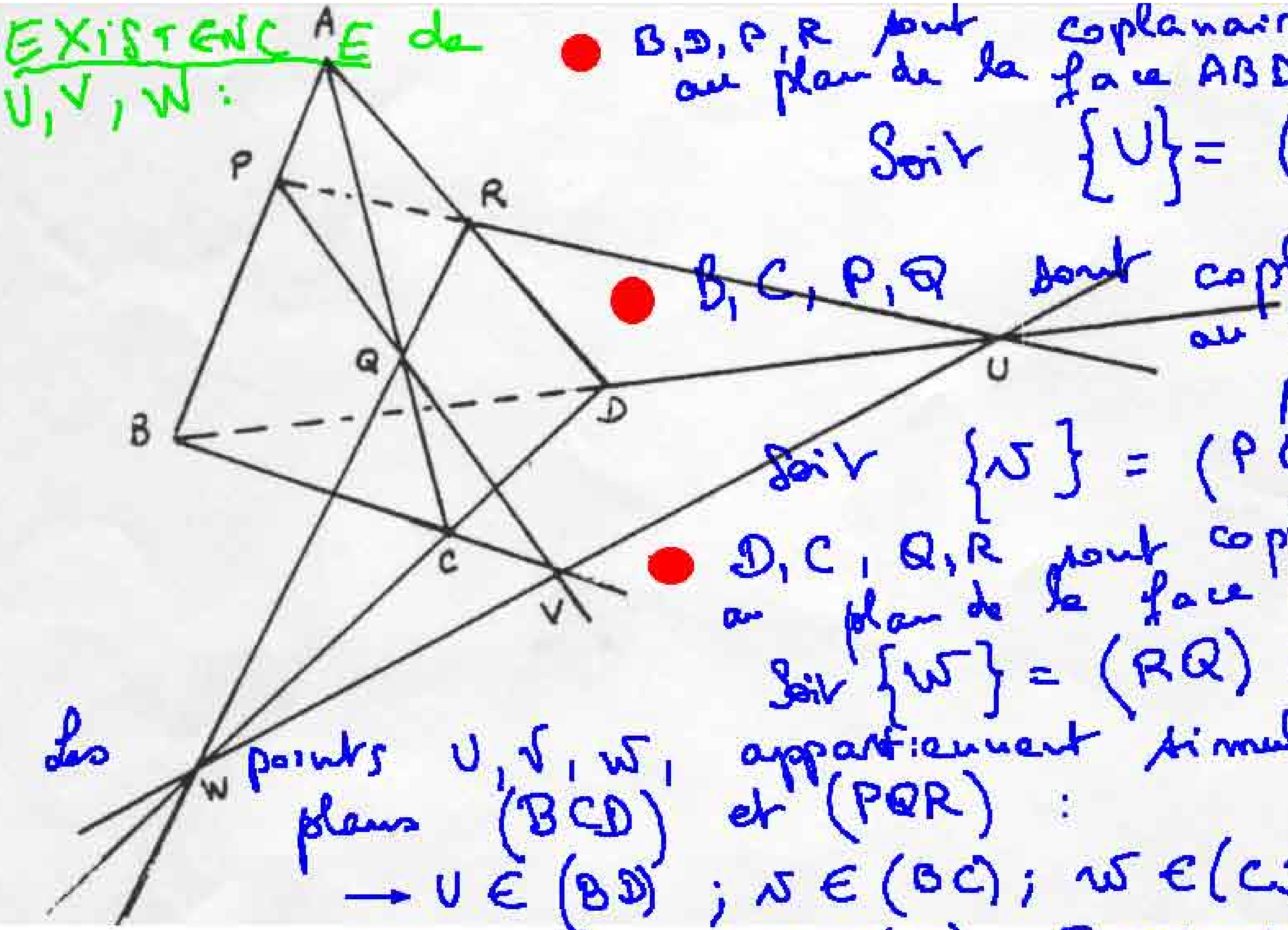


☐ Sol
☐ Repère

Dessiner la section du cube ABCDEFGH par le plan parallèle à IJK passant par L

20091026-SectionCube3

① ● EXISTENCE de U, V, W :



● B, D, P, R sont coplanaires. Ils ∈ au plan de la face ABD.

Soit $\{U\} = (PR) \cap (BD)$

● B, C, P, Q sont coplanaires. Ils ∈ au plan de la face ABC.

Soit $\{V\} = (PQ) \cap (BC)$

● D, C, Q, R sont coplanaires. Ils ∈ au plan de la face ACD.

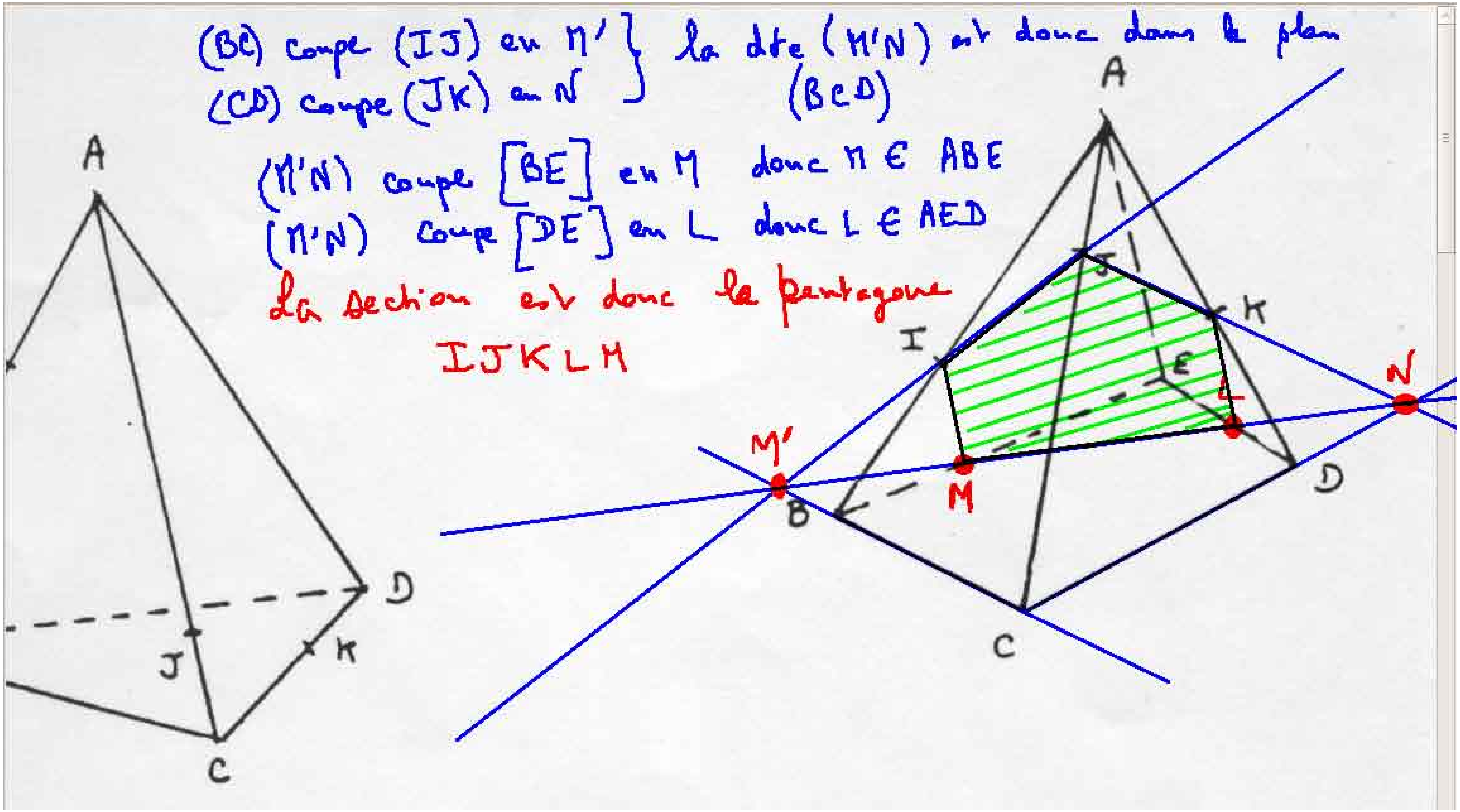
Soit $\{W\} = (RQ) \cap (CD)$

● Les points U, V, W, appartiennent simultanément aux plans (BCD) et (PQR) :

→ $U \in (BD)$; $V \in (BC)$; $W \in (CD)$

→ $U \in (PR)$; $V \in (PQ)$; $V \in (QR)$

● Comme l'intⁿ de 2 plans est 1 droite ; les points U, V, W sont alignés (ils sont sur la droite d'intersection des 2 plans).



(BC) coupe (IJ) en M' } la dte (M'N) est donc dans le plan
(CD) coupe (JK) en N } (BCD)

(M'N) coupe [BE] en M donc M ∈ ABE

(M'N) coupe [DE] en L donc L ∈ AED

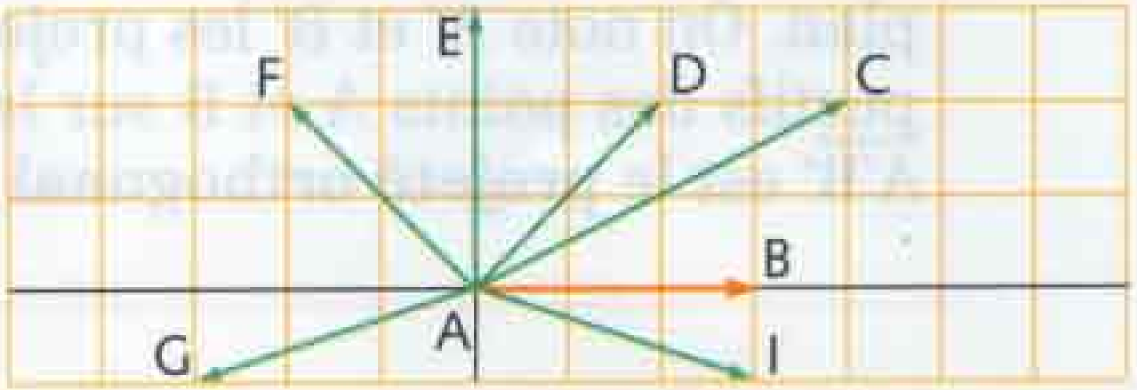
La section est donc le pentagone
IJKLM

a. À l'aide de la figure ci-contre, déterminer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$.



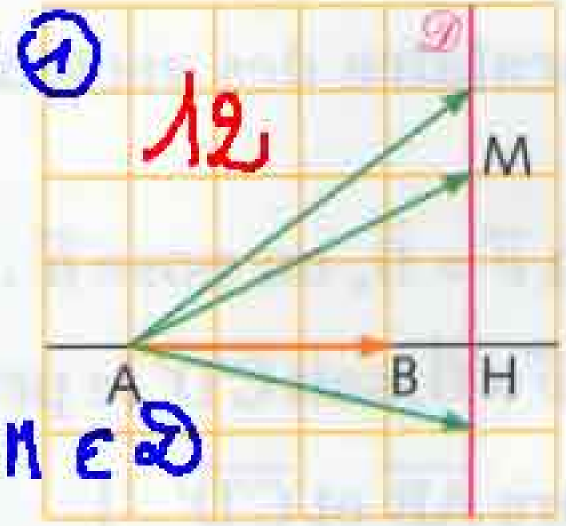
b. Que peut-on dire du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$ lorsque le point M se déplace sur les droites $\mathscr{D}$ représentées sur les figures ci-contre ?

① Tous les projetés orthogonaux de $M \in \mathscr{D}$ sur la dte (AB) sont au pt H.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = AB \times AH \quad \forall M \in \mathscr{D}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 3 \times 4 = 12$

①



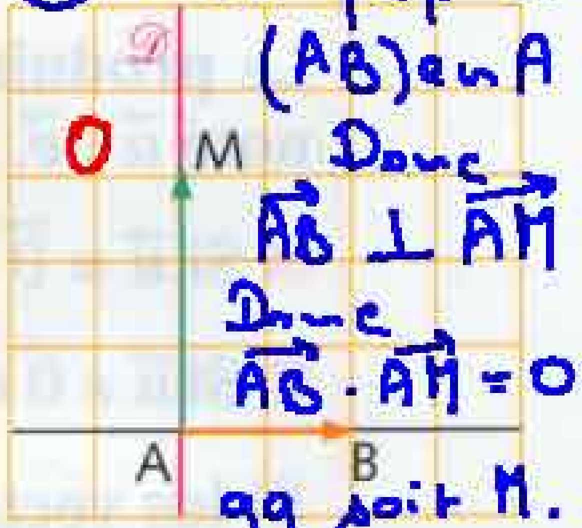
12

② $\mathscr{D}$ est perp à (AB) en A

Donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM}$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

qq soit M.

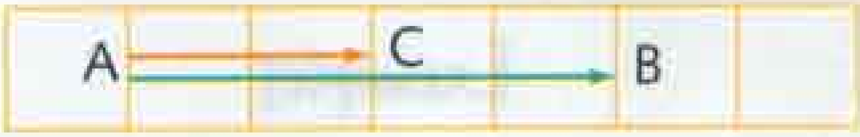


0

2. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le cas particulier où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

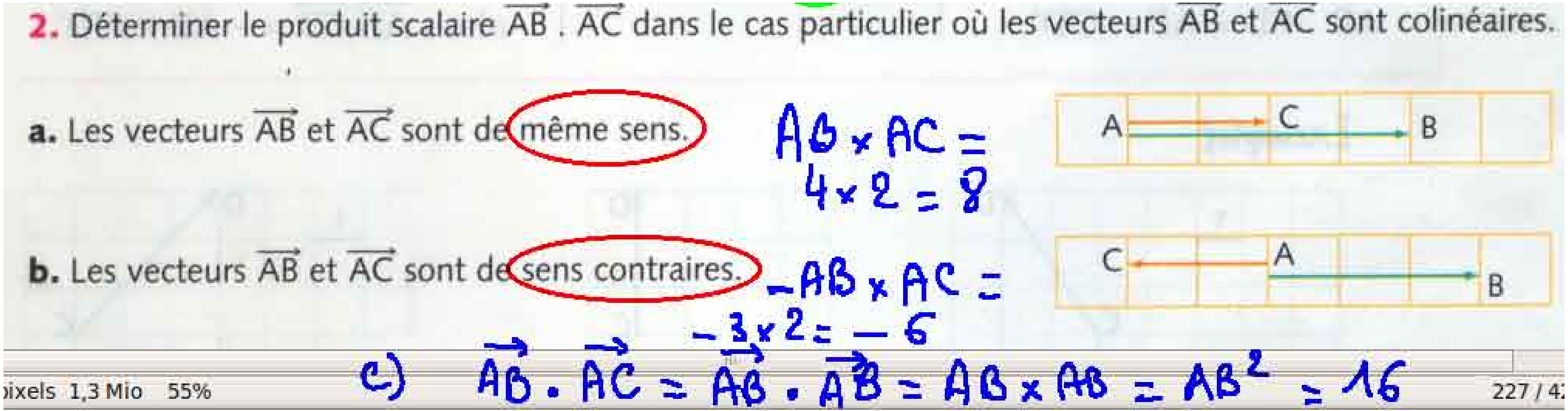
a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens.

$AB \times AC =$
$4 \times 2 = 8$



b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraires.

$-AB \times AC =$
$-3 \times 2 = -6$



2. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le cas particulier où les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens.

$AB \times AC =$
$4 \times 2 = 8$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraires.

$-AB \times AC =$
$-\underline{3} \times 2 = -6$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB = AB^2 = 16$

20091030-ProduitScalaire2

Le produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel que l'on peut calculer de diverses façons. C'est cette diversité qui en fait un outil puissant.

A Expressions du produit scalaire

1. Définition

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{v}-\vec{u}\|^2)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2-\underbrace{\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\|^2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$$

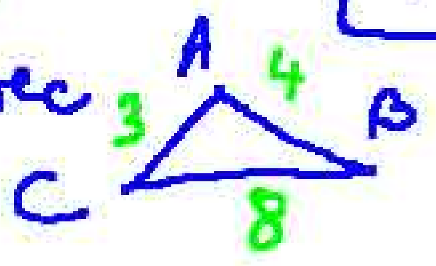
Conséquences

- Si A, B et C sont trois points tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$, on a $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\vec{v}-\vec{u}$,

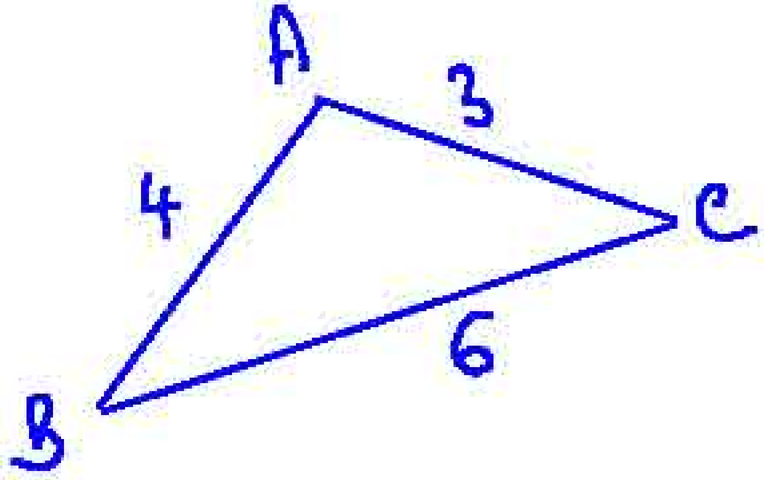
d'où l'égalité $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)}$.

$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$$
$$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$$
$$=\overrightarrow{BC}$$

application : Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ avec



puis $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$



$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4^2 + 3^2 - 6^2\right) = \boxed{-\frac{11}{2}}$$

$$\vec{CB}\cdot\vec{CA} = \frac{1}{2}\left(CB^2 + CA^2 - BA^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(6^2 + 3^2 - 4^2\right) = \boxed{\frac{29}{2}}$$

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \ldots$

$$\vec{BC}\cdot\vec{BA} = \frac{1}{2}\left(BC^2 + BA^2 - CA^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(6^2 + 4^2 - 3^2\right)$$

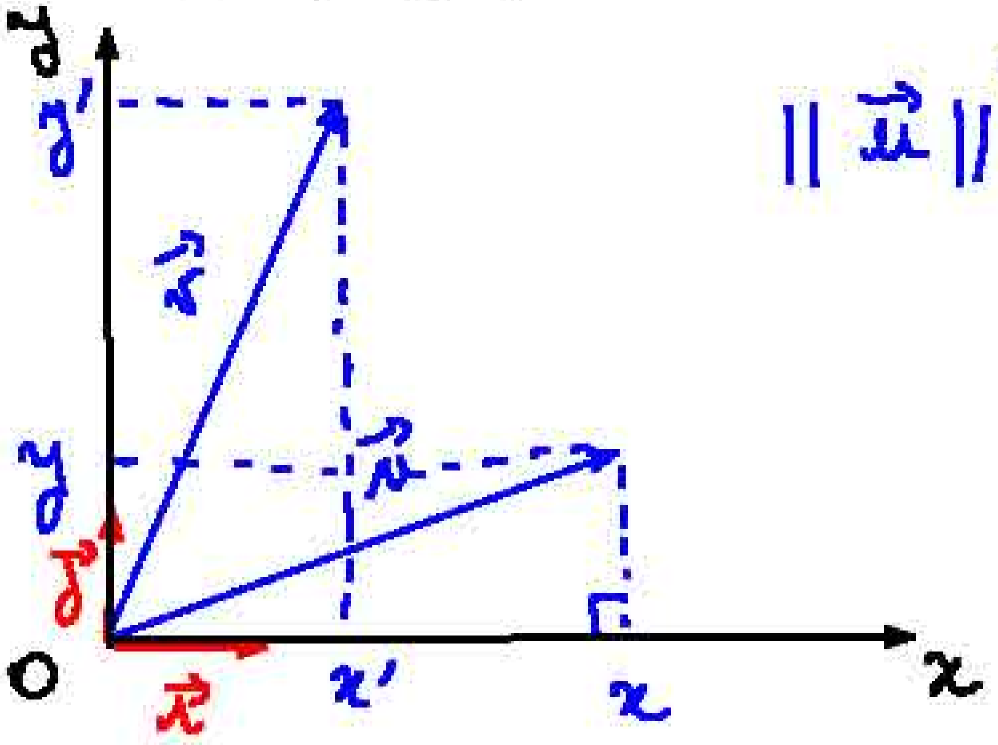
$$= \frac{1}{2}\left(36 + 16 - 9\right)$$

$$= \boxed{\frac{43}{2}}$$

- $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$; $\vec{u}^2$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{0}\cdot\vec{u}=0$

2. Avec des coordonnées

> Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$. On a alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$.



$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ $\qquad$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$

$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

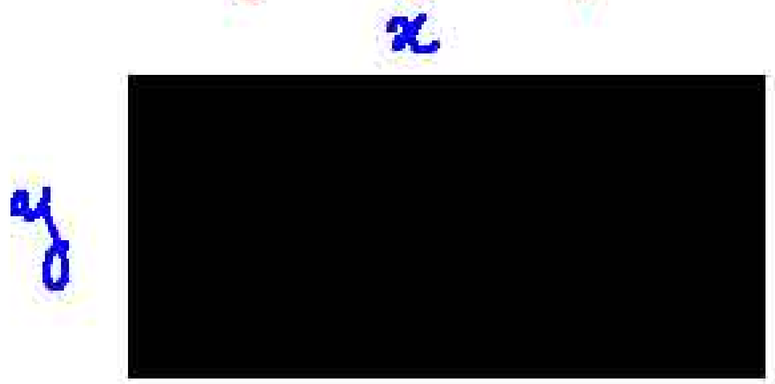
$\vec{v} =$

$\vec{v} - \vec{u} =$

ensuite calculer $\|\vec{v}-\vec{u}\|^2$

terminer la démonstration ...
en utilisant la définition

($x = y = 12,5$ carré d'aire maximale)



$$2(x+y) = 50$$

$$x + y = 25 \qquad y = 25 - x$$

$$\mathcal{A} = x \times y$$

$$\boxed{\mathcal{A} = x(25-x)}$$

Chercher l'aire maximale revient à chercher le maximum de la fonction :

$$\mathcal{A} : x \longrightarrow x(25-x)$$

$$\mathcal{A}(x) = 25x - x^2$$

$$-(x^2 - 25x) = -\left[\left(x - \frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2\right]$$

$$\mathcal{A}(x) = -\left(x - \frac{25}{2}\right)^2 + 156,25$$

$$\left(x - \frac{25}{2}\right)^2 \geqslant 0 \text{ pr } \forall x$$

$$-\left(x - \frac{25}{2}\right)^2 \leqslant 0 \text{ pr } \forall x$$

$$\mathcal{A}(x) \leqslant 156,25 \text{ pr } \forall x$$

$\mathcal{A}(x)$ a donc un max.
C'est $156,25$.
et
$\mathcal{A}(12,5) = 156,25 \text{ cm}^2$

$\sin x^2 = 1 - \cos x^2$

$= \sqrt{1 - \cos x^2}$

$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}\right)^2}$

~~$= \sqrt{\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}}$~~ Non

$\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}$ /

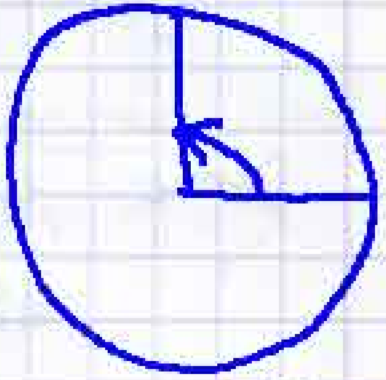
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}$ /

$\alpha \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\sin\alpha > 0$

Pourquoi $\sin\alpha$ est-il positif ???

$1 - \frac{3-\sqrt{3}}{4}$

$\frac{4-3+\sqrt{3}}{4}$



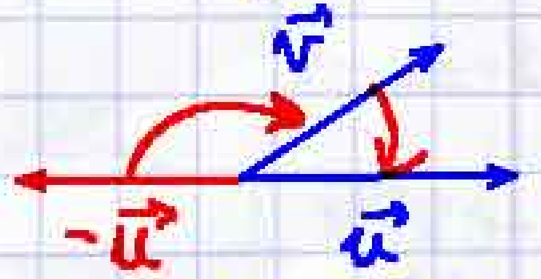
$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}$

$$(\overset{\vec{v}}{\overrightarrow{BC}} ; \overset{\vec{u}}{\overrightarrow{AB}}) = \pi - (\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC})$$

$$= \pi - \frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{7\pi}{8}$$

$$(\vec{v} ; \vec{u}) = \pi - (-\vec{u} ; \vec{v})$$



$$(-\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = \pi$$

$$(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{AC})$$

$$= -(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC}) + \pi + (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$$

$$= -\frac{\pi}{8} + \pi - \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{19\pi}{24}$$

DILMAHOMED
Houmayraa
PS1

Devoir commun de Mathématiques

$\frac{18}{20}$

Note

Appréciations

Excellente partie sur les angle orientés!

Excellent devoir

8,75

I]. Fonctions.

2

Exercice 1.

Pour la courbe P_1:

On prend trois points $A(-1;0)$ $B(2,0)$ $C(\frac{1}{2}, -4,5)$

On sait que

$y = ax^2 + bx + c$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

On remplace en prenant $C(\frac{1}{2}, -4,5)$

$-4,5 = a(\frac{1}{2} + 1)(\frac{1}{2} - 2)$

$-4,5 = a[\frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} - 2]$

$-4,5 = a -\frac{9}{4}$

$a = 2$

On a donc

$y = 2(x+1)(x-2)$

$= 2[x^2 - 2x + x - 2]$

$= 2[x^2 - x - 2]$

$= 2x^2 - 2x - 4$

Pour P_2

On prend trois points $A(-\frac{3}{2}, 0)$ $B(1,0)$ $C(-1, \frac{1}{2})$

On a

$y = ax^2 + bx + c$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$\frac{1}{2} = a(-1 + \frac{3}{2})(-1 - 1)$

$\frac{1}{2} = a\left[1 + 1 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right]$

$-1a = \frac{1}{2}$

$a = -\frac{1}{2}$

On a donc

$y = -\frac{1}{2}(x + \frac{3}{2})(x - 1)$

$= -\frac{1}{2}\left[x^2 - x + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right]$

$= -\frac{1}{2}\left[x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right]$

$= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

5,75 **Exercice 2.**

1) a) Factorisation :

$f_1(x) = 3x^2 + x - 2$

On calcule Δ :

$\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-2)$

$= 1 + 24$

$= 25$

On obtient ainsi les racines x_1 et x_2

$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{6}$ $\quad$ $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{6}$

$= -1$ $\quad$ $= \frac{2}{3}$

On a la forme factorisée

$f_1(x) = 3(x + 1)(x - \frac{2}{3})$

Pour $f_2(x)$

$f_2(x) = 4x^2 - 32x + 60$

On calcule Δ :

$\Delta = (-32)^2 - 4 \times 4 \times 60$

$= 1024 - 960 = 64$

On obtient ainsi les racines x_1 et x_2 :

$x_1 = \frac{32-\sqrt{64}}{8}$ $x_2 = \frac{32+\sqrt{64}}{8}$

$= 3$ $= 5$

On a la forme factorisée :

$f_2(x) = 4(x-3)(x-5)$

b) Pour $f_2(x)$ on a :

$f_2(x) \geqslant 0$

$4x^2-32x+60 \geqslant 0$

La fonction f_2 est du signe de a c'est-à-dire positive (3>0) à l'extérieur des racines donc $]-\infty ; 3[\cup]5 ; +\infty[$ et négative entre les racines donc $]3 ; 5[$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

c) Pour f_2 on a :

$f_2(x) = 4x^2 - 32x + 60$

$= 4[x^2 - 8x + 15]$

$= 4[(x-4)^2 - 16 + 15]$

$= 4[(x-4)^2 - 1]$

TB

On a pour tout réel x

$(x-4)^2 \geqslant 0$

$(x-4)^2 - 4 \geqslant -4$

Donc $f_2(x) \geqslant -4$

et $f(4) = -4$

On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f(x)$		-4	

erreur d'inattention

2) a)

$f_1(x) = f_2(x)$

$3x^2+x-2 = 4x^2-32x+60$

$3x^2+x-2-4x^2+32x-60=0$

$-x^2+33x-62=0$

On calcul Δ:

$\Delta = 33^2 - 4\times(-1)\times(-62)$

$= 841$

On a donc les racines:

$x_1 = \frac{-33-\sqrt{841}}{-2}$ $= 31$ $x_2 = \frac{-33+\sqrt{841}}{-2}$ $= 2$

Les solutions sont $S\{2;31\}$

b) A: $(2;12)$ Les points d'intersections de C_1 et C_2 sont

B $(31;2912)$ $(f_1(2)=f_2(2)=12$ et $f_1(31)=f_2(31)=2912)$

c) $f_1(x) \geqslant f_2(x)$

$f_1(x)-f_2(x) \geqslant 0$

$3x^2+x-2-4x^2+32x-60 \geqslant 0$

$-x^2+33x-62 \geqslant 0$

Les racines sont:

$x_1 = 2$ et $x_2 = 31$

Le trinôme est du signe de a c'est-à-dire négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines

On a donc $f_1(x) \geqslant f_2(x)$

pour $x \in [2;31]$

d) Les valeurs de x pour lesquelles C_1 est situé au dessus de C_2 sont $x \in [2;31]$

DILMAHOMED
Houmayra
PS1

Exercice 3. 1

1) $\begin{cases} 2(L+\ell)=50 \\ L\times\ell=\mathcal{A}_m \end{cases}$ on a $\begin{cases} L+\ell=25 \\ L\times\ell=\mathcal{A}_m \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \ell=25-L \\ L\times(25-L)=\mathcal{A}_m \end{matrix}$

Donc $L(25-L)=\mathcal{A}_m$

$25L-L^2-\mathcal{A}_m=0$

On appelle $X=25L-L^2$

On a ainsi $X-\mathcal{A}_m=0$

$\mathcal{A}_m=X$

on cherche le max de la fonction $L \rightarrow 25L-L^2$

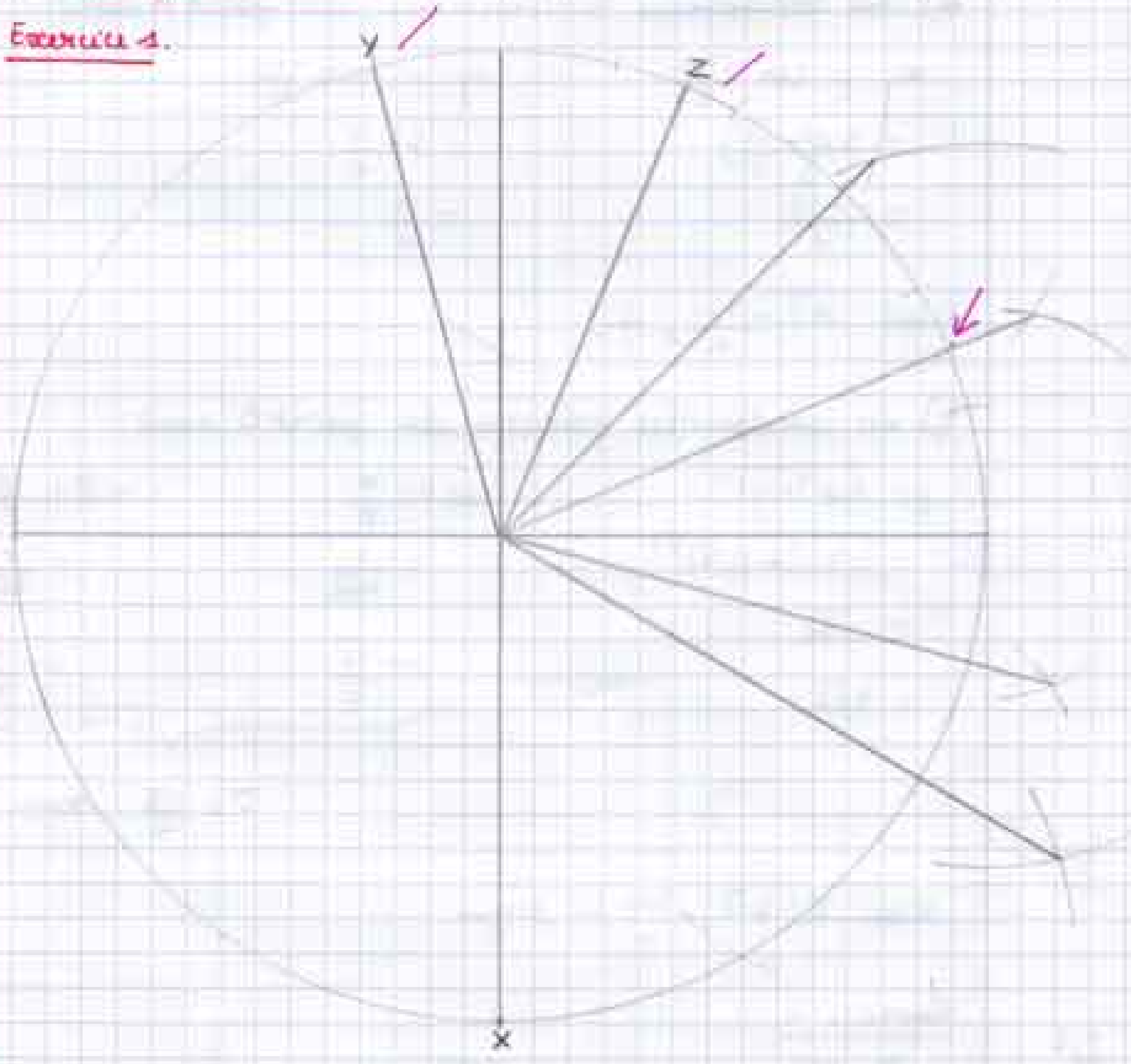
(voir derrière →)

9,25

II]- Angles orientés.

1,5

Exercice 1.



1

Exercice 2:

On sait que

$\cos x^2+\sin x^2=1$

$\sin x^2 = 1 - \cos x^2$

$= \sqrt{1 - \cos x^2}$

$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}\right)^2}$

~~$= \sqrt{\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2}}$~~ non

Pourquoi sin α est-il positif ???

$\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}$ /

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}$ /

0,75

Exercice 3.

a) Les coordonnées cartésiennes du point A sont.

$x = p \cos \frac{17\pi}{6}$

$= 3 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{-3\sqrt{3}}{2}$

$y = p \sin \frac{17\pi}{6}$

$= 3 \times \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{2}$

D'où $A\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} ; \frac{3}{2}\right)$ /

b) Les coordonnées polaires du point B sont:

$p = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{32}$

$= 4\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{p}$

$= -\frac{4}{4\sqrt{2}}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{p}$

$= \frac{-4}{4\sqrt{2}}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$ non $-\frac{3\pi}{4}$

D'où $B\left(4\sqrt{2} ; -\frac{3\pi}{4}\right)$ signe.

2,5

Exercice 4.

$(\vec{AB} ; \vec{AC}) = -\frac{\pi}{12}$

$(\vec{BA} ; \vec{BC}) = \frac{\pi}{8}$

$(\vec{BC} ; \vec{BA}) = -(\vec{BA} ; \vec{BC})$

$= -\frac{\pi}{8}$ /

$(\vec{BC} ; \vec{AB}) = \pi - (\vec{BA} , \vec{BC})$

$= \pi - \frac{\pi}{8}$

$= \frac{7\pi}{8}$

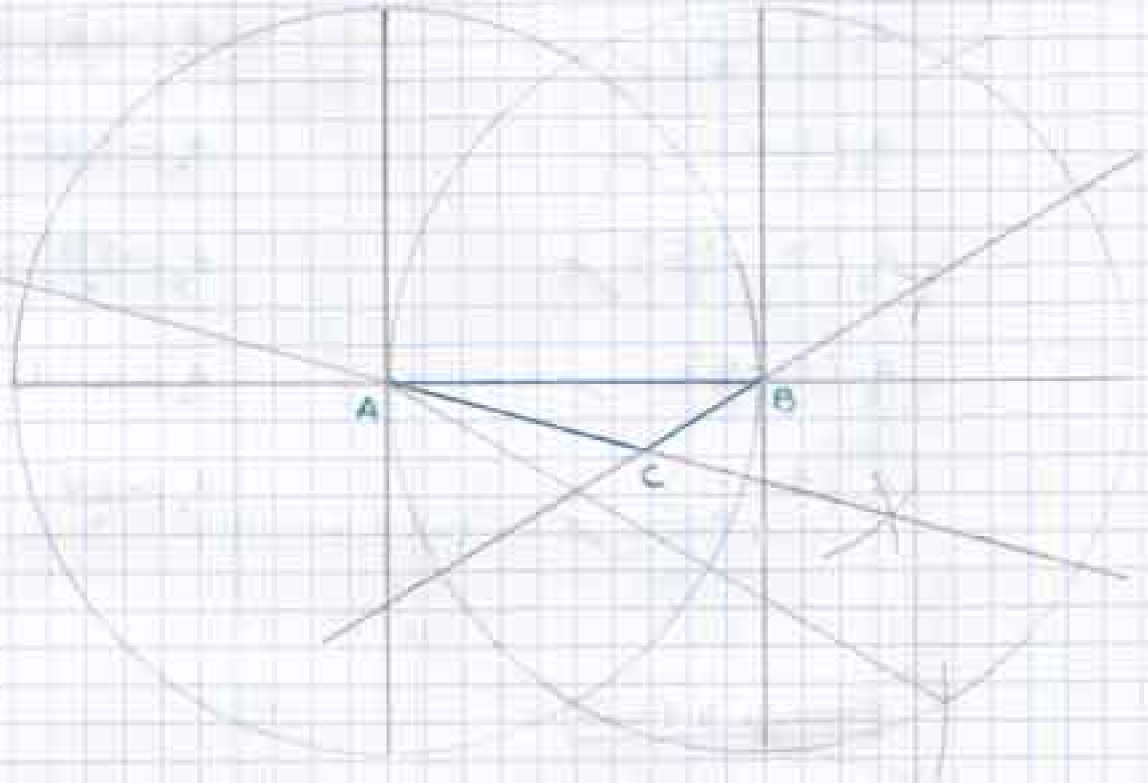
$(\vec{BC} ; \vec{AC}) = (\vec{BC} ; \vec{BA}) + (\vec{BA} ; \vec{AC})$

$= -(\vec{BA} ; \vec{BC}) + \pi + (\vec{AB} ; \vec{AC})$

$= -\frac{\pi}{8} + \pi - \frac{\pi}{12}$

$= \frac{19\pi}{24}$

TB



3,5

Exercice 5.

a)

Coordonnées polaires	Coordonnées cartésiennes
$A(4 ; \frac{\pi}{6})$	Pour A $x = \rho \cos\frac{\pi}{6}$ $= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ $= 2\sqrt{3}$ $y = \rho . \sin\frac{\pi}{6}$ $= 4 \times \frac{1}{2}$ $= 2$ $A(2\sqrt{3} ; 2)$
$B(4 ; \frac{5\pi}{6})$	$B(-2\sqrt{3} ; 2)$

$C(4; -\frac{\pi}{2})$	$C(0; -4)$

b)

Coordonnées polaires	Coordonnées cartésiennes
$A_0(3; 0)$	$A_0(3; 0)$
$A_1(3; \frac{\pi}{4})$	$A_1(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$
$A_2(3; \frac{\pi}{2})$	$A_2(0; 3)$
$A_3(3; \frac{3\pi}{4})$	$A_3(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2})$
$A_4(3; \pi)$	$A_4(-3; 0)$
$A_5(3; -\frac{3\pi}{4})$	$A_5(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2})$
$A_6(3; -\frac{\pi}{2})$	$A_6(0; -3)$
$A_7(3; -\frac{\pi}{4})$	$A_7(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2})$

Exercice 3 (suite)

$\mathcal{A}_m = 25L - L^2$

On résout

$25L - L^2 = 0$

$-L^2 + 25L = 0$

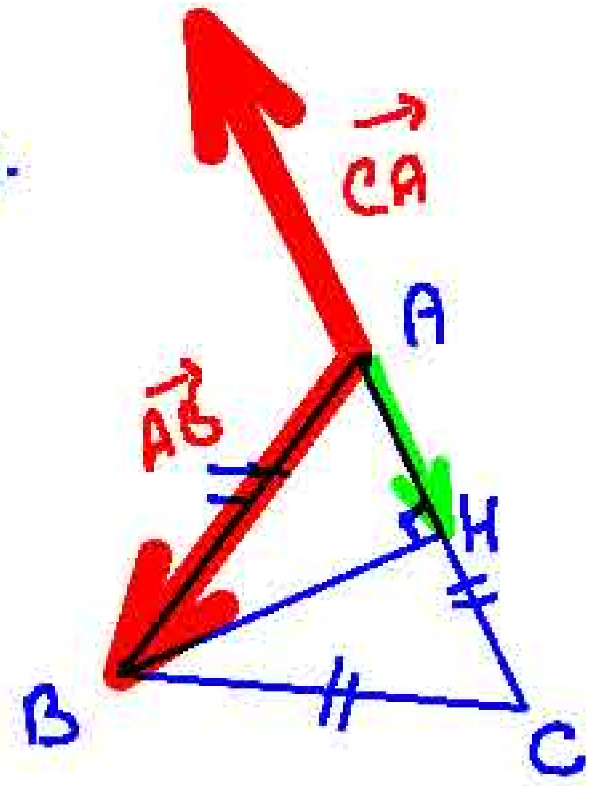
$-(L^2 - 25L) = 0$

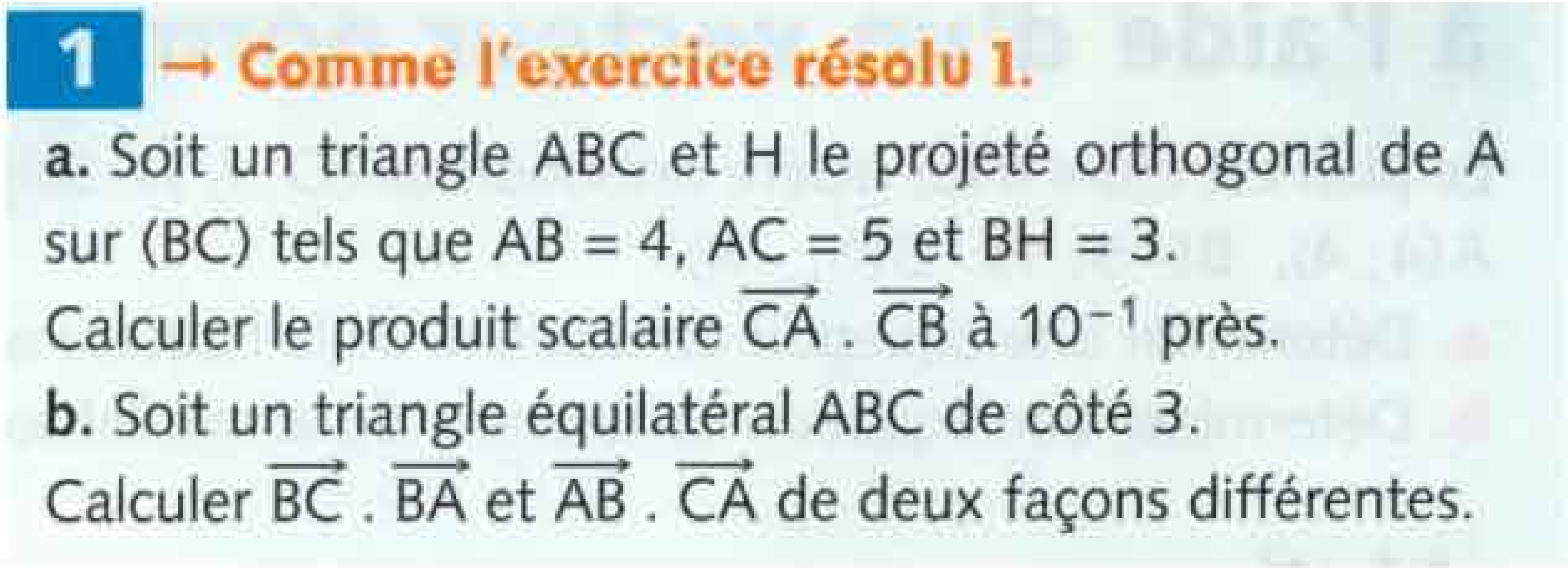
$-[(L - \frac{25}{2})^2 - \frac{625}{4}] = 0$

$\Delta = 25^2 - 4 \times (-1) \times 0$
$= 625$

On a : $x_1 = \frac{-25 - \sqrt{625}}{-2} = 25$ $x_2 = \frac{-25 + \sqrt{625}}{-2} = 0$

1b).





1 → Comme l'exercice résolu 1.

a. Soit un triangle ABC et H le projeté orthogonal de A sur (BC) tels que AB = 4, AC = 5 et BH = 3.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ à 10^{-1} près.

b. Soit un triangle équilatéral ABC de côté 3.
Calculer $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ de deux façons différentes.

ABC est équilatéral
donc H est le milieu de [AC] .

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CA}$$

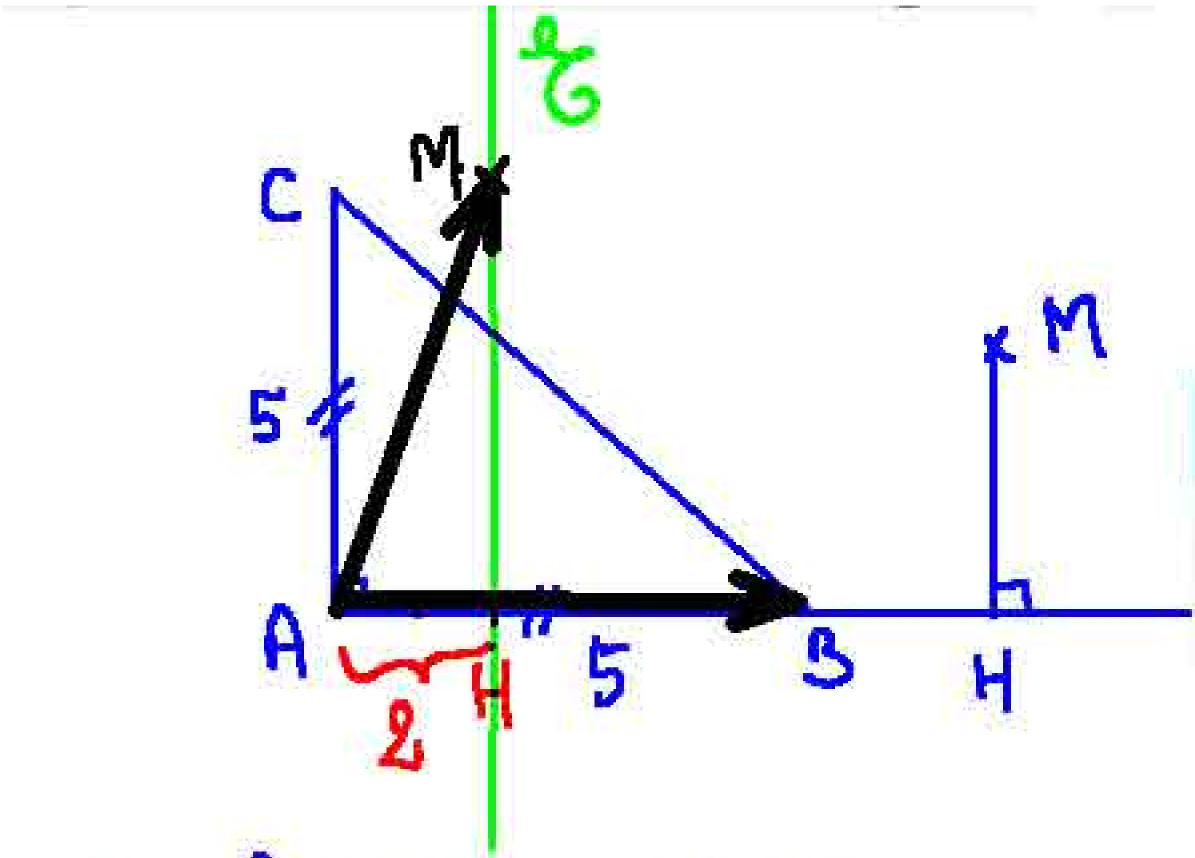
$= -AH \times CA$ (les 2 vecteurs sont de sens contraires).

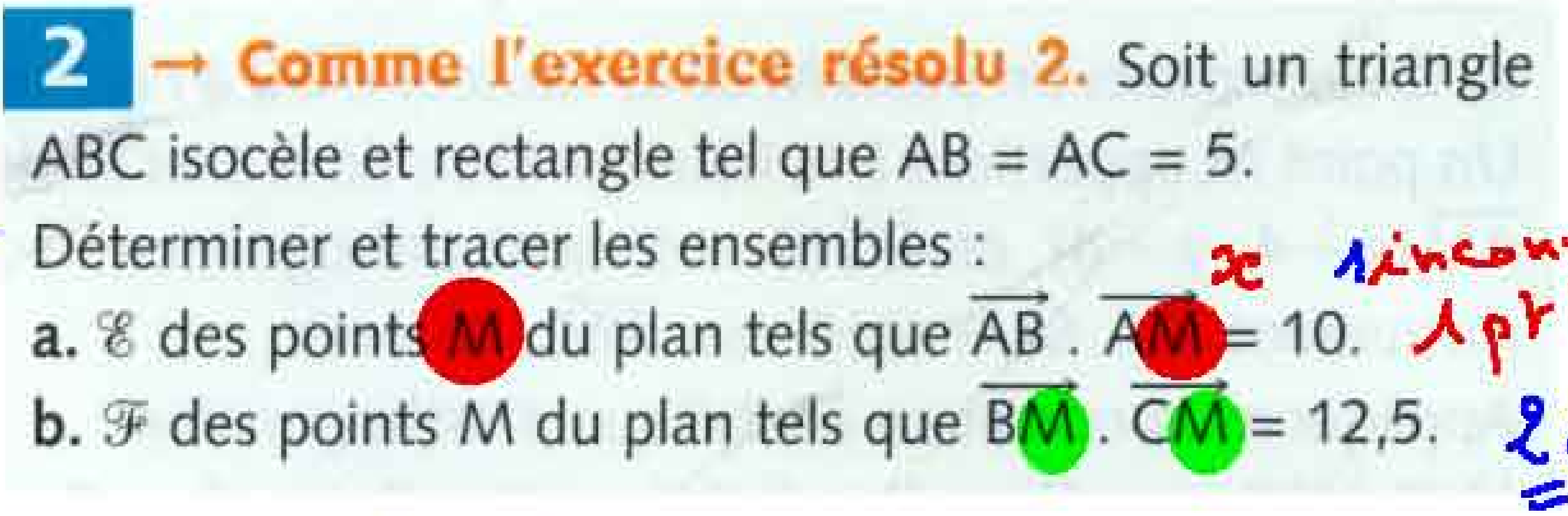
$$= -\frac{3}{2}\times 3 = \boxed{-\frac{9}{2}}$$

2e méthode : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$= -\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(3^2+\cancel{3^2}-\cancel{3^2}\right) = \boxed{-\frac{9}{2}}$$





2 → **Comme l'exercice résolu 2.** Soit un triangle ABC isocèle et rectangle tel que AB = AC = 5.
Déterminer et tracer les ensembles :
a. ℰ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 10$.
b. ℱ des points M du plan tels que $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 12{,}5$.

x 1 inconnue = 1 pt M.

2 inconnus =

a) phase d'analyse :

soit M un pt du plan tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} > 0$

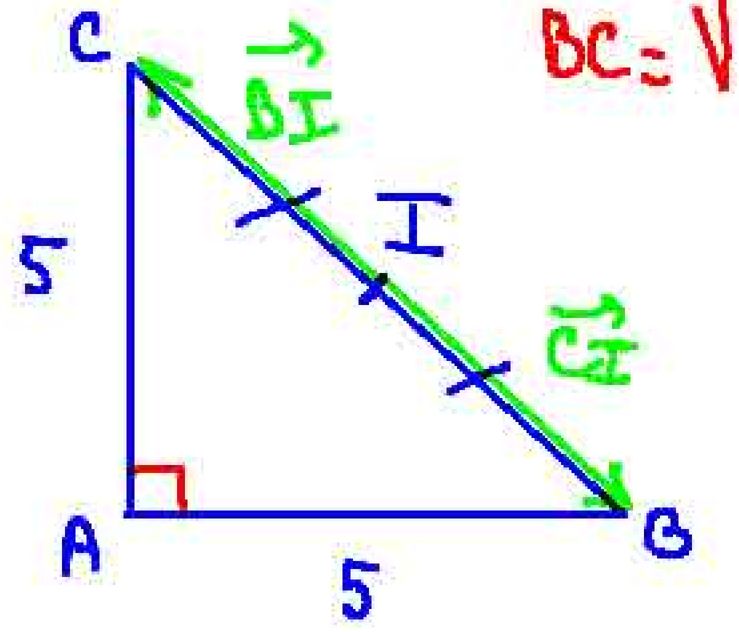
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = AB \times AH = 10$ d'où $\boxed{AH = 2}$

$5 \; AH = 10$

𝒞 est la perpendiculaire à (AB) passant par H situé à AH=2.

En effet : soit M ∈ 𝒞, alors :

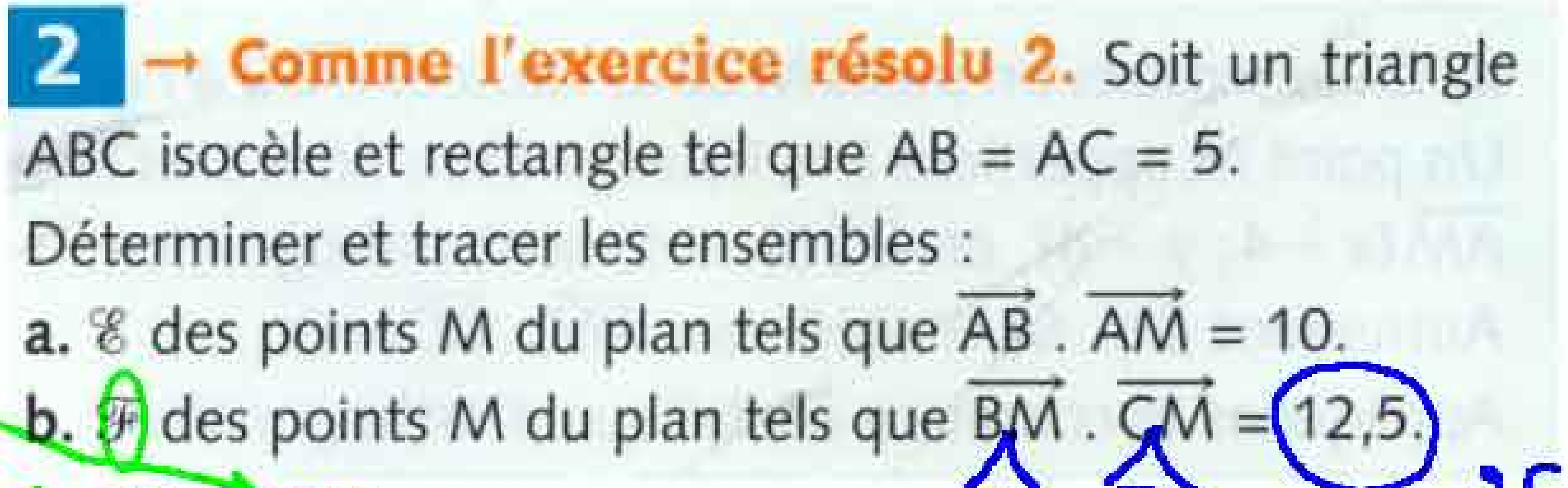
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = AB \times AH = 5 \times 2 = \boxed{10}$$



$BC = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

Cercle de centre O de rayon R

$\mathcal{C}_{O,R} = \{ M \in \mathcal{P} \, , \; OM = R \}$



2 → **Comme l'exercice résolu 2.** Soit un triangle ABC isocèle et rectangle tel que AB = AC = 5.

Déterminer et tracer les ensembles :

a. ℰ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 10$.

b. ℱ des points M du plan tels que $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 12,5$.

I I

$\frac{25}{2}$

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IM})$$

$$= \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IM}^2$$

$$= -BI \times CI + \overrightarrow{IM} \cdot (\underbrace{\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI}}_{\vec{0}}) + IM^2$$

$$= -\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 + 0 + IM^2$$

$$= -\frac{25}{2} + IM^2$$

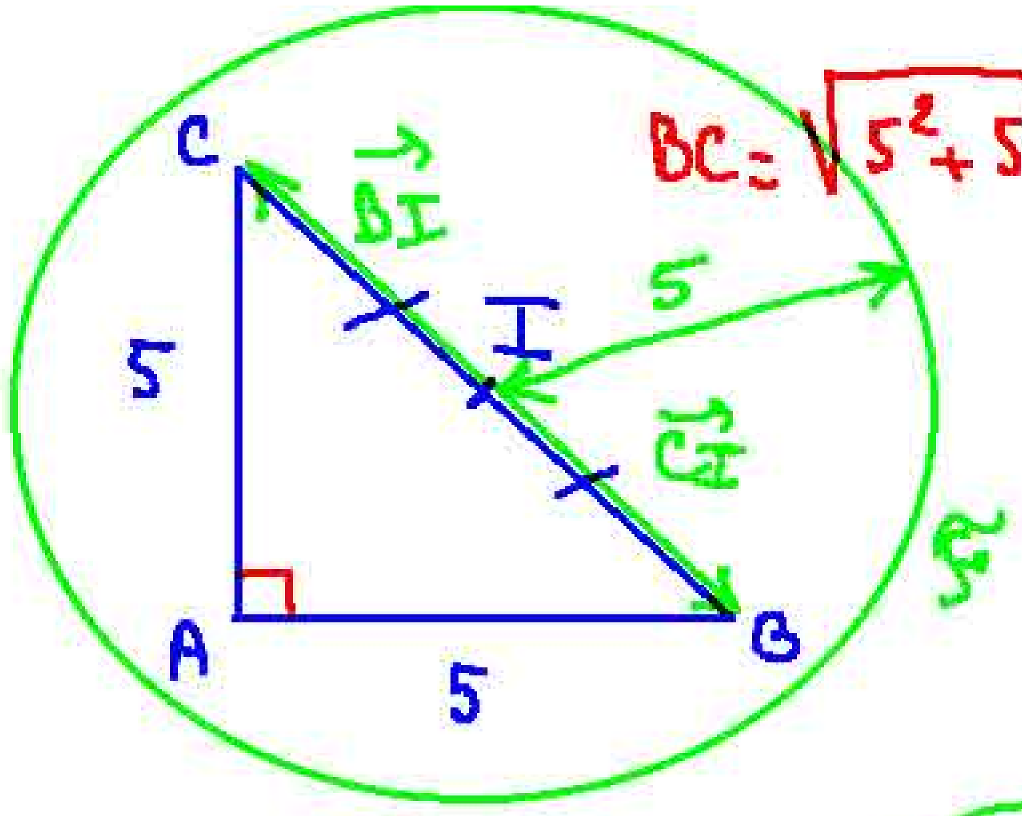
$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{25}{2}$ Ainsi $-\frac{25}{2} + IM^2 = \frac{25}{2}$ Ainsi $IM^2 = 25$

$IM = 5$

ℱ est donc le cercle de centre I, de rayon 5.

Cercle de centre O de rayon R

$\mathcal{C}_{O,R} = \{M \in \mathcal{P},\ OM = R\}$



$BC = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$

2 → **Comme l'exercice résolu 2.** Soit un triangle ABC isocèle et rectangle tel que AB = AC = 5.

Déterminer et tracer les ensembles :

a. $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 10$.

b. $\mathscr{F}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM} = 12,5$.

I I

$\frac{25}{2}$

$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM} = (\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM})\cdot(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IM})$$

$$= \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IM}^2$$

$$= -BI\times CI + \overrightarrow{IM}\cdot(\underbrace{\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}}_{\vec{0}}) + IM^2$$

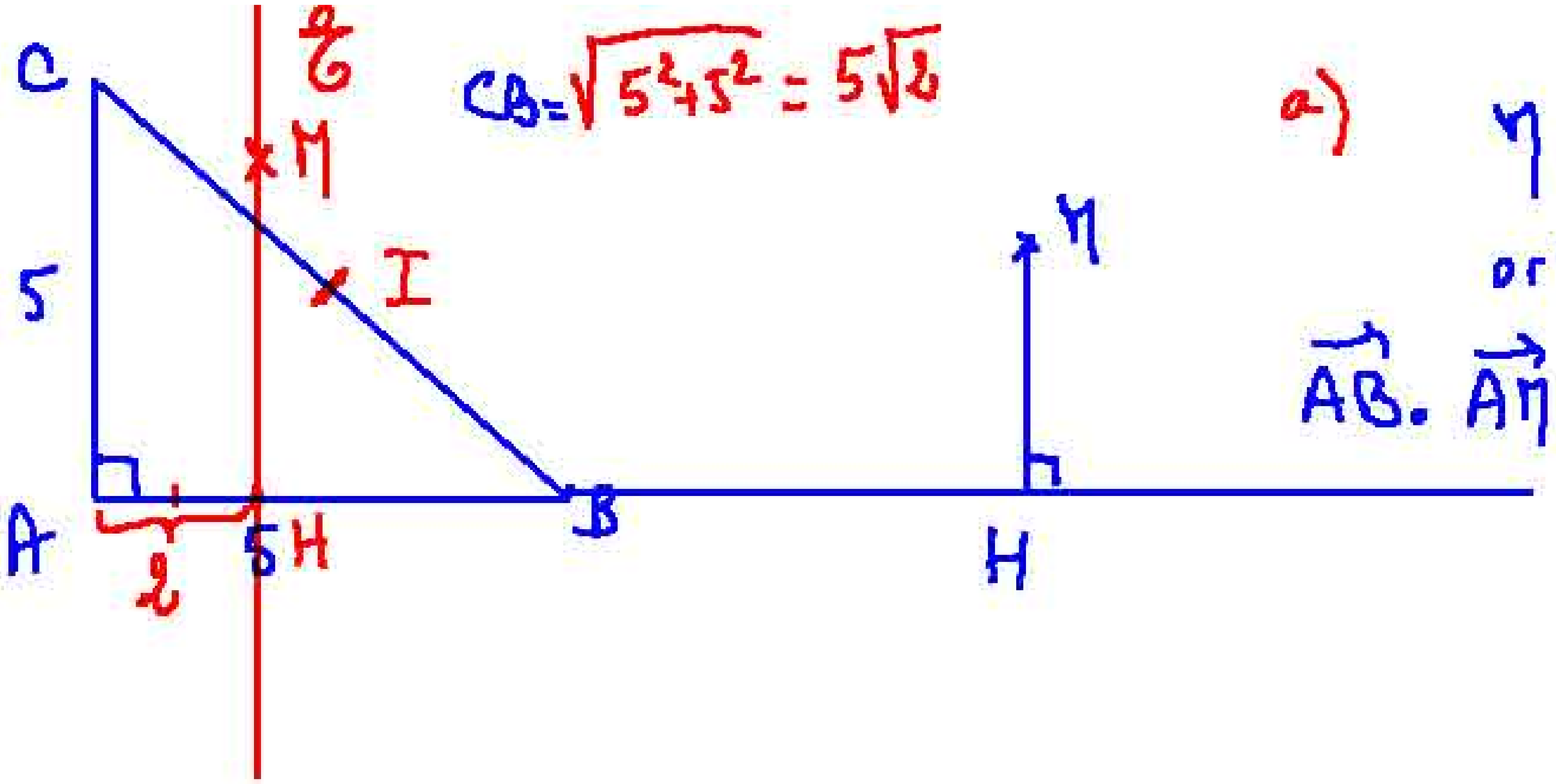
$$= -\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 + 0 + IM^2$$

$$= -\frac{25}{2} + IM^2$$

$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM} = \frac{25}{2}$ Ainsi $-\frac{25}{2} + IM^2 = \frac{25}{2}$ Ainsi $IM^2 = 25$

$\boxed{IM = 5}$

$\mathscr{F}$ est donc le cercle de centre I, de rayon 5.



$CB=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$

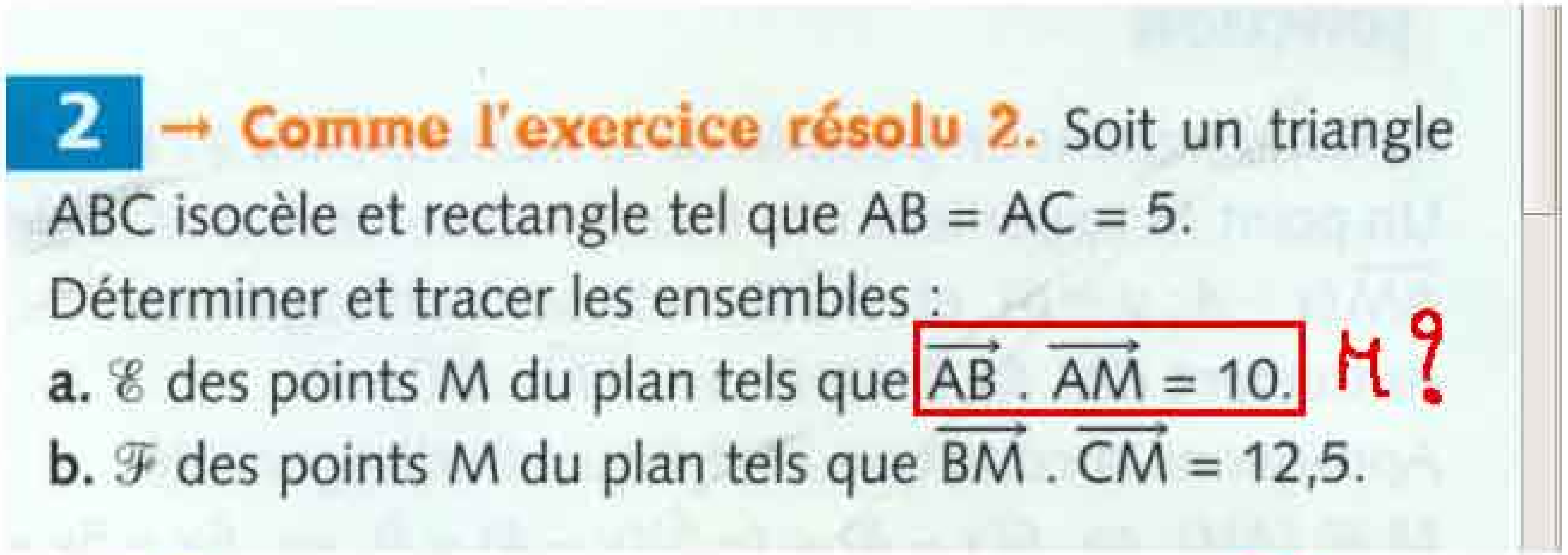
a) $M \in \mathcal{P}$, H est le projeté orthogonal de M sur (AB)

$\vec{AB}\cdot\vec{AM} = AB \times AH = 10$

$5 \times AH = 10$

$\underline{\underline{AH}} = \frac{10}{5} = \underline{\underline{2}}$

b) $M \in \mathcal{P}$.



2 → **Comme l'exercice résolu 2.** Soit un triangle ABC isocèle et rectangle tel que AB = AC = 5.

Déterminer et tracer les ensembles :

a. ℰ des points M du plan tels que $\boxed{\vec{AB}\cdot\vec{AM} = 10.}$ M ?

b. ℱ des points M du plan tels que $\vec{BM}\cdot\vec{CM} = 12{,}5$.

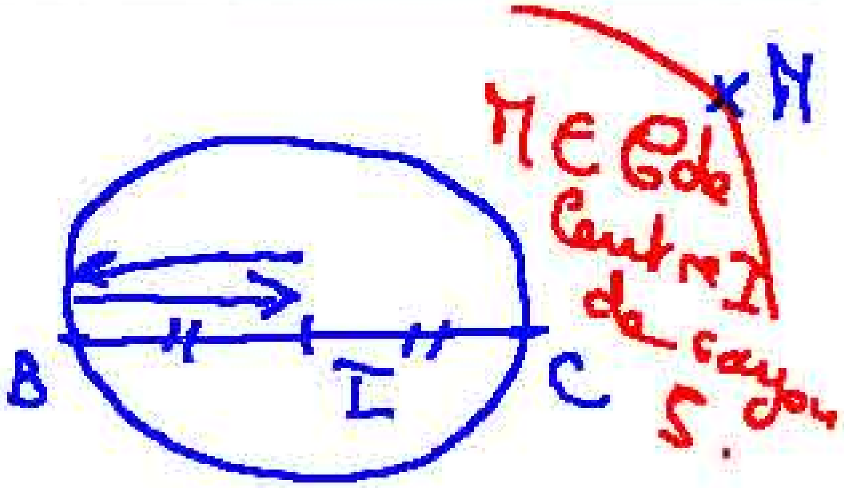
$\underset{I}{\vec{BM}}\cdot\underset{I}{\vec{CM}} = 12{,}5$

$(\vec{BI}+\vec{IM})\cdot(\vec{CI}+\vec{IM}) = 12{,}5$

$$\underbrace{\vec{BI}\cdot\vec{CI}} + \underbrace{\vec{BI}\cdot\vec{IM} + \vec{IM}\cdot\vec{CI}}_{\vec{IM}\cdot(\underbrace{\vec{BI}+\vec{CI}}_{\vec{0}})} + \underbrace{\vec{IM}^2} = 12{,}5$$

$-BI^2 \quad + \quad 0 \quad + \vec{IM}^2 = 12{,}5$

$-(\frac{5}{2}\sqrt{2})^2 \quad + IM^2 = 12{,}5$



$M \in \mathcal{C}$ de centre I de rayon 5.

$IM^2 = 25$ $\quad$ $\boxed{IM=5}$

2. Avec des coordonnées

> Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$. On a alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer la formule $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ pour un vecteur $\vec{u}(x, y)$.

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ $\qquad$ $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$

$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ $\qquad$ $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$

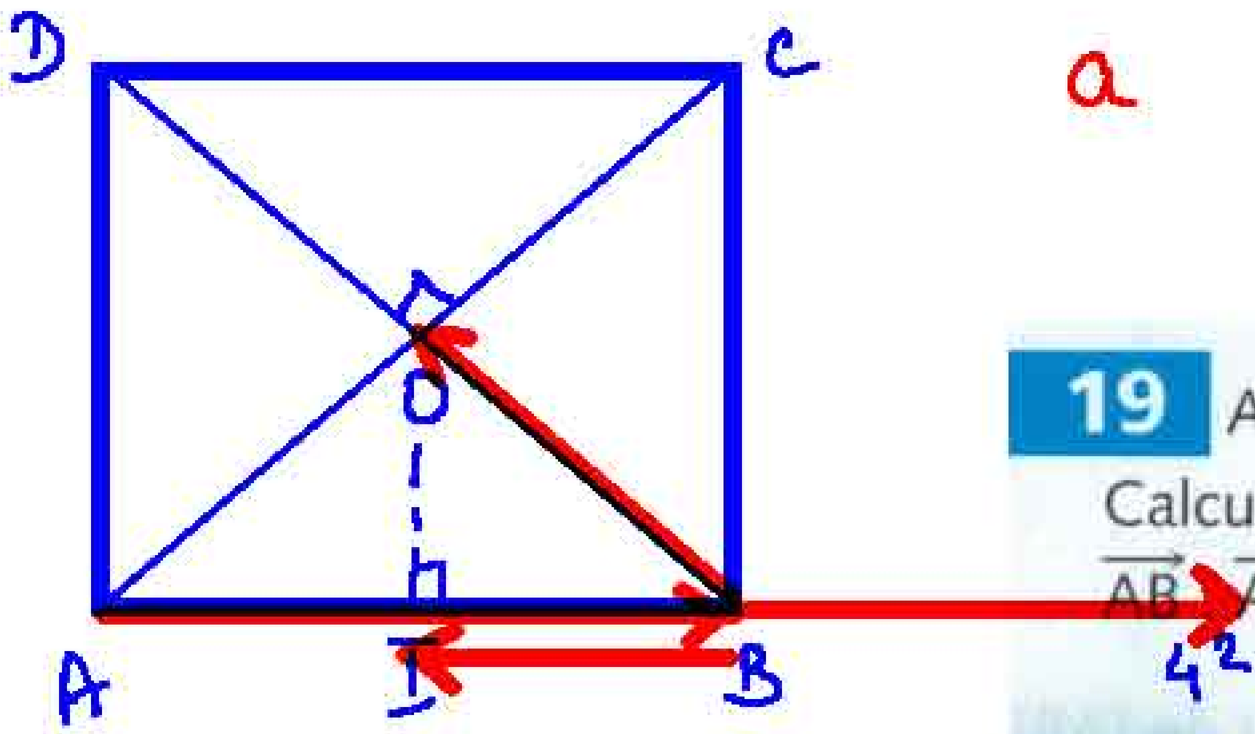
$$\vec{v} - \vec{u} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j}$$

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2\right) \quad \circledast$$

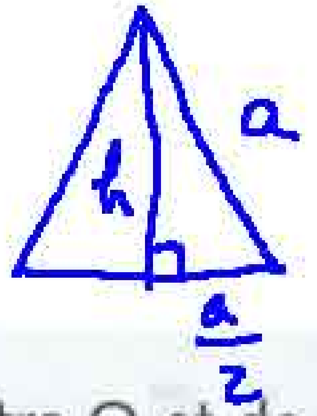
$$= \frac{1}{2}\left(\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{x'^2} + \cancel{y'^2} - \left(\cancel{x^2} - 2x'x + \cancel{x'^2} + \cancel{y'^2} - 2y'y + \cancel{y^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x'x + 2y'y\right) = \boxed{x'x + y'y}$$



a

$\boxed{\sqrt{2}\ a}$

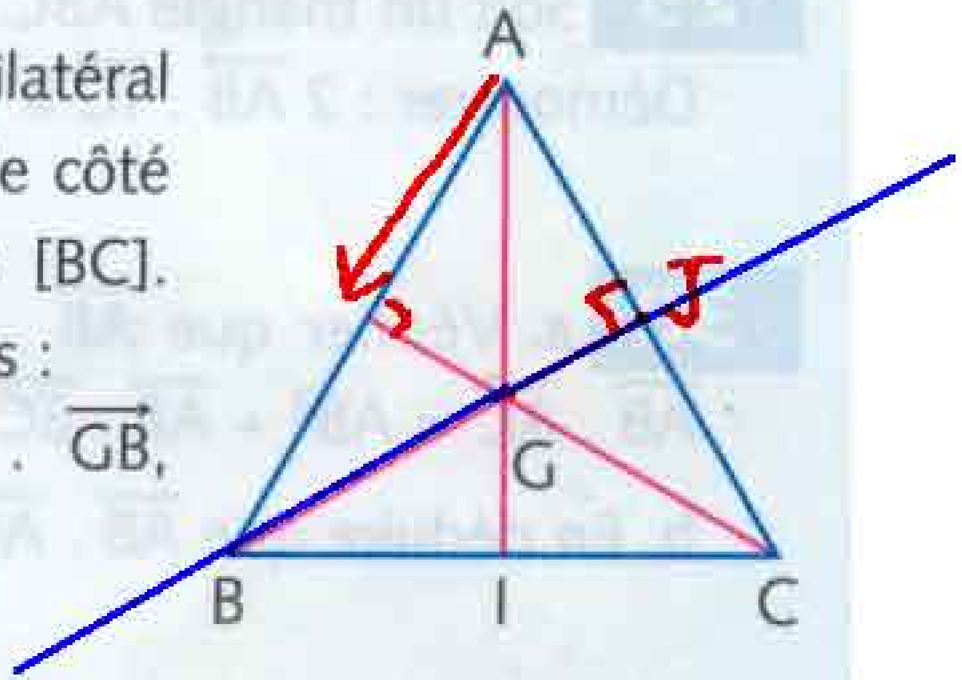


$h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

19 ABCD est un carré de centre O et de côté 4.
Calculer les produits scalaires :
$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC}$

4^2 0

20 ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité G et de côté 6. On note I le milieu de [BC].
Calculer les produits scalaires :
18 $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$, 18 $\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{GA}\,.\,\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{IG}\,.\,\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IB}\,.\,\overrightarrow{IC}$.



21 Soit un carré ABCD de centre O et de côté *a*. On appelle J le milieu de [BC] et I le milieu de [AB].
Calculer $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{JI}$, $\overrightarrow{CD}\,.\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{OC}$ en fonction de *a*.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BO}$$
$$= -AB \times AI$$
$$= -8$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = -OA \times OC$$
$$= -\left(\frac{4}{2}\sqrt{2}\right)^2$$
$$= -8$$

$$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GJ}\cdot\overrightarrow{GB}$$
$$= -GJ \times GB$$
$$= -\frac{1}{3}\left(6\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{2}{3}\left(6\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{6}^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{2}{\cancel{3}} \times \cancel{6}^2 = -2 \times \frac{3}{\cancel{4}} \times \cancel{2} \times 2 = \boxed{-6}$$

3. Formule du cosinus

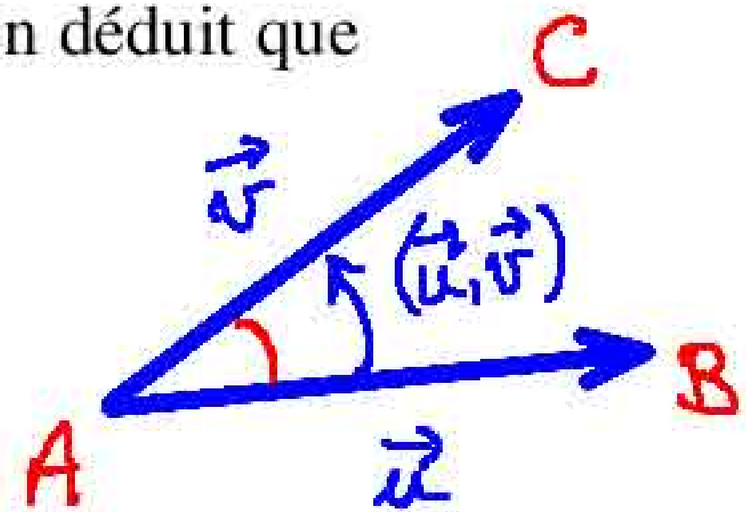
> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
> On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Démonstration

On considère un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ et les points A et B tels que $\vec{OA}=\vec{u}=\|\vec{u}\|\vec{i}$ et $\vec{OB}=\vec{v}$. Les coordonnées polaires de B sont $(\|\vec{v}\|,(\vec{u},\vec{v}))$. On a donc :
$x_{\vec{u}}=\|\vec{u}\|$, $y_{\vec{u}}=0$, $x_{\vec{v}}=\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ et $y_{\vec{v}}=\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})$ et on en déduit que
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Conséquence

> Si A, B et C sont trois points distincts,
> $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos(\widehat{BAC})$.



POINT MÉTHODE pour les exercices

$\|\vec{u}+\vec{v}\|$: on peut passer par le produit scalaire.

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u}} + \vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$= \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$$

$\|\vec{AB}+\vec{AC}\|$: on calcule d'abord $(\vec{AB}+\vec{AC})^2$

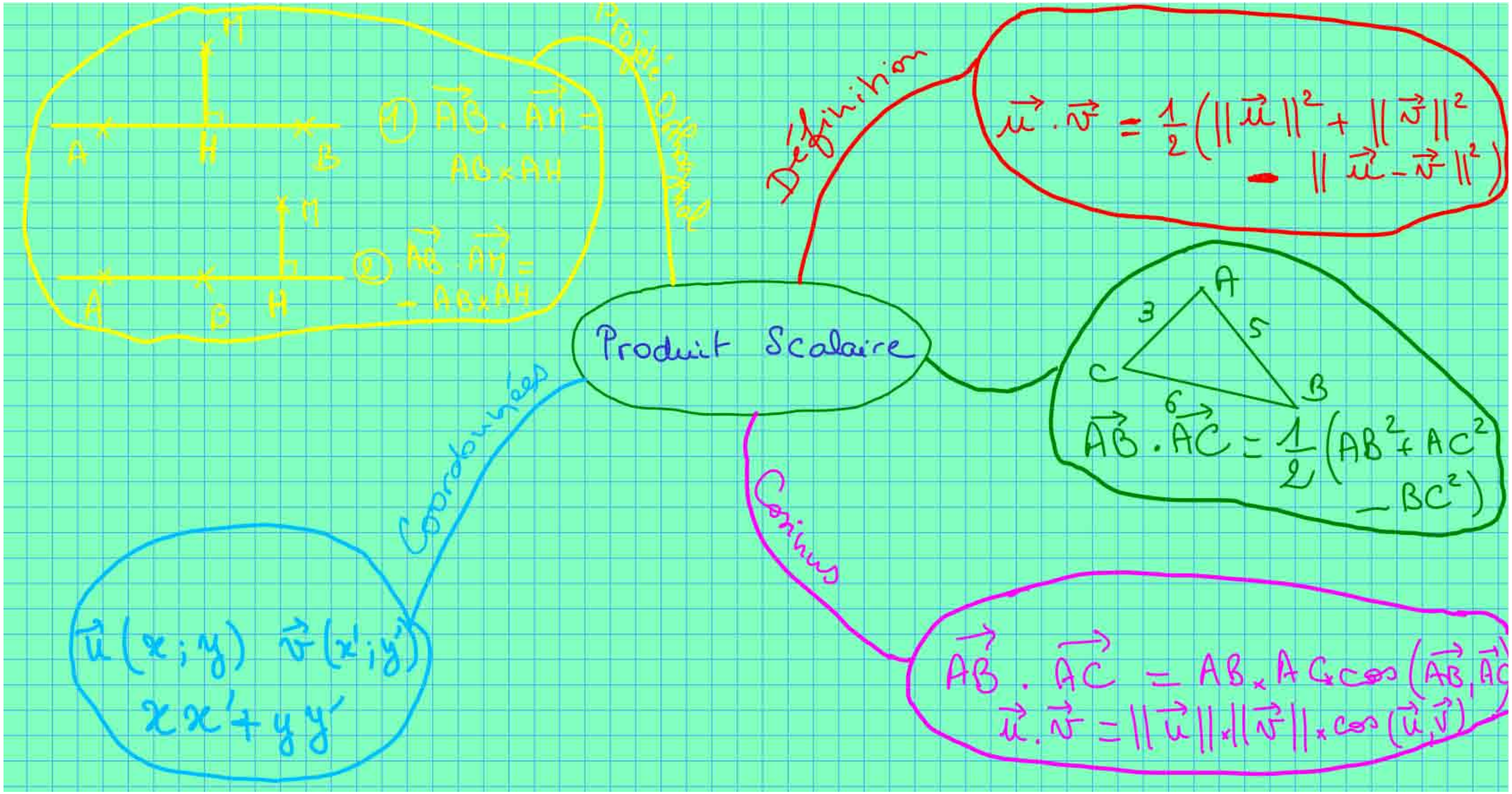
$$(\vec{AB}+\vec{AC})^2 = \vec{AB}^2 + 2\,\vec{AB}\cdot\vec{AC} + \vec{AC}^2$$

$$(2\vec{AB}+3\vec{AC})^2 = (2\vec{AB})^2 + 2(2\vec{AB})\cdot(3\vec{AC}) + (3\vec{AC})^2$$

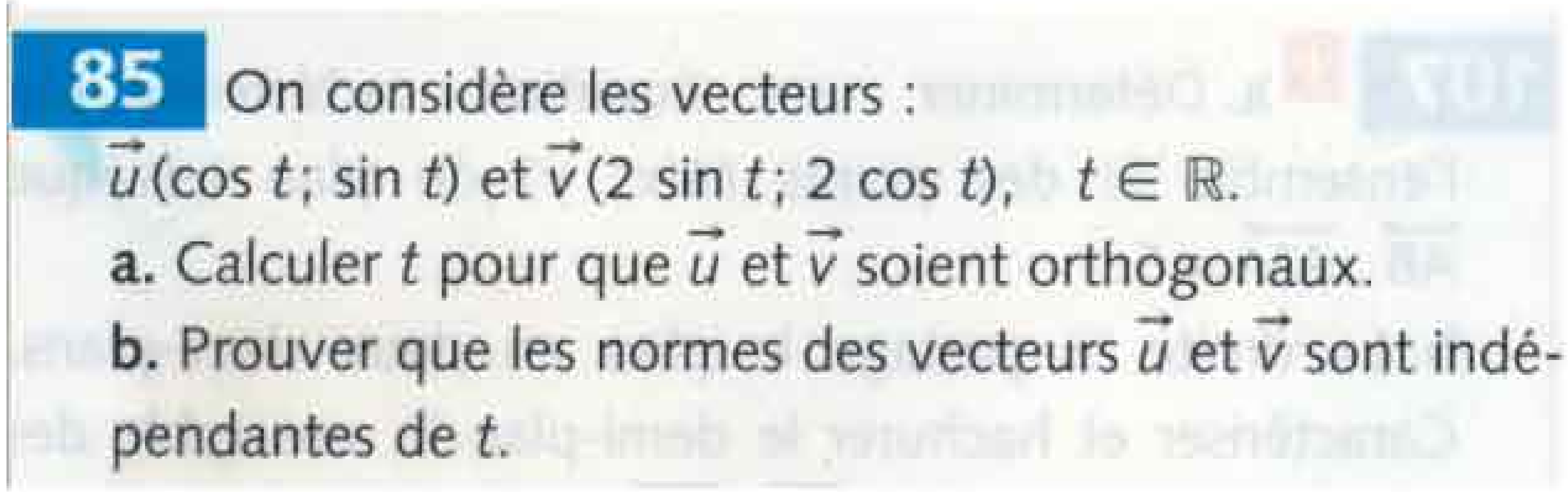
$$= 4\,\vec{AB}^2 + 12\,\vec{AB}\cdot\vec{AC} + 9\,\vec{AC}^2$$

$$(\vec{u}-3\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 6\,\vec{u}\cdot\vec{v} + 9\,\vec{v}^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{5}{3}\vec{v}\right) = \frac{1}{4}\vec{u}' + \frac{5}{3}\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \frac{25}{9}\vec{v}^2$$



20091110-ProduitScalaire



85 On considère les vecteurs :
$\vec{u}(\cos t ; \sin t)$ et $\vec{v}(2 \sin t ; 2 \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$.
a. Calculer t pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
b. Prouver que les normes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont indépendantes de t.

a) $\vec{u}.\vec{v} = 2 \cos t \sin t + 2 \sin \cos t$

$= 4 \cos t \sin t$

$\vec{u}.\vec{v} = 0$ ssi $4 \cos t \sin t = 0$

$\cos t = 0$ ou $\sin t = 0$

$t = \pm \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $t = 0$ ou $t = \pi$

$S = \left\{ -\frac{\pi}{2} ; 0 ; \frac{\pi}{2} ; \pi \right\}$

b) $\|\vec{u}\|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$

$= 1$ $\qquad$ $\|\vec{u}\| = 1$

$\|\vec{v}\|^2 = (2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2$

$= 4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t$

$= 4(\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1})$

$= 4$ $\qquad$ $\|\vec{v}\| = 2$

Les normes des vect $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien indépendantes de t.

(93.) $\vec{n}(a;b)$

a) A(0;5) B(1;7)

$\vec{AB}(1;2)$ 1 vect dir de (a)

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=0$

$a\times 1 + b\times 2 = 0$

$a+2b=0$

$a=-2b$

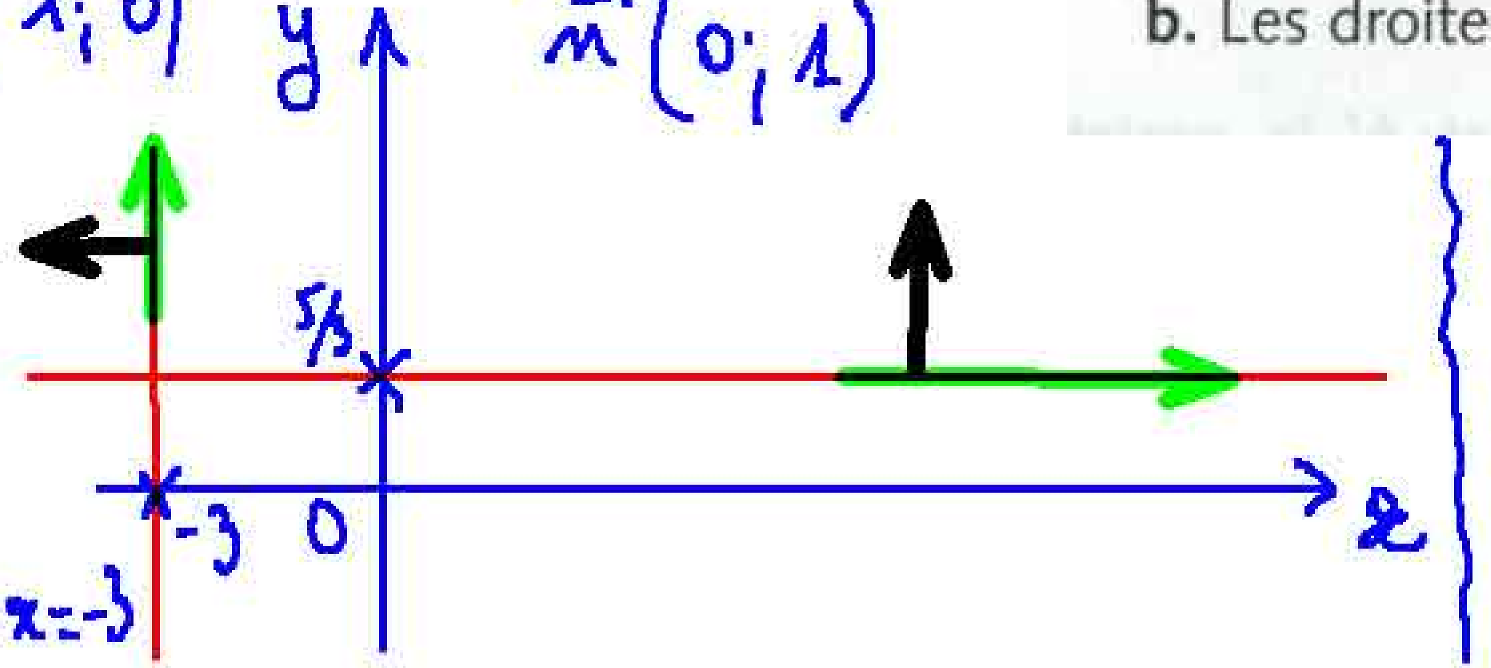
$\vec{n}(2;-1)$

b) $x=-3$

$\vec{u}(0;1)$ $\vec{n}(1;0)$

c) $3y=5$ $y=\frac{5}{3}$

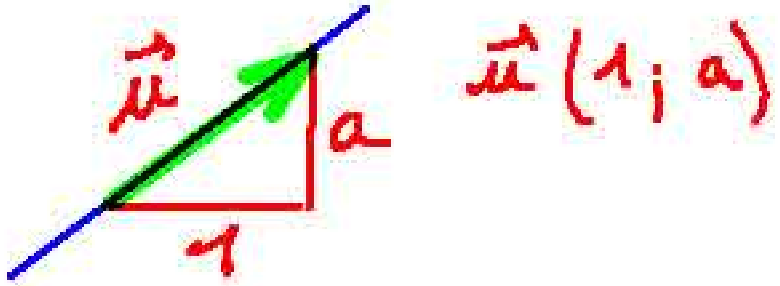
$\vec{u}(1;0)$ $\vec{n}(0;1)$

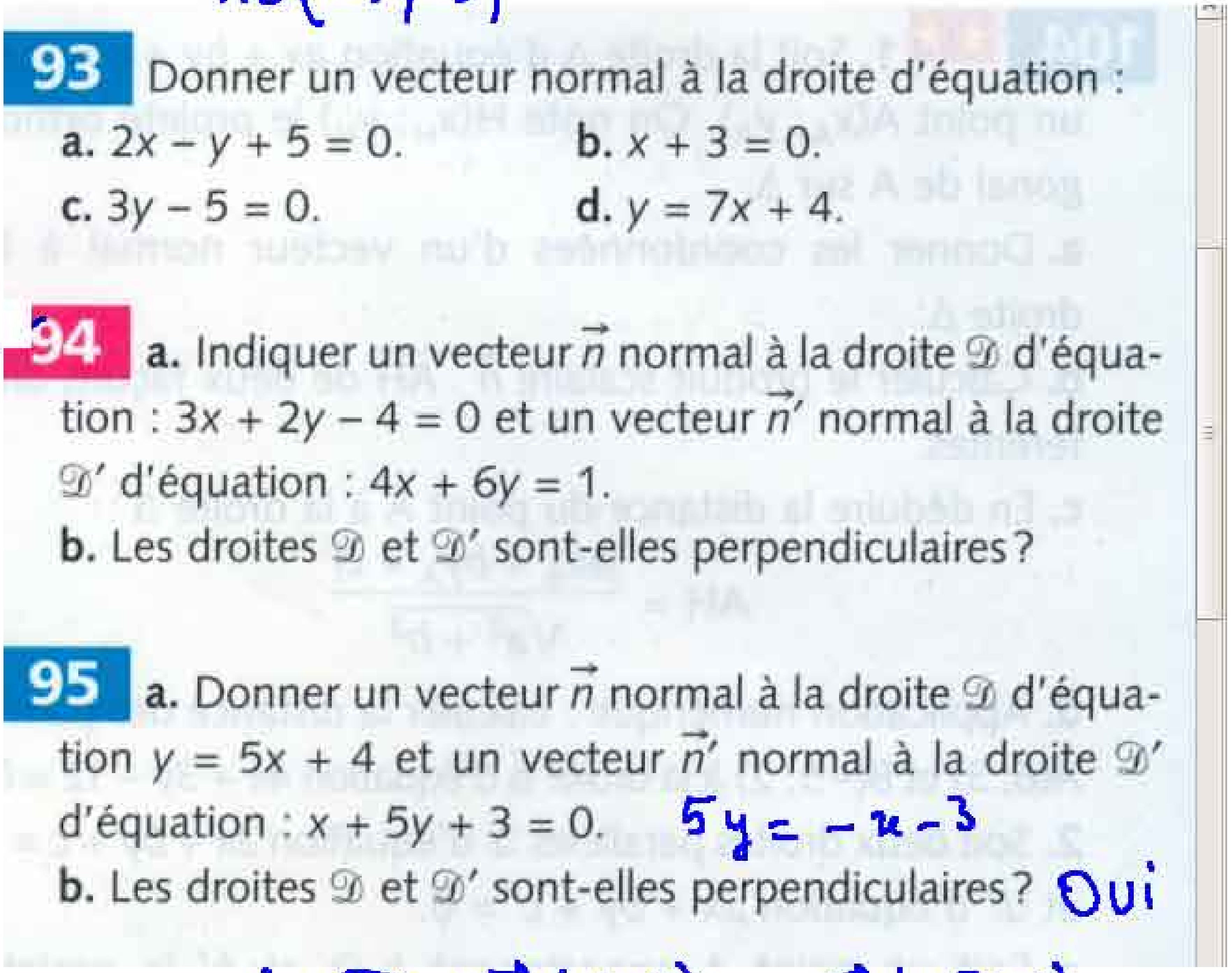


d) $a=7$ coeff dir.

$\vec{u}(1;7)$

$\vec{n}(-7;1)$





93 Donner un vecteur normal à la droite d'équation :

a. $2x - y + 5 = 0$. **b.** $x + 3 = 0$.

c. $3y - 5 = 0$. **d.** $y = 7x + 4$.

94 **a.** Indiquer un vecteur $\vec{n}$ normal à la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $3x + 2y - 4 = 0$ et un vecteur $\vec{n}'$ normal à la droite $\mathcal{D}'$ d'équation : $4x + 6y = 1$.

b. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles perpendiculaires ?

95 **a.** Donner un vecteur $\vec{n}$ normal à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 5x + 4$ et un vecteur $\vec{n}'$ normal à la droite $\mathcal{D}'$ d'équation : $x + 5y + 3 = 0$. $5y=-x-3$

b. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles perpendiculaires ? Oui

(95) a) $\vec{u}(1;5)$ $\vec{n}(-5;1)$

b) $\vec{u}'(1;-\frac{1}{5})$ $\vec{n}'(\frac{1}{5};1)$

b) $\vec{u}\cdot\vec{u}' = 1\times 1 + 5\times(-\frac{1}{5})$

$= 1 - 1 = 0$ Oui

20091113-Ex93-95page241

PRODUIT SCALAIRE : Test du Vendredi 13 Novembre 2009
PS1 - 1 heure

Exercice 1 : Calcul d'angle

Soit les vecteurs $\vec{u}\binom{1}{2}$ et $\vec{v}\binom{-3}{2}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Faire une figure.
2. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
3. Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
4. En déduire la valeur exacte de $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ et les deux valeurs possibles pour l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.
5. En vous servant du dessin, déterminer laquelle de ces deux valeurs est la bonne.

Exercice 2 : Orthogonalité de deux vecteurs

Soit a un nombre réel. On donne les points $A(a, 1)$, $B(2, 3)$ et $C(0, -1)$. Déterminer a pour que le triangle ABC soit rectangle en B.

Exercice 3 : Construction ...

Construire un triangle ABC tel que

$$AB = 5, \qquad AC = 4, \qquad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10.$$

Exercice 4 : Utilisation des propriétés du produit scalaire

On donne $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/3$. Calculer

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v})$

c) $(3\vec{u} + 2\vec{v})^2$

Exercice 5 : Du calcul ...

a) Calculer $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ lorsque

$$\|\vec{v}_1\| = 3, \qquad \|\vec{v}_2\| = 8, \qquad (\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = 120^\circ.$$

b) Calculer $\|\vec{v}_2\|$ lorsque

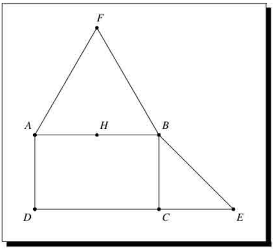
$$\|\vec{v}_1\| = 5, \qquad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 50, \qquad (\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) = \frac{\pi}{3}$$

c) Calculer $(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2})$ lorsque

$$\|\vec{v}_1\| = 15, \qquad \|\vec{v}_2\| = 8, \qquad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 60$$

Exercice 6 : À partir d'un dessin

On considère la figure ci-dessous dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: $ABCD$ est un rectangle, $AB = 5$, $BC = 3$, H est le milieu du segment $[AB]$, BCE est rectangle isocèle en C et ABF est équilatéral.



Calculer les produits scalaires suivants :

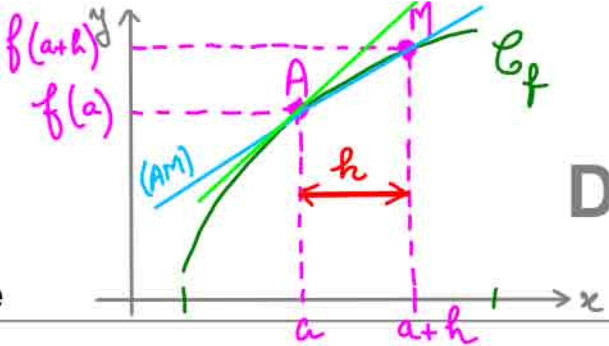
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$, b) $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BE}$, c) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DC}$,

d) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BF}$, e) $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{CE}$, f) $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC}$,

Dérivation

(AM) a pour coefficient directeur :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h - a}$$



A. Nombre dérivé

1- Coefficient directeur d'une sécante (AM)

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I, *a* un nombre réel de I et C*f* la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère. Soit *h* un réel non nul.
Si A est le point de C*f* d'abscisse *a*, M un point de C*f* d'abscisse $x = a+h$, le coefficient directeur de la sécante (AM) à C*f* est : $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

$R(0{,}5\,;\,1{,}25)$ $S(0{,}5+h\,;\,y_S)$ $x_S = 0{,}5 + h$ où h représente 1 pixel de large.

y_S est l'ordonnée de S.

$h = 10^{-3}$ (1pixel)

$y_S = f(0{,}5+10^{-3})$

$y_S = f(0{,}501)$

$S(0{,}501\,;\,1{,}252)$

$x \mapsto 2(x-0{,}5)+1{,}25$

Déplacer le curseur sur la courbe d'un pixel à droite de R. Soit S le point correspondant.

3. Sauvegarder les coordonnées du point S dans les mémoires C et D ainsi que le quotient $M = \dfrac{\overset{y_S}{D} - \overset{y_R}{B}}{\underset{x_S}{C} - \underset{x_R}{A}}$. Que représente ce quotient? $\dfrac{y_S - y_R}{x_S - x_R}$ COEFFICIENT DIRECTEUR DE LA DROITE (RS) $M \simeq 2$

4. Soit la fonction : $x \mapsto M(x - A) + B$. Vérifier que la représentation graphique de cette fonction est la droite (RS).

5. Revenir au cadrage de la question 1. $x \in [-5\,;\,5]$ et $y \in [-3\,;\,3]$
Quelle semble être la position de la droite (RS) par rapport à la courbe représentative de *f*? C'est la tangente à la courbe au point $R(0{,}5\,;\,1{,}25)$

6. Faire afficher le « nombre dérivé » de la fonction *f* en 0,5 fourni par la calculatrice. Comparer le nombre obtenu au coefficient directeur de la droite (RS).

→ ▸ 2nd $\boxed{\text{CALC}}$ ▸ 6 $\boxed{dy/dx}$ → le graphe s'affiche en mode TRACE.
on tape le x donc 0.5
et ça affiche $\boxed{\dfrac{dy}{dx}} = 2$

$\boxed{\dfrac{dy}{dx}}$ Notation de LEIBNIZ
Philosophe et Mathématicien (17e s)
qui a introduir le calcul différenciel.

$\dfrac{dy}{dx}$ est le Nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse x.

Pour $x = 0{,}5$ $\dfrac{dy}{dx} = 2$.

C'est LE COEFFICIENT DIRECTEUR DE LA TANGENTE à la courbe au point d'abscisse x.

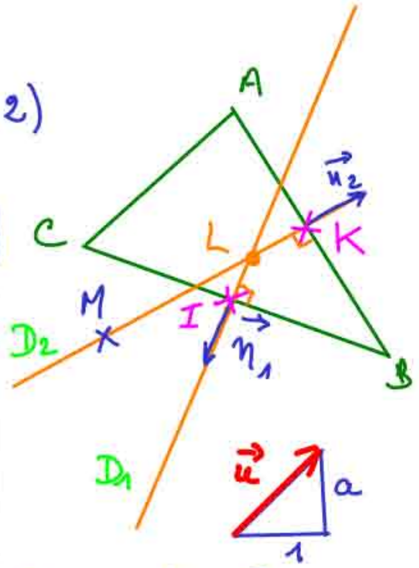
a) $\vec{n}_1 \cdot \vec{BC} = 0$ $\vec{n}_1(x ; y)$ $\vec{BC}(-7 ; 2)$

$-7x + 2y = 0$ $y = \frac{7}{2}x$ $\vec{n}_1\left(1 ; \frac{7}{2}\right)$

100 Soit les points A(1 ; – 2), B(5 ; 2) et C(– 2 ; 4).

a. Déterminer une équation cartésienne de deux médiatrices du triangle ABC.

b. En déduire les coordonnées du centre L du cercle circonscrit au triangle ABC.



le coeff directeur de la médiatrice D_1 de [BC] vaut $a = \frac{7}{2}$

$$y = \frac{7}{2}x + \boxed{b}$$

I milieu de [BC] $I\left(\frac{5+(-2)}{2} ; \frac{2+4}{2}\right)$ $I\left(\frac{3}{2} ; 3\right)$

la médiatrice D_1 passe par I donc les coord. de I vérifient son équation :

$3 = \frac{7}{2} \times \frac{3}{2} + b$ $3 = \frac{21}{4} + b$ $b = 3 - \frac{21}{4}$

$b = -\frac{9}{4}$

D_1 : $\boxed{y = \frac{7}{2}x - \frac{9}{4}}$

② Médiatrice de $\vec{AB}$ $\vec{AB}(4 ; 4)$

K milieu de [AB] $K\left(\frac{1+5}{2} ; \frac{-2+2}{2}\right)$ $K(3 ; 0)$

Soit $M(x ; y)$ un point de la médiatrice de [AB] (D_2) :

$\vec{MK} \cdot \vec{AB} = 0$ $\vec{MK}(3 - x ; -y)$

$4(3-x) + 4(-y) = 0$

$3 - x - y = 0$ D_2 : $\boxed{y = 3 - x}$

③ L, centre du cercle circonscrit, est l'intersection des médiatrices.
Ses coord vérifient le système : $\begin{cases} y = \frac{7}{2}x - \frac{9}{4} \\ y = 3 - x \end{cases}$

$\frac{7}{2}x - \frac{9}{4} = 3 - x$

$\frac{7}{2}x + x = 3 + \frac{9}{4}$

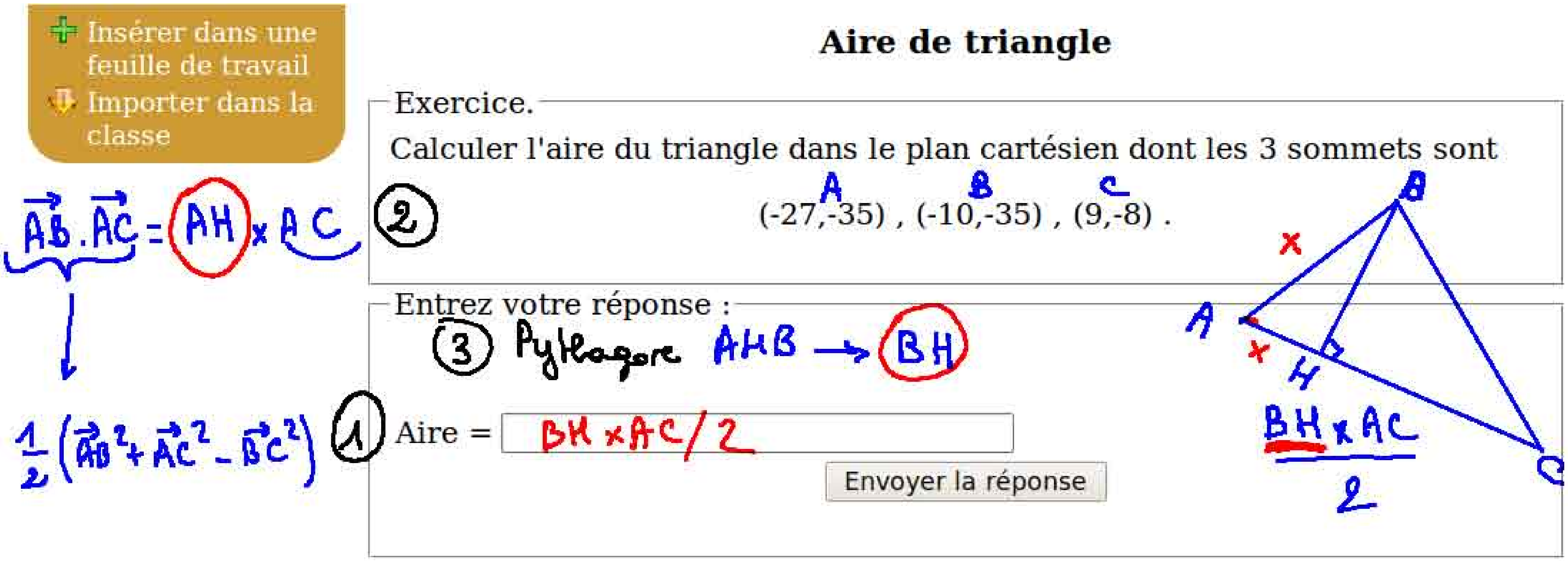
$\frac{9}{2}x = \frac{21}{4}$

$x = \frac{\cancel{3}\times 7}{2\times \cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{9}_3} = \frac{7}{6}$

$x = \frac{7}{6}$

$y = 3 - \frac{7}{6} = \frac{11}{6}$

$L\left(\frac{7}{6} ; \frac{11}{6}\right)$



Aire de triangle

Exercice.

Calculer l'aire du triangle dans le plan cartésien dont les 3 sommets sont

$\overset{A}{(-27,-35)}$, $\overset{B}{(-10,-35)}$, $\overset{C}{(9,-8)}$.

Entrez votre réponse :

Aire = BH ×AC/ 2

② $\underbrace{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}_{\downarrow} = AH \times \underbrace{AC}$

$\frac{1}{2}(\vec{AB}^2+\vec{AC}^2-\vec{BC}^2)$

③ Pythagore AHB → BH

① Aire = BH ×AC/ 2

$\frac{BH \times AC}{2}$

ROUSSEAU 13/11/09

Olivier

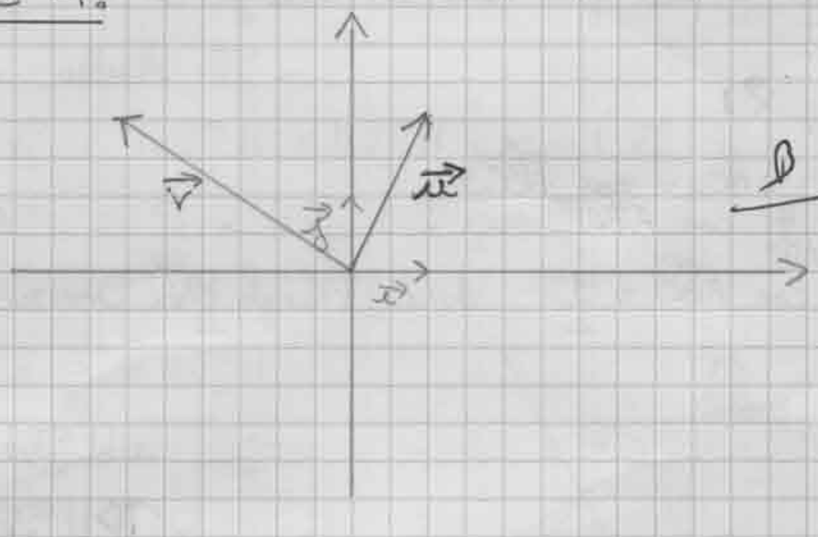
Devoir de Mathématique.

PS1

Note :	Observations :
16,5 +0,5 rédaction	Très bon devoir $\frac{17}{20}$

4 Exercice 1 :

1°)



B

2°) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1 \times (-3) + 2 \times 2$
$= -3 + 4$
$= +1$

3°) * $\|\vec{u}\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2}$
$= \sqrt{1 + 4}$
$= \sqrt{5}$

* $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2}$
$= \sqrt{9+4}$
$= \sqrt{13}$

4°) $\vec{u}\cdot\vec{v} = u \times v \times \cos(\vec{u};\vec{v})$
$1 = \sqrt{5} \times \sqrt{13} \times \cos(\vec{u};\vec{v})$
$1 = \sqrt{65} \times \cos(\vec{u};\vec{v})$
→ $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{65}}$
→ D'où l'angle $(\vec{u}.\vec{v})$ mesure soit 83° ou −83°. B

5°) D'après le dessin, la bonne valeur est 83°

Exercice 2 : 2

On veut que ABC soit rectangle en B.

Soient les vecteurs $\overrightarrow{BA}(a-2\,;-2)$ et $\overrightarrow{BC}(-2\,;-4)$

Je calcule : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (a-2)\times(-2)+(-2)\times(-4)$

$= -2a+4+8$

$= -2a+12$

$\rightarrow a = \frac{-12}{-2} = 6$

Donc a vaut 6 pour que ABC soit rectangle en B.

TB

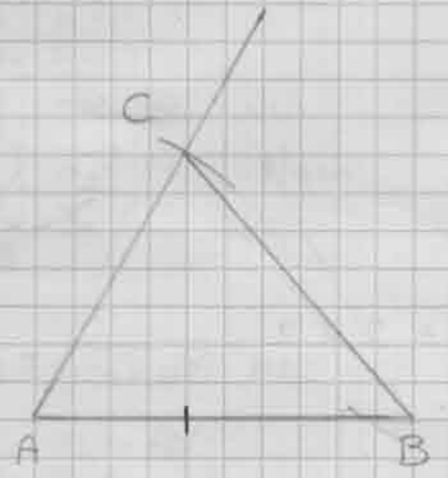
Exercice 3 : 2

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{CAB}$

$10 = 5 \times 4 \cos CAB$

$\frac{10}{20} = \cos\widehat{ABC}$

$\rightarrow \cos\widehat{CAB} = \frac{1}{2}$ donc l'angle $\widehat{CAB}$ mesure 60°. TB



TB

Exercice 4 : 3

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 3 \times \frac{1}{2}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$

b) $(3\vec{u}+2\vec{v})\cdot(3\vec{u}-2\vec{v})$

$= 3\vec{u}\times 3\vec{u} - 3\vec{u}\times 2\vec{v} + 2\vec{v}\times 3\vec{u} - 2\vec{v}\times 2\vec{v}$

$= 9\vec{u}^2 - \cancel{6\vec{u}\times\vec{v}} + \cancel{6\vec{v}\times\vec{u}} - 4\vec{v}^2$) → Identité Remarquable

$= 9(2)^2 - 4(3)^2$

$= 9\times 4 - 4\times 9$

$= 0$

TB

20091120-CopieOlivierProduitScalaire2

c) $(3\vec{u}+2\vec{v})^2 = (3\vec{u})^2 + 2\times 3\times 2\times(\vec{u}\cdot\vec{v}) + (2\vec{v})^2$

$= 9\times 4 + 12\times 3 + 4\times 9$

$= 108$

3 **Exercice 5:**

a) $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\| \times \|\vec{V_2}\| \times \cos(\widehat{\vec{V_1},\vec{V_2}})$

$= 3 \times 8 \times \cos 120°$

$= -12$

b) Je calcule $\vec{V_2}$:

$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\| \times \|\vec{V_2}\| \times \cos(\vec{V_1},\vec{V_2})$

$50 = 5 \times \|\vec{V_2}\| \times \cos\frac{\pi}{3}$

$50 = 5 \times \frac{1}{2} \times \|\vec{V_2}\|$

$50 = \frac{5}{2} \times \|\vec{V_2}\|$ TB

$\rightarrow \|\vec{V_2}\| = \frac{50\times 2}{5}$

$\|\vec{V_2}\| = 20$

c) Je calcule $(\widehat{\vec{V_1},\vec{V_2}})$

$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\| \times \|\vec{V_2}\| \times \cos(\widehat{\vec{V_1},\vec{V_2}})$

$60 = 15 \times 8 \times \cos(\widehat{\vec{V_1},\vec{V_2}})$

$60 = 120 \times \cos(\widehat{\vec{V_1},\vec{V_2}})$

$\rightarrow \cos(\widehat{\vec{V_1},\vec{V_2}}) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

Donc $(\widehat{\vec{V_1},\vec{V_2}})$ mesure $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, ce qui fait 60°, soi

$\frac{\pi}{3}$ B

2,5 **Exercice 6:** Comme AH est le milieu de [AB], $H = \frac{AB}{2} =$

a) $\vec{AB}\cdot\vec{AH} = AB \times AH$

$= 5 \times \frac{5}{2}$

$= \frac{25}{2} = 12,5$

ROUSSEAU
Olivier
PS1

13/11/09

Devoir de Mathématique.

Note :
16,5
+0,5 rédaction

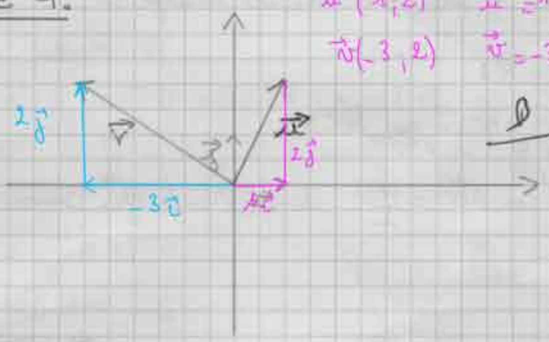
Observations :
Très bon devoir

$\frac{17}{20}$

4 **Exercice 1 :**

1°)

$\vec{u}(1;2)$ $\vec{u} = 1\vec{i} + 2\vec{j}$
$\vec{v}(-3;2)$ $\vec{v} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$



β

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

2°) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1 \times (-3) + 2 \times 2$
$= -3 + 4$
$= +\boxed{1}$

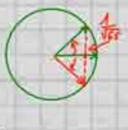
$\vec{u}(x;y)$

3°) * $\|\vec{u}\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2}$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$
$= \sqrt{1 + 4}$
$= \sqrt{5}$

* $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2}$ $\|\vec{v}\|^{\textcircled{2}} = (-3)^2 + 2^2$
$= \sqrt{9 + 4}$
$= \sqrt{13}$

$x \xrightarrow{\cos} \cos x$
$?\ x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{65}}$

4°) $\vec{u}\cdot\vec{v} = u \times v \times \cos(\vec{u};\vec{v})$
$1 = \sqrt{5} \times \sqrt{13} \times \cos(\vec{u};\vec{v})$
$1 = \sqrt{65} \times \cos(\vec{u};\vec{v})$
$\rightarrow \cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{65}}$



→ D'où l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ mesure soit 83° ou -83°. β

20091123-DSOlivierProduitScalaire1

5°) D'après le dessin, la bonne valeur est 83°

Exercice 2 2

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$

On veut que ABC soit rectangle en B. donc on aura $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

Soient les vecteurs $\overrightarrow{BA}(a-2 ; -2)$ et $\overrightarrow{BC}(-2 ; -4)$

Je calcule $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (a-2)\times(-2)+(-2)\times(-4)$

$= -2a+4+8$

$= -2a+12$ } $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

donc $\Rightarrow$ $a = \dfrac{-12}{-2} = 6$

Donc a vaut 6 pour que ABC soit rectangle en B.

TB

Exercice 3: 2

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{CAB}$

$10 = 5\times 4 \cos \widehat{CAB}$

$\dfrac{10}{20} = \cos$ ~~ABC~~ $\widehat{CAB}$

$\rightarrow \cos\widehat{CAB} = \dfrac{1}{2}$ donc l'angle $\widehat{CAB}$ mesure 60° TB

ou −60°

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB)

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ (car $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} > 0$)

$10 = AB \times AH$

$\dfrac{10}{5} = AH$

$AH = 2$

TB

Exercice 4: 3

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 3\times \boxed{\dfrac{1}{2}}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$

1 produit scalaire

$\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = 4$
$= \|\vec{u}\|^2 = 2^2$

b) $(3\vec{u} + 2\vec{v})\cdot(3\vec{u} - 2\vec{v})$

$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B}) = \vec{A}^2 - \vec{B}^2$

$= (3\vec{u})\bullet(3\vec{u}) - (3\vec{u})\bullet(2\vec{v}) + (2\vec{v})\bullet(3\vec{u}) - (2\vec{v})\bullet(2\vec{v})$

carré scalaire de $\vec{u}$

$= 9\vec{u}^2 - \cancel{6\vec{u}\bullet\vec{v}} + \cancel{6\vec{v}\bullet\vec{u}} - 4\vec{v}^2$) → Identité Remarquable

$= 9(2)^2 - 4(3)^2$

$= 9\times 4 - 4\times 9$

$= 0$

TB

c) $(3\vec{u}+2\vec{v})^2 = (3\vec{u})^2 + 2\times3\times2\times(\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v}}) + (2\vec{v})^2$

$= 9\times4 + 12\times3 + 4\times9$

$= 108$

$(\vec{A}+\vec{B})^2 = \vec{A}^2 + 2\,\vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}^2$

3 **Exercice 5:**

a) $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = \|\vec{v_1}\| \times \|\vec{v_2}\| \times \cos(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$

$= 3 \times 8 \times \underbrace{\cos 120°}_{-\frac{1}{2}}$

$= -12$

b) Je calcule $\vec{v_2}$:

$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = \|\vec{v_1}\| \times \|\vec{v_2}\| \times \cos(\vec{v_1},\vec{v_2})$

$50 = 5 \times \|\vec{v_2}\| \times \cos\frac{\pi}{3}$

$50 = 5 \times \frac{1}{2} \times \|\vec{v_2}\|$

$50 = \frac{5}{2} \times \|\vec{v_2}\|$

$\longrightarrow \|\vec{v_2}\| = \frac{\overset{10}{\cancel{50}}\times 2}{\cancel{5}}$

$\|\vec{v_2}\| = 20$

TB

c) Je calcule $(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$

$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = \|\vec{v_1}\| \times \|\vec{v_2}\| \times \cos(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$

$60 = 15 \times 8 \times \cos(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$

$60 = 120 \times \cos(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$

$\longrightarrow \cos(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}}) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

Donc $(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$ mesure $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, ce qui fait 60°, soi

$\frac{\pi}{3}$

B

2,5 **Exercice 6:** Comme AH est le milieu de [AB], $H = \frac{AB}{2} =$

a) $\vec{AB}\cdot\vec{AH} = AB \times AH$

$= 5 \times \frac{5}{2}$

$= \frac{25}{2} = 12{,}5$

c) $(3\vec{u}+2\vec{v})^2 = (3\vec{u})^2 + 2\times 3\times 2\times(\vec{u}\cdot\vec{v}) + (2\vec{v})^2$

$= 9\times 4 + 12\times 3 + 4\times 9$

$= 108$

3 **Exercice 5:**

a) $\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = \|\vec{v_1}\| \times \|\vec{v_2}\| \times \cos(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$

$= 3 \times 8 \times \cos 120°$

$= -12$

b) Je calcule $\vec{v_2}$:

$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = \|\vec{v_1}\| \times \|\vec{v_2}\| \times \cos(\vec{v_1},\vec{v_2})$

$50 = 5 \times \|\vec{v_2}\| \times \cos\frac{\pi}{3}$

$50 = 5\times\frac{1}{2}\times\|\vec{v_2}\|$

$50 = \frac{5}{2}\times\|\vec{v_2}\|$ TB

$\rightarrow \|\vec{v_2}\| = \frac{50\times 2}{5}$

$\|\vec{v_2}\| = 20$

c) Je calcule $(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$

$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = \|\vec{v_1}\|\times\|\vec{v_2}\| \times \cos(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$

$60 = 15 \times 8 \times \cos(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$

$60 = 120 \times \cos(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$

$\rightarrow \cos(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}}) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

Donc $(\widehat{\vec{v_1},\vec{v_2}})$ mesure $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, ce qui fait 60°, soi

$\frac{\pi}{3}$ B

2,5 **Exercice 6:** Comme AH est le milieu de [AB], $H = \frac{AB}{2} =$

a) $\vec{AB}\cdot\vec{AH} = AB\times AH$

$= 5\times\frac{5}{2}$

$= \frac{25}{2} = 12{,}5$

Exercice 7 : À partir d'un dessin

On considère la figure ci-dessous dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$: $ABCD$ est un rectangle, $AB = 5$, $BC = 3$, H est le milieu du segment $[AB]$, BCE est rectangle isocèle en C et ABF est équilatéral.

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB \times AH$
$= 5 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$

b) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BE} = -BH \times BE'$
$= -\frac{5}{2} \times 3 = -\frac{15}{2}$

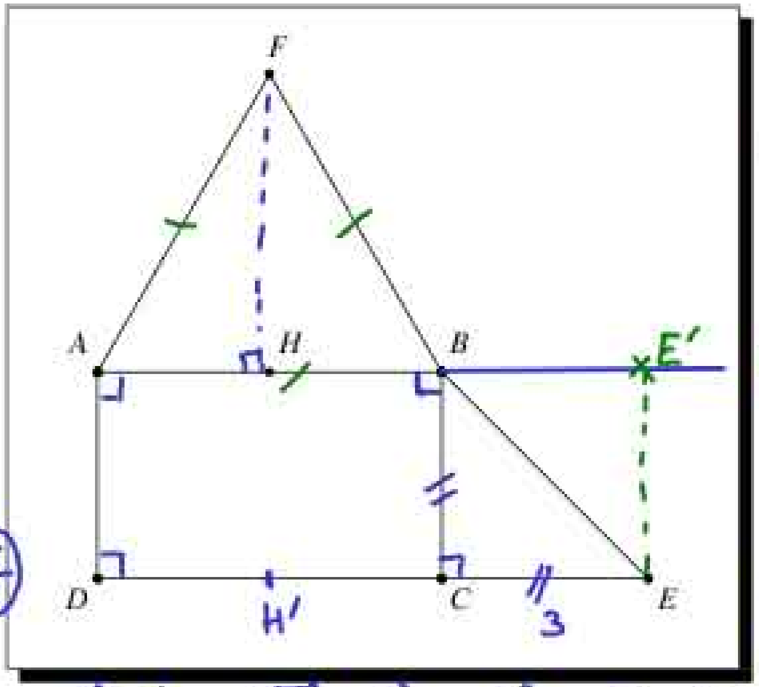
c) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}$
$= AH \times AB = \frac{25}{2}$

d) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HF})\cdot(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HF})$
$= \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BH} + \underbrace{\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HF}}_{0}$
$+ \underbrace{\overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{BH}}_{0} + \overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{HF}$
$= -AH^2 + HF^2$
$= -\frac{25}{4} + \frac{75}{4} = \boxed{\frac{25}{2}}$

d) autre
$AH^2 + HF^2 = AF^2$
$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + HF^2 = 5^2$
$HF^2 = 25 - \frac{25}{4}$
$= \frac{3}{4} \times 25 = \frac{75}{4}$

e) $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{CE} = (\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{CE}$
$= \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CE} + \underbrace{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CE}}_{0}$
$= HB \times CE = \frac{5}{2} \times 3 = \boxed{\frac{15}{2}}$

f)
$\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HD}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$
$= \overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{DC}$
(H se projette en A sur (AD))
$= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{H'D}\cdot\overrightarrow{DC} = 3^2 - \frac{5}{2} \times 5$
$= 9 - \frac{25}{2} = \frac{18-25}{2} = \boxed{-\frac{7}{2}}$



Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$, b) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BE}$, c) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DC}$,
d) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF}$, e) $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{CE}$, f) $\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{AC}$,

Ex 4 page 70 . $\qquad f(x) = 2x^3 - 3x^2$

$f'(a)$? $\qquad (a+h)^3 = (a+h)^2 \times (a+h)$

Calculer $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^3 - 3(a+h)^2 \\ &= 2\left(a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3\right) - 3\left(a^2 + 2ah + h^2\right) \\ &= \underbrace{2a^3 + 6a^2h + 6ah^2 + 2h^3 - 3a^2 - 6ah - 3h^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\cancel{2a^3}+6a^2h+6ah^2+2h^3\cancel{-3a^2}-6ah-3h^2-(\cancel{2a^3}\cancel{-3a^2})}{h} \\ &= \frac{6a^2h+6ah^2+2h^3-6ah-3h^2}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(6a^2+6ah+2h^2-6a-3h)}{\cancel{h}} \\ &= \boxed{6a^2-6a} + \underbrace{(6a+2h-3)\times h}_{\downarrow\,0} \end{aligned}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 6a^2 - 6a$$

$$\boxed{f'(a) = 6a^2 - 6a}$$

Exercices . Démontrer que le nombre dérivé en a des fonctions suivantes est :

1) $f(x) = x^3 + x$ $\qquad f'(a) = 3a^2 + 1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

* 2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$ pour tout $a \neq 0$

** 3) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ pour tout $a \in]0;+\infty$

4) $f(x) = x^2$ $\qquad f'(a) = ?$

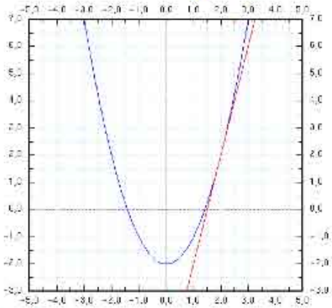
3- Interprétation graphique du nombre dérivé

Soit f une fonction dérivable en a . On appelle C la représentation graphique de f dans un repère. La courbe C admet une tangente au point d'abscisse a et $f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente.

Une équation de la tangente au point d'abscisse a est $\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a).}$

Exemple

$y = f'(a)\,x + b$ et on cherche b



Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2$.
Cette fonction est dérivable en 2 et $f'(2) = 4$.
L'équation de la tangente en 2 est $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$
soit $y = 4(x - 2) + 2$
soit $y = 4x - 6$.
La fonction $x \rightarrow 4x - 6$ est une approximation affine de la fonction $x \rightarrow x^2 - 2$ au voisinage de 2.
Pour x proche de 2, $4x - 6$ et $x^2 - 2$ donnent des résultats très voisins.

La tangente passe par $A(a; f(a))$. Les coordonnées de A vérifient l'équation de la tangente :

$$f(a) = f'(a)\cdot a + b \quad \text{d'où} \quad b = f(a) - f'(a)\cdot a$$

D'où la tangente a pour équation :

$$y = f'(a)\,x + f(a) - f'(a)\cdot a$$

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

B. Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Déf !

Soit *f* une fonction dérivable sur *D*.
La fonction qui à *x* associe $f'(x)$, le nombre dérivé de *f* en *x*, est appelée fonction dérivée de *f* sur *D* et on la note $\boxed{f'}$.

Le tableau suivant donne les fonctions dérivées des fonctions usuelles.

		f	f'
Fonction constante	$\mathbb{R}$	k	0
Fonction affine	$\mathbb{R}$	$ax+b$	a
Carré	$\mathbb{R}$	x^2 x^2	$2x$ $2x^1$
Cube	$\mathbb{R}$	x^3 x^3	$3x^2$ $3x^2$
Puissance de x	$\mathbb{R}$	x^n $(n > 0)$ x^n	$n\,x^{n-1}$ nx^{n-1}
Fonction inverse	$\mathbb{R}^+$ $[0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
Fonction racine carrée	$\mathbb{R}^{+*}$ $]0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

C. Opérations sur les fonctions dérivables

1- Somme et produit par un réel

> Soient *u* et *v* deux fonctions dérivables sur D et *k* un réel.
> La fonction dérivée de $u + v$ est $\boxed{(u + v)' = u' + v'}$.
> La fonction dérivée de ku est $\boxed{(ku)' = ku'}$.

La dérivée d'1 somme c'est la somme des dérivées.

Exemple
Calculer la dérivée de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$.
La dérivée de x^2 est $2x$, donc la dérivée de $2x^2$ est $2 \times 2x = 4x$.
La dérivée de $-3x$ est -3.
La dérivée de 5 est 0.
On en déduit que la dérivée de *f* est $\underline{f'(x) = 4x - 3}$.

$$2x^2 \quad -3x \quad +5$$
$$2\times 2x \quad -3\times 1 \quad +0$$

2- Produit et quotient de deux fonctions

> Soient u et v deux fonctions dérivables sur D.
> La fonction dérivée de uv est $\boxed{(uv)' = u'v + v'u}$.
> Si v ne s'annule pas sur D,
> - la fonction dérivée de $\frac{1}{v}$ est $\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}}$
> - la fonction dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$

Exemple
Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \overset{u(x)}{(2x + 1)}\overset{\times\ v(x)}{(x^2 - 3)}$.
On pose $u(x) = 2x + 1$, d'où $u'(x) = 2$ et $v(x) = x^2 - 3$, d'où $v'(x) = 2x$.
On a alors :

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$$
$$= 2\ (x^2 - 3) + 2x\ (2x + 1)$$
$$= 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x$$

$f'(x) = 6x^2 + 2x - 6$

- Dériver $g(x) = \dfrac{2x+1 \xleftarrow{} u(x)}{x^2-3 \xleftarrow{} v(x)}$

Pour que g existe je dois avoir : $x^2 - 3 \neq 0$

$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \neq 0$

$x \neq \sqrt{3}$ et $x \neq -\sqrt{3}$ $\qquad D_g = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

$u(x) = 2x + 1 \qquad\qquad v(x) = x^2 - 3$

$u'(x) = \boxed{2} \qquad\qquad v'(x) = \boxed{2x}$

$$g'(x) = \frac{\boxed{u'(x)}\, v(x) - u(x)\, \boxed{v'(x)}}{v^2(x)} = \frac{\boxed{2}(x^2-3) - (2x+1)\boxed{2x}}{(x^2-3)^2}$$

on ne développe jamais le dénominateur

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 6 - 4x^2 - 2x}{(x^2-3)^2}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{-2x^2 - 2x - 6}{(x^2-3)^2}}$$

- Dériver $k(x) = \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{1}{2x+1}$ $\qquad \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$u'(x) = 2 \qquad k'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$

$$k'(x) = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

- Dériver $j(x) = -x^4 + 3x^2 - \dfrac{7}{\sqrt{x}}$

$$j'(x) = -4x^3 + 3 \times 2x + \frac{7}{2x\sqrt{x}}$$

$f(x) = -\dfrac{7}{\sqrt{x}} = -7 \times \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$ $\qquad u(x) = \sqrt{x} \quad u' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = -7x\left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{7}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 6x + \frac{7}{2x\sqrt{x}}$$

20091127-Derive3b

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x \in \mathbb{R}^*$

Soit a un réel non nul.

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}$$

$$= \frac{a - (a+h)}{a(a+h)}$$

$$= \frac{-h}{a(a+h)}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \boxed{-\frac{1}{a^2}}$$

Le nombre dérivé de la fonction inverse est $-\frac{1}{a^2}$ pour tout $a \neq 0$.

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad x \in [0\,;+\infty[$

Soit $a \in]0\,;+\infty[$ et $h > 0$

$$f(a+h) - f(a) = \sqrt{a+h} - \sqrt{a}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$$

on utilise la quantité conjuguée

$$(\sqrt{a+h})^2 - (\sqrt{a})^2$$

$$= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})}{h}\frac{(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \xrightarrow[h\to 0]{} \boxed{\frac{1}{2\sqrt{a}}}$$

La nombre dérivé en $a > 0$ de la fonction racine est donc $\frac{1}{2\sqrt{a}}$

$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 2(x^2 - 3) + 2x(2x + 1) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$.

Remarque : on aurait pu développer $f(x)$; $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$ d'où $f'(x) = 6x^2 + 2x - 6$.

3- Dérivée de *u*(*ax* + *b*)

$f : x \longmapsto ax+b \overset{u}{\longmapsto} u(ax+b)$

Soit u une fonction dérivable sur D, a et b deux réels tels que $ax + b \in$ D.
La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = u(ax + b)$ est $f'(x) = u'(ax + b)\times a$.

Remarque
La fonction f est la composée de la fonction u et de la fonction affine définie par $ax + b$.

Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\sqrt{2x+3}$.
On pose $u(x) = \sqrt{x}$; on a alors $f(x) = u(2x + 3)$.
Comme $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, la dérivée de f est $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2x+3}}\times 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$.

Ce théorème va nous permettre de dériver les composées de toutes les fonctions de référence vues en seconde avec une fonction affine.

D. Dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa dérivée.
Si f' est strictement positive sur I, sauf peut être en quelques points où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

$f' > 0$ f ↗ sur I

Si f' est strictement négative sur I, sauf peut être en quelques points où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

$f' < 0$ f ↘ sur I

Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Exemple
Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x$ sur $\mathbb{R}$.
La dérivée de f est $f'(x) = 2x - 3$.
C'est une fonction affine qui s'annule pour $x = 3/2$.
Sur $]-\infty ; 3/2]$ f' est négative donc f est décroissante.
Sur $[3/2 ; +\infty[$ f' est positive donc f est croissante.
On résume cette étude dans le tableau suivant :

x	- ∞		3/2		+∞
signe de $f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	- 9/4	↗	

Remarque
La fonction f admet un minimum en $x = 3/2$.
Quel que soit x, $f(x) \leqslant f(3/2)$.
Comme la dérivée s'annule en $x = 3/2$, la tangente à la courbe en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

Dérivées des fonctions composées suivantes :

- $f : x \longmapsto ax+b \xmapsto{\square^2} (ax+b)^2$
- $g : x \longmapsto ax+b \xmapsto{\square^3} (ax+b)^3$
- $h : x \longmapsto ax+b \xmapsto{\frac{1}{\square}} \dfrac{1}{ax+b}$
- $i : x \longmapsto ax+b \xmapsto{\frac{1}{\square^2}} \dfrac{1}{(ax+b)^2}$

20091130-derivation2

TEST DÉRIVÉES 30/11/2009.

1) $f(x) = -3x^2 + \frac{5}{x} + 8x - 7$ $\quad -3 \times 2x + 5\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 8$

2) $f(x) = \frac{3x-5}{5x+2}$

3) $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$

4) $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

① $f(x) = -3x^2 + \frac{5}{x} + 8x - 7$ $\qquad D_f = \mathbb{R}^*$

Sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = -3 \times 2x + 5\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 8$

$= -6x - \frac{5}{x^2} + 8$

② $f(x) = \frac{3x-5 \leftarrow u}{5x+2 \leftarrow v}$

$f = \frac{u}{v}$

$u(x) = 3x - 5$

$u'(x) = 3$

$5x + 2 \neq 0$

$5x \neq -2$

$x \neq -\frac{2}{5}$

$v(x) = 5x + 2$

$v'(x) = 5$

$\boxed{D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{5}\right\}}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{5}\right\}$

$D_f = \left]-\infty ; -\frac{2}{5}\right[\cup \left]-\frac{2}{5} ; +\infty\right[$

Pour tout $x \neq -\frac{2}{5}$,

$$f'(x) = \frac{3(5x+2) - (3x-5)5}{(5x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{15x} + 6 - \cancel{15}x \oplus 25}{(5x+2)^2} = \frac{31}{(5x+2)^2}$$

remarque : $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq -\frac{2}{5}$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{5}\right\}$

③ $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$f = \frac{1}{u}$ $\quad f' = -\frac{u'}{u^2}$ $\quad (v \times v)' = v'v + vv' = 2vv'$

$u(x) = \boxed{(\underbrace{2x-1})^{\textcircled{2}}}$ $\quad u = v^{\textcircled{2}}$ $\quad u' = \textcircled{2}vv'$

$$u'(x) = \textcircled{2} \times (\underbrace{2x-1}_{v}) \times \underbrace{2}_{v'} = 4(2x-1)$$

$$f'(x) = -\frac{4(2x-1)}{[\underbrace{\boxed{(2x-1)^2}}_{u}]^2} = -\frac{4(2x-1)^1}{(2x-1)^4} = \boxed{-\frac{4}{(2x-1)^3}}$$

$$u(x) = (2x-1)^2 = (2x-1) \times (2x-1)$$

$$u'(x) = 2(2x-1) + (2x-1)2$$

④ $f(x) = \boxed{x\sqrt{x}} + \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ $\quad D_f =]0; +\infty[$ ✓

(ou $\mathbb{R}^{+*}$)

Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \overbrace{\underset{u'}{1} \times \underset{\cdot\, v}{\sqrt{x}} \underset{+}{+} \underset{u}{x} \times \underset{\cdot\, v'}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}} \boxed{-\frac{u'(x)}{u^2(x)}}$$

avec $u(x) = \sqrt{x}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\boxed{f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}}$$

TEST Dérivées. $1^{er}/12/2009$

① $f(x) = \dfrac{5x-1}{3-2x}$

② $f(x) = x^2\sqrt{x}$

③ $f(x) = \dfrac{3x^2-5x}{x+1}$

④ $f(x) = 3x^4 - \dfrac{1}{x^2}$

---

① $f(x) = \dfrac{5x-1}{3-2x}$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{3}{2} \right\}$

$u(x) = 5x-1$ $v(x) = 3-2x$

$u'(x) = 5$ $v'(x) = -2$

$$f'(x) = \frac{5(3-2x) - (-2)(5x-1)}{(3-2x)^2}$$

$$= \frac{15 - \cancel{10x} + \cancel{10x} - 2}{(3-2x)^2} = \frac{13}{(3-2x)^2}$$

② $f(x) = x^2\sqrt{x}$ $\mathcal{D}_f = [0 ; +\infty[$

pour $x \in]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = 2x\sqrt{x} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2 + x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$$

③ $f(x) = \dfrac{3x^2-5x}{x+1}$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$u(x) = 3x^2-5x$ $v(x) = x+1$

$u'(x) = 6x-5$ $v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{(6x-5)(x+1) - 1(3x^2-5x)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{6x^2 + 6x - \cancel{5x} - 5 - 3x^2 + \cancel{5x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 6x - 5}{(x+1)^2}$$

④ $f(x) = 3x^4 - \dfrac{1}{x^2}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = 12x^3 - \left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2x}{x^4}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = 12x^3 - \left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$f'(x) = 12x^3 + \frac{2}{x^3}$$

$u(x) = 2x + \frac{1}{x}$ $\qquad$ $v(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x$

1) $D_u = \mathbb{R}^*$ $\qquad$ $u'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

2) $D_v = \mathbb{R}$ $\qquad$ $v'(x) = -\frac{3}{2}\times 2x + 2 = -3x + 2$

3) Dérivée de uv $\quad$ pour $x \neq 0$:

$$(uv)'(x) = \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{3}{2}x^2 + 2x\right) + \left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(-3x + 2\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\times 2x^2 + 4x + \frac{3}{2} - \frac{1}{x^2}\times 2x + \left(-6x^2 + 4x - 3 + \frac{2}{x}\right)$$

$$= -3x^2 + 4x + \frac{3}{2} - \cancel{\frac{2}{x}} - 6x^2 + 4x - 3 + \cancel{\frac{2}{x}}$$

$$= \boxed{-9x^2 + 8x - \frac{3}{2}}$$

4) Dérivée de $\frac{u}{v}$ $\qquad$ $\frac{u}{v}$ existe ssi $v \neq 0$

$v(x) = 0$ ssi $-\frac{3}{2}x^2 + 2x = 0$

$x\left(-\frac{3}{2}x + 2\right) = 0$

$x = 0$ ou $-\frac{3}{2}x + 2 = 0$

$x = -2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

$D_{\left(\frac{u}{v}\right)} = \mathbb{R} \setminus \left\{0 ; \frac{4}{3}\right\}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{3}{2}x^2 + 2x\right) - \left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(-3x + 2\right)}{\left(-\frac{3}{2}x^2 + 2x\right)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + \frac{9}{2} - \frac{4}{x}}{\left(-\frac{3}{2}x^2 + 2x\right)^2}$$

20091207-TestDerivation4

E. Approximation affine d'une fonction.

f est une fonction dérivable en x_0

(Cela veut dire que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie, c'est le nombre dérivé $f'(x_0)$)

Soit g la fonction définie par : pour $h \neq 0$

$$g(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \qquad (1)$$

On a : $\lim\limits_{h \to 0} g(h) = 0$ et d'autre part:

à partir de (1) :

$$f(x_0+h) - f(x_0) = [g(h) + f'(x_0)] \times h$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\,f'(x_0) + h\,g(h)$$

si h est petit (presque nul), $h \cdot g(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

on peut donc négliger le terme $h\,g(h)$ lorsque h est petit.

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + h\,f'(x_0)$$

au voisinage de x_0
(lorsque h est petit)

$f(x_0) + h\,f'(x_0)$ est l' APPROXIMATION AFFINE de f au voisinage de x_0.

exemple : $f(x) = x^2$ $\quad x_0 = 2$

$f(2+h) \approx f(2) + h\,f'(2)$ $\qquad f'(2) = 2 \times 2 = 4$

$(2+h)^2 \approx 4 + h \times 4$

$h = 0{,}001$ $\qquad 2{,}001^2 \simeq 4 + 4 \times 0{,}001$

$2{,}001^2 \simeq 4{,}004$

20091208-ApproximationAffine

5. $(u^2 v)' = (u^2)' v + u^2 v'$.

$$= 2 u u' v + u^2 v'$$

$$(u^2 v)'(x) = 2 \times \left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{3}{2}x^2 + 2x\right) + \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 (-3x + 2)$$

$$= \left(2x + \frac{1}{x}\right)\left[2\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{3}{2}x^2 + 2x\right) + \left(2x + \frac{1}{x}\right)(-3x + 2)\right]$$

$$= \left(2x + \frac{1}{x}\right)\left[\quad \cdots \quad \right]$$

20091208-TestDerivation5

6. Tableau de variation de u

$u(x) = 2x + \frac{1}{x}$ $x \neq 0$

$u'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

$u'(x) = \frac{2x^2-1}{x^2} = \frac{(\sqrt{2}\,x-1)(\sqrt{2}\,x+}{x^2}$

u' est du signe $2x^2-1$

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$u(x)$		↗	⊗	↘	‖	↘	⊗⊗	↗	

⊗ $u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$

⊗⊗ $u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$

7. Tableau de variation de v

$v(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x$

$v'(x) = -3x + 2$

$v'(x) = 0$ ssi

$x = \frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$2/3$		$+\infty$
$v'(x)$		+	0	−	
$v(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$

$v\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\times\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

Tableau de signe de v

x	$-\infty$		0		$4/3$		$+\infty$
$v(x)$		−	0	+	0	−	

Factoriser

$v(x) = x\left(-\frac{3}{2}x + 2\right)$

$-\frac{3}{2}x + 2 = 0$

$-\frac{3}{2}x = -2$ $x = \frac{4}{3}$

8. $f(x) = -7x^{③} + 2x^2 - 1$

f' et Tableau de variation

$f'(x) = -21x^2 + 4x$

$f'(x) = x(-21x + 4)$

$f'(x) = 0$ ssi $x = 0$ ou

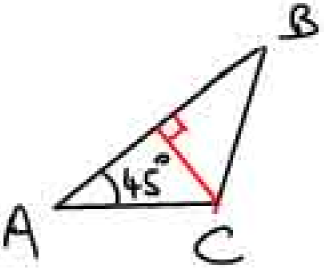
$-21x + 4 = 0$

$x = \frac{4}{21}$

x	$-\infty$		0		$4/21$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$		↘	-1	↗	⊗	↘	

$f < 0$ à l'extérieur des racines (2nd degré)

⊗ $f\left(\frac{4}{21}\right) = ?$



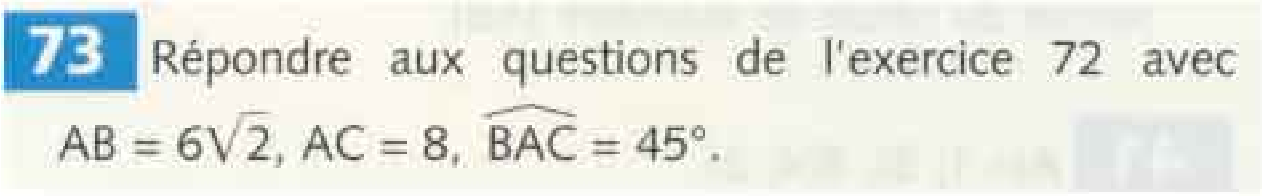
$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times h$$

$$\sin 45° = \frac{h}{AC}$$

$$h = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\ 6\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}$$

$$= 3 \times 4 \times 2 = \boxed{24}$$



73 Répondre aux questions de l'exercice 72 avec $AB = 6\sqrt{2}$, $AC = 8$, $\widehat{BAC} = 45°$.

20100201-AireDunTriangle-Ex73Page258

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(6^2 + 7^2 - (5\sqrt{2})^2\right)$$

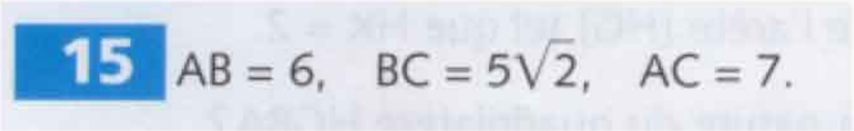
$$= \frac{1}{2}\left(36 + 49 - 25 \times 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(36 - 1\right) = \frac{35}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{35}{2 \times 6 \times 7} = \frac{5}{12}$$

$$\widehat{BAC} \simeq 65°$$



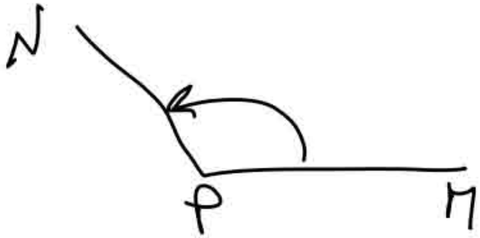
15 $AB = 6, \quad BC = 5\sqrt{2}, \quad AC = 7.$

20100201-AlKashi-Ex15bPage255

$$\vec{PM}\cdot\vec{PN} = PM.PN \cos\left(\vec{PM}, \vec{PN}\right)$$

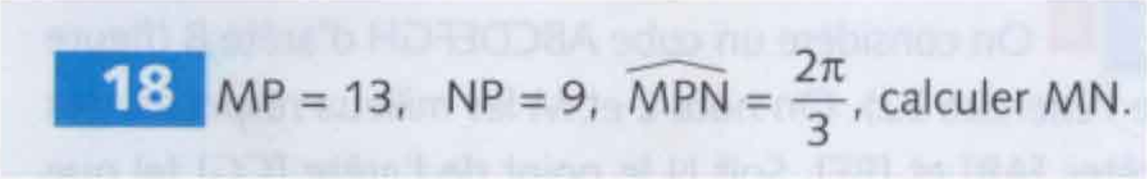
$$= -PM.PN \cos \widehat{MPN}$$

$$= -13 \times 9 \times \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{117}{2}$$



$$\vec{PM}\cdot\vec{PN} = \frac{1}{2}\left(PM^2 + PN^2 - MN^2\right)$$

$$117 = 13^2 + 9^2 - MN^2 \qquad MN^2 = 13^2 + 9^2 - 117$$



18 MP = 13, NP = 9, $\widehat{MPN} = \frac{2\pi}{3}$, calculer MN.

$$MN^2 = 133 \qquad \boxed{MN = \sqrt{133}}$$

20100201-AlKashi-Ex18Page255

L'approximation affine de f en 0 donne

$$f(h) \simeq f(0) + h\, f'(0)$$

$$f'(h) = 3(1+h)^2 \times 1$$

$$f'(0) = 3$$

$$f(h) \simeq 1 + 3h$$

$$a = f(0{,}005) \simeq 1 + 3 \times 0{,}005$$

$$\boxed{a \simeq 1{,}015}$$

81 $f(h) = (1 + h)^3$; $a = (1{,}005)^3$; $b = (0{,}997)^3$.

$$b = f(-0{,}003) \simeq 1 - 3 \times 0{,}003$$

$$\boxed{b \simeq 0{,}991}$$

20100201-ApproximationAffine-Ex81Page74

Approximation affine de f en 0 :

$$f(h) \simeq f(0) + h\,f'(0)$$

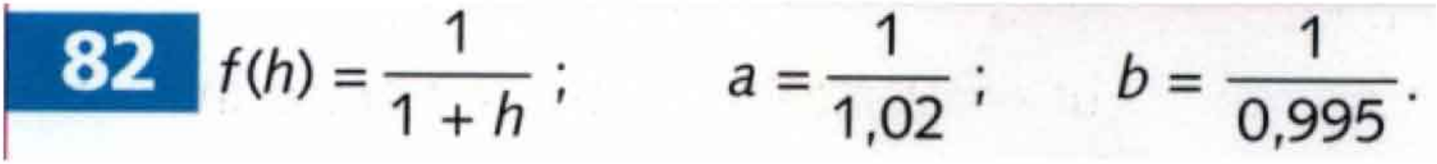
$$f'(h) = -\frac{1}{(1+h)^2} \qquad (\text{pour } h \neq -1)$$

$$f'(0) = -1$$

$$f(h) \simeq 1 - h$$

$$a = f(0{,}02)$$

$$a \simeq 1 - 0{,}02 \qquad \boxed{a \simeq 0{,}98}$$



82 $f(h) = \dfrac{1}{1+h}$; $a = \dfrac{1}{1{,}02}$; $b = \dfrac{1}{0{,}995}$.

$$b = f(-0{,}005) \simeq 1 + 0{,}005$$

$$\boxed{b \simeq 1{,}005}$$

20100201-ApproximationAffine-Ex82Page74

Approximation affine de f en 0 :

$$f(h) \simeq f(0) + h\, f'(0)$$

$$f'(h) = \frac{1}{2\sqrt{1+h}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f(h) \simeq 1 + \frac{1}{2} h$$

$$a \simeq f(0{,}004)$$

$$a \simeq 1 + \frac{1}{2} \times 0{,}004$$

$$\boxed{a \simeq 1{,}002}$$

83 $f(h) = \sqrt{1+h}$; $a = \sqrt{1{,}004}$; $b = \sqrt{0{,}98}$.

$$b = f(1 - 0{,}02)$$

$$b \simeq 1 - \frac{1}{2} \times 0{,}02 \qquad \boxed{b \simeq 0{,}99}$$

20100201-ApproximationAffine-Ex83Page74

Approximation affine de f en 0 :

$$f(h) \simeq f(0) + h\, f'(0)$$

$$f'(h) = -\frac{1}{(3+h)^2} \qquad (\text{pour } h \neq -3)$$

$$f(h) \simeq \frac{1}{3} - \frac{1}{3} h$$

$$a = f(0{,}01) \simeq \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0{,}01$$

$$a \simeq \frac{1}{3}(1 - 0{,}01) \qquad a \simeq \frac{0{,}99}{3} \qquad \boxed{a \simeq 0{,}33}$$

85 ★ $f(h) = \dfrac{1}{3+h}$; $a = \dfrac{1}{3{,}01}$; $b = \dfrac{1}{2{,}98}$.

$$b = f(3 - 0{,}02)$$

$$b \simeq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 0{,}02$$

$$b \simeq \frac{1}{3}(1 + 0{,}02) \simeq \frac{1}{3} \times 1{,}02$$

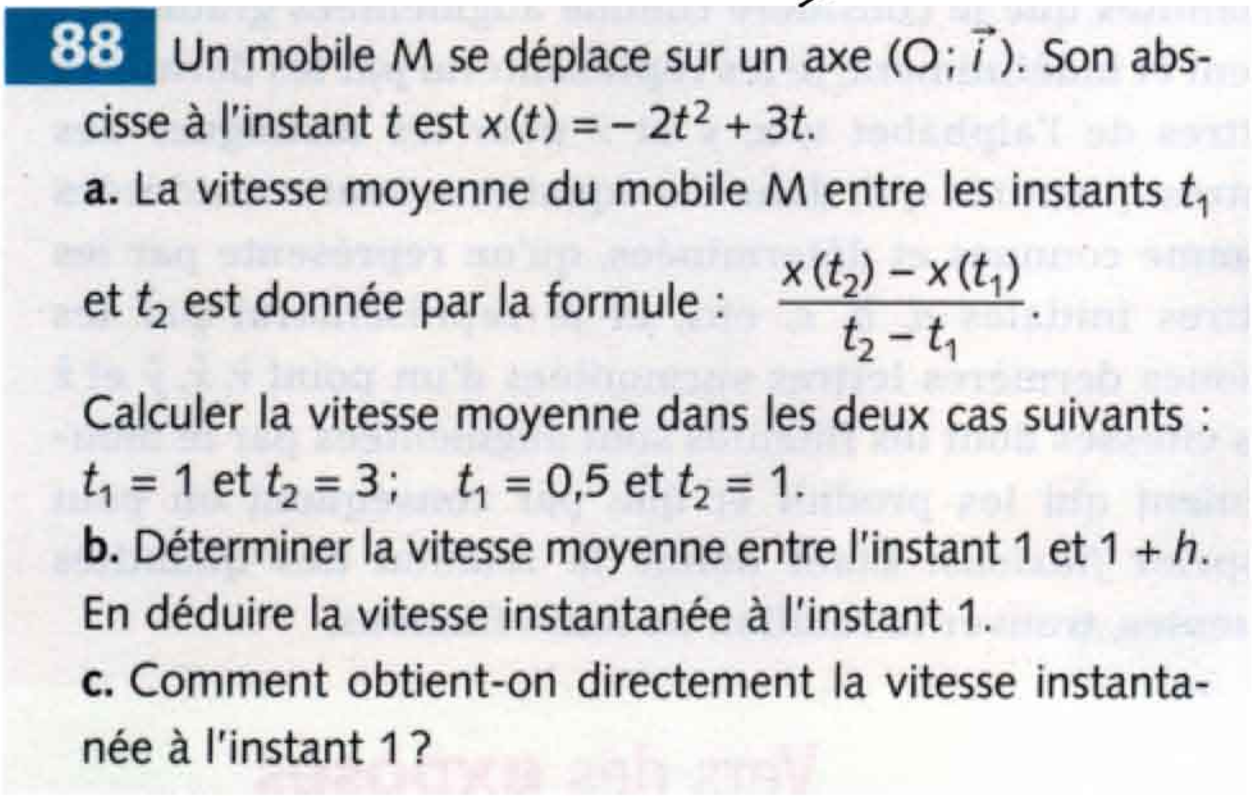
$$\boxed{b \simeq 0{,}34}$$

88 a) ● $\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{x(3)-x(1)}{3-1} = \frac{-9-1}{2} = -\frac{10}{2}$

● $\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{x(1)-x(0,5)}{1-0,5} = \frac{1-1}{1-0,5} = 0$

b) $\frac{x(1+h)-x(1)}{1+h-1} = \frac{-2(1+h)^2+3(1+h)-1}{h}$

$= \frac{-2(1+2h+h^2)+3+3h-1}{h}$



88 Un mobile M se déplace sur un axe $(O;\vec{i})$. Son abscisse à l'instant t est $x(t) = -2t^2 + 3t$.

a. La vitesse moyenne du mobile M entre les instants t_1 et t_2 est donnée par la formule : $\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$.

Calculer la vitesse moyenne dans les deux cas suivants :
$t_1 = 1$ et $t_2 = 3$; $t_1 = 0,5$ et $t_2 = 1$.

b. Déterminer la vitesse moyenne entre l'instant 1 et $1 + h$.
En déduire la vitesse instantanée à l'instant 1.

c. Comment obtient-on directement la vitesse instantanée à l'instant 1 ?

$\frac{x(1+h)-x(1)}{1+h-1} = \frac{-2h^2-h}{h} = -2h-1$

$\lim_{h\to 0} \frac{x(1+h)-x(1)}{1+h-1} = \boxed{-1}$

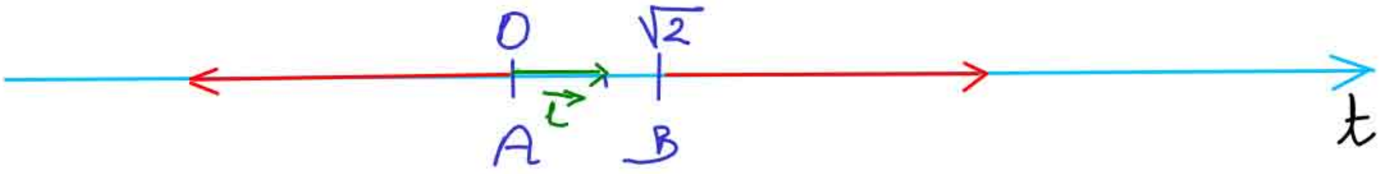
c) $x'(t) = -4t+3$

$x'(1) = -1$.

a) $v(t) = x'(t)$

$v(t) = 3t^2 - 3$

en A : $v(0) = -3$ en B : $v(\sqrt{2}) = 3$

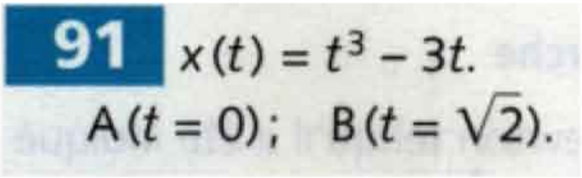


b) $v(t) = 0$ ssi $3t^2 - 3 = 0$

$3(t^2 - 1) = 0$

$3(t-1)(t+1) = 0$

$t = 1$ ou $t = -1$



91 $x(t) = t^3 - 3t$.

A$(t = 0)$; B$(t = \sqrt{2})$.

$x(t=1) = 1 - 3 = -2$

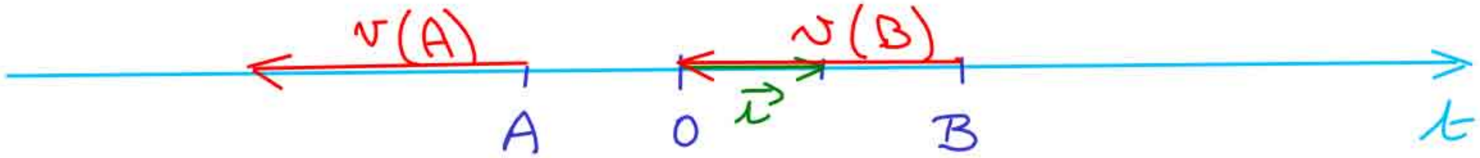
$x(t=-1) = -1 + 3 = 2$

$v(t) = x'(t)$

$v(t) = -t^2 + t$

en A $v(-1) = -1 - 1 = -2$

en B $v(2) = -4 + 2 = -2$



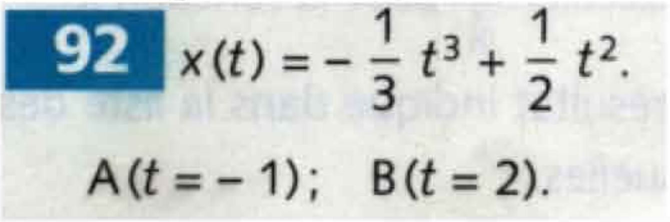
$v(t) = 0$ ~~soi~~ $-t^2 + t = 0$

~~soi~~ $t(-t+1) = 0$

$t = 0$

ou

$t = 1$


92 $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2.$

A($t = -1$) ; B($t = 2$).

$x(t=0) = 0$

$x(t=1) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$M \in \mathcal{C}(\Omega, r)$ ssi $\Omega M = r$

$M(x, y)$

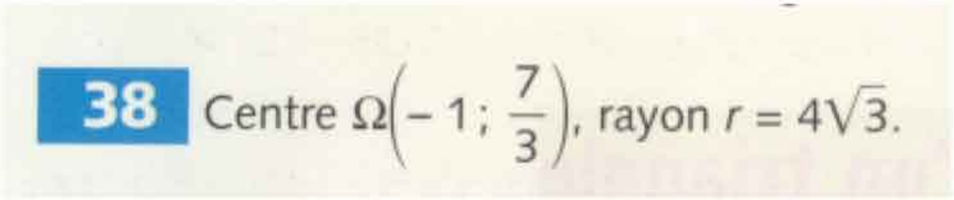
$$\Omega M^2 = (x+1)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2$$

$$= x^2 + y^2 + 2x - \frac{14}{3}y + 1 - \frac{49}{9}$$

$$= x^2 + y^2 + 2x - \frac{14}{3}y - \frac{40}{9}$$

$\Omega M^2 = r^2$ ssi :

$$x^2 + y^2 + 2x - \frac{14}{3}y - \frac{40}{9} = 16 \times 3$$



38 Centre $\Omega\left(-1\,;\,\frac{7}{3}\right)$, rayon $r = 4\sqrt{3}$.

$$\boxed{x^2 + y^2 + 2x - \frac{14}{3}y - 48 = 0}$$

20100201-EquationsDeCercles-Ex38Page257

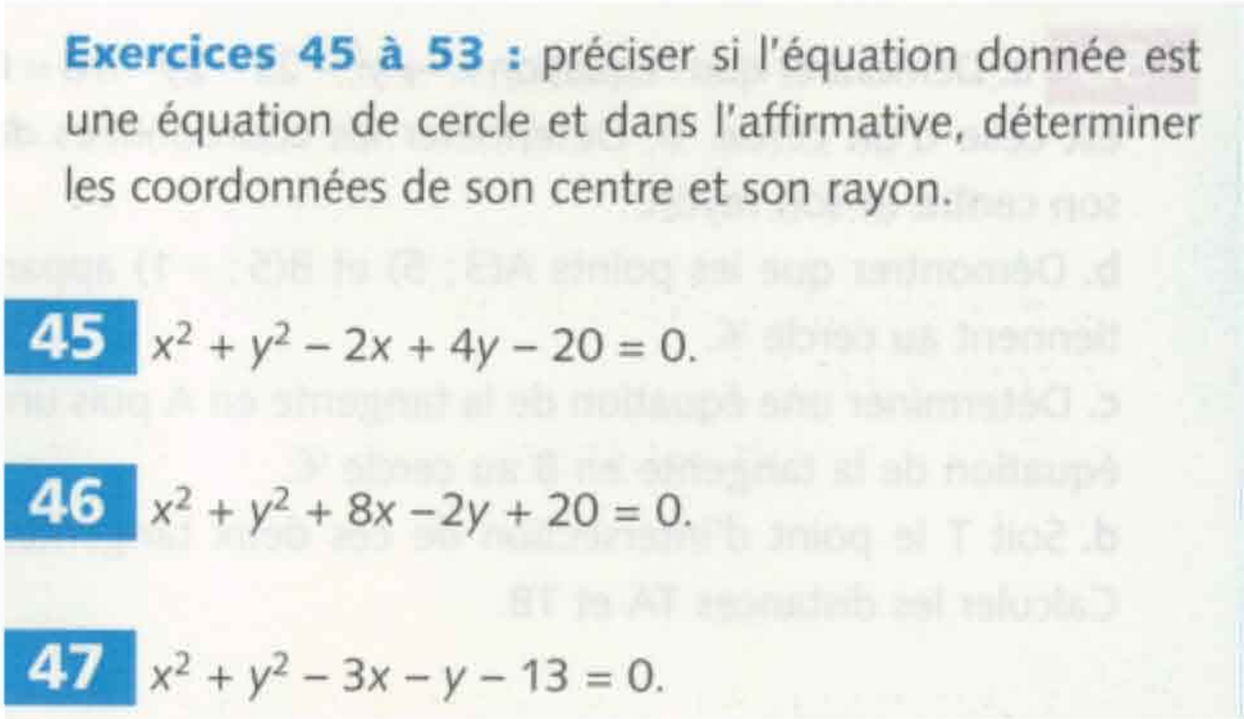
46 $\underbrace{x^2+8x} + \underbrace{y^2-2y} + 20 = 0$

$(x+4)^2 - \cancel{16} + (y-1)^2 \cancel{-4} + \cancel{20} = 0$

$(x+4)^2 + (y-1)^2 = 0$ (1)

Soit $\Omega(-4\,;1)$

(1) a pour solution $M = \Omega$



Exercices 45 à 53 : préciser si l'équation donnée est une équation de cercle et dans l'affirmative, déterminer les coordonnées de son centre et son rayon.

45 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0.$

46 $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 20 = 0.$

47 $x^2 + y^2 - 3x - y - 13 = 0.$

47 $\underbrace{x^2-3x} + \underbrace{y^2-y} - 13 = 0$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 13 = 0$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 11$ (1)

Soit $\Omega\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

(1) est l'équation du cercle $\mathcal{C}(\Omega\,;\sqrt{11})$

(1) équivaut à :

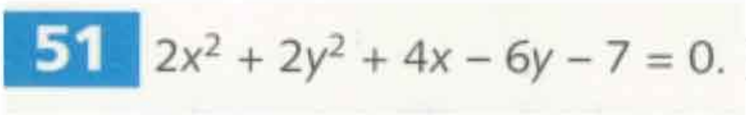
$$x^2 + y^2 + 2x - 3y - \frac{7}{2} = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 2x} + y^2 - 3y - \frac{7}{2} = 0$$

$$(x+1)^2 - 4 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{7}{2} = 0$$

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{39}{4}$$

C'est l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\left(-1 ; \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{39}}{2}$.

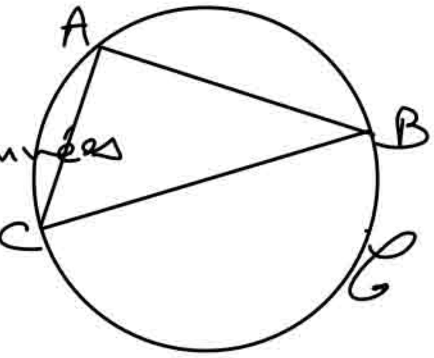


51 $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y - 7 = 0.$ (1)

20100201-EquationsDeCercles-Ex51Page257

L'équation du cercle 𝒞 est de la forme :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (1)$$



A ∈ 𝒞 donc ses coordonnées vérifient (1) :

$$(8-a)^2+(-2-b)^2=R^2$$

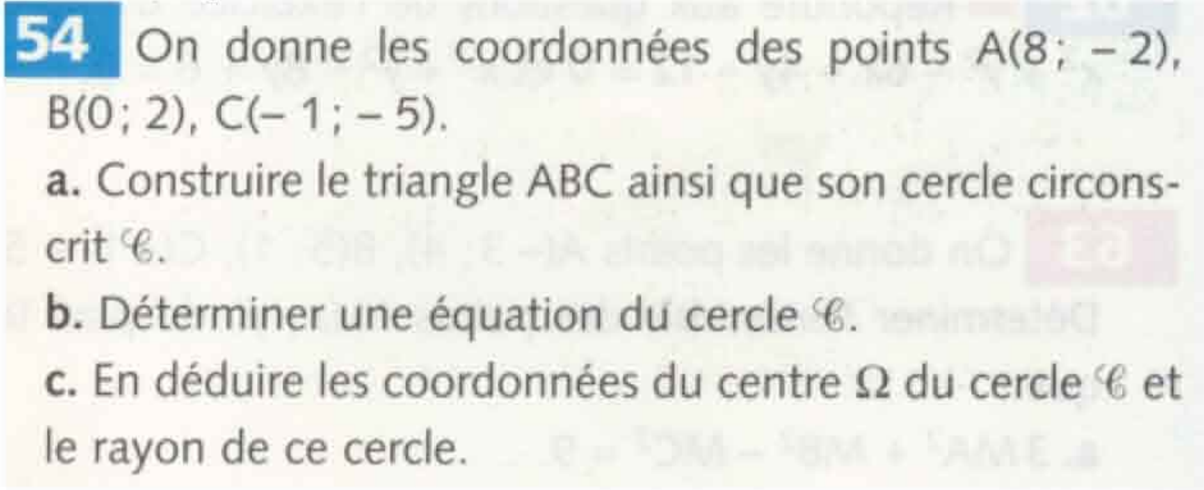
de même pour B :

$$(0-a)^2+(2-b)^2=R^2$$

et C :

$$(-1-a)^2+(-5-b)^2=R^2$$

D'où le système :



54 On donne les coordonnées des points A(8 ; – 2), B(0 ; 2), C(– 1 ; – 5).

a. Construire le triangle ABC ainsi que son cercle circonscrit 𝒞.

b. Déterminer une équation du cercle 𝒞.

c. En déduire les coordonnées du centre Ω du cercle 𝒞 et le rayon de ce cercle.

$$\begin{cases} 64+a^2-16a+4+b^2+4b=R^2 & (L_1)\\ a^2+4+b^2-4b=R^2 & (L_2)\\ 1+a^2+2a+25+b^2+10b=R^2 & (L_3)\end{cases}$$

L_1-L_2 : $64-16a+8b=0$

L_3-L_2 : $1+2a-4+25+14b=0$

on obtient le système à 2 inconnues : a et b :

$$\begin{cases} -16a+8b=-64\\ 2a+14b=-22\end{cases} \qquad \begin{cases} 2a-b=8\\ a+7b=-22\end{cases}$$

$a=\frac{34}{15}$ $b=-\frac{52}{15}$ on calcule R avec (L_2) par ex.

SUITES

Ⓘ Déf : Une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto u(n)$$

Notation : le réel $u(n)$ est noté u_n

exemples :
- la suite des entiers naturels 0, 1, 2, 3, ...
- la suite des nombres pairs 0, 2, 4, 6, ...
- la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, ...

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, bend right, "-3"'] & 0 \arrow[r, bend right, "-3"'] & -3 \arrow[r, bend right] & -6 & -9 \ldots \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \frac{1}{2} \arrow[r, bend right, "\times \frac{1}{2}"'] & \frac{1}{4} \arrow[r, bend right, "\times \frac{1}{2}"'] & \frac{1}{8} \arrow[r, bend right, "\times \frac{1}{2}"'] & \frac{1}{16} & \frac{1}{32}, \ldots \end{tikzcd}$$

Ⓘⓘ Deux façons de définir une suite

1. de manière explicite

ex : f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

u est la suite définie par $u_n = f(n)$

$u_0 = \frac{0+2}{0+1} = 2$ $\quad u_1 = \frac{3}{2}$ $\quad u_2 = \frac{4}{3}$ $\quad$ etc...

2. Suite définie par récurrence

On définit une suite par récurrence en indiquant son 1er terme et une méthode de calcul qui permet de passer d'un rang au suivant.

ex : $u_0 = 1$ $\qquad u_n = f(u_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$

$$u_1 = f(u_0) = \frac{u_0+2}{u_0+1} = \frac{3}{2} \qquad u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{5}$$

③ Sens de variation d'une suite

- La suite u est strictement croissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n < u_{n+1}$
- La suite u est strictement décroissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n > u_{n+1}$
- La suite u est constante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_{n+1}$

Exemples

- u définie par $u_n = n^2 + n - 3$
  sens de variation ?

méthode : on doit comparer u_n et u_{n+1}

Pour comparer 2 nombres, on cherche le signe de leur différence.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + n + 1 - 3 - (n^2 + n - 3)$$
$$= \cancel{n^2} + 2n + 1 + n - 2 - \cancel{n^2} - n + 3$$
$$= 2n + 2 > 0$$

$u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite est strictement croissante.

- u définie par $u_n = \dfrac{2^n}{3^n}$

méthode : on doit encore comparer u_{n+1} à u_n.

Pour des nombres non nuls, on peut former le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et le situer par rapport à 1.

$u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$ $\qquad$ $u_n \neq 0$ pour tout n donc on peut former $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{2^n}{3^n}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1-n} = \frac{2}{3} < 1 \text{ pr } \forall n$$

Pr $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ $\qquad$ $\boxed{u \searrow}$

SUITES

Ⓘ Déf : Une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

Notation : le réel $u(n)$ est noté u_n

exemples :
- la suite des entiers naturels 0, 1, 2, 3, ….
- la suite des nombres pairs 0, 2, 4, 6, …
- la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, …

- $$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, bend right, "-3"'] & 0 \arrow[r, bend right, "-3"'] & -3 \arrow[r, bend right] & -6 & -9 \dots \end{tikzcd}$$

- $$\begin{tikzcd} \frac{1}{2} \arrow[r, bend right, "\times \frac{1}{2}"'] & \frac{1}{4} \arrow[r, bend right, "\times \frac{1}{2}"'] & \frac{1}{8} \arrow[r, bend right, "\times \frac{1}{2}"'] & \frac{1}{16} & \frac{1}{32}, \dots \end{tikzcd}$$

Ⓘⓘ Deux façons de définir une suite

1. de manière explicite

ex : f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

u est la suite définie par $u_n = f(n)$

$u_0 = \frac{0+2}{0+1} = 2$ $\quad u_1 = \frac{3}{2}$ $\quad u_2 = \frac{4}{3}$ $\quad$ etc…

2. Suite définie par récurrence

On définit une suite par récurrence en indiquant son 1er terme et une méthode de calcul qui permet de passer d'un rang au suivant.

ex : $u_0 = 1$ $\qquad u_n = f(u_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$

$$u_1 = f(u_0) = \frac{u_0+2}{u_0+1} = \frac{3}{2} \qquad u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{5}$$

③ Sens de variation d'une suite

- La suite u est strictement croissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n < u_{n+1}$
- La suite u est strictement décroissante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n > u_{n+1}$
- La suite u est constante ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_{n+1}$

Exemples

- u définie par $u_n = n^2 + n - 3$
  sens de variation ?

méthode : on doit comparer u_n et u_{n+1}

Pour comparer 2 nombres, on cherche le signe de leur différence.

Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + n + 1 - 3 - (n^2 + n - 3)$$
$$= \cancel{n^2} + 2n + 1 + n - 2 - \cancel{n^2} - n + 3$$
$$= 2n + 2 > 0$$

$u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite est strictement croissante.

- u définie par $u_n = \frac{2^n}{3^n}$

méthode : on doit encore comparer u_{n+1} à u_n.

Pour des nombres non nuls, on peut former le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et le situer par rapport à 1.

$u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$ $u_n \neq 0$ pour tout n donc on peut former $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{2^n}{3^n}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1-n} = \frac{2}{3} < 1 \text{ pr } \forall n$$

pr $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ $\boxed{u \searrow}$

Ex 64 b page 129 -

$u_n = \frac{2n+1}{3n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. $u(n)$

$u_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+2}$ $u(n+1)$

$= \frac{2n+3}{3n+5}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{3n+5} - \frac{2n+1}{3n+2}$ chercher le signe

$= \frac{(2n+3)(3n+2) - (2n+1)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)}$

$= \frac{6n^2+13n+6 - (6n^2+13n+5)}{(3n+5)(3n+2)}$

$= \frac{1}{(3n+5)(3n+2)} > 0$ pr tt $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} > u_n$ pr $\forall n \in \mathbb{N}$ donc la suite u est ↗.

Majorée - Minorée

- Une suite u est majorée s'il existe un réel M tel que :

$$u_n \leqslant M \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Une suite u est minorée s'il existe un réel tel que :

$$u_n \geqslant m \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

20100215-SuiteMajoreeMinoree

Ex 44 p 127

a) Avec la calculatrice la suite u du a) semble être minorée par -5.

$$u_n - (-5) = (4n^2 - 6n - 3) - (-5)$$
$$= 4n^2 - 6n + 2$$
$$= 2(\underbrace{2n^2 - 3n + 1})$$

$n = 1$ est solution donc c'est factorisable par $(n-1)$

$$= 2(n-1)(2n-1) \qquad \left(\frac{1}{2} \text{ et } 1\right)$$

cette expression est ≥ 0 pour $n \geq 1$

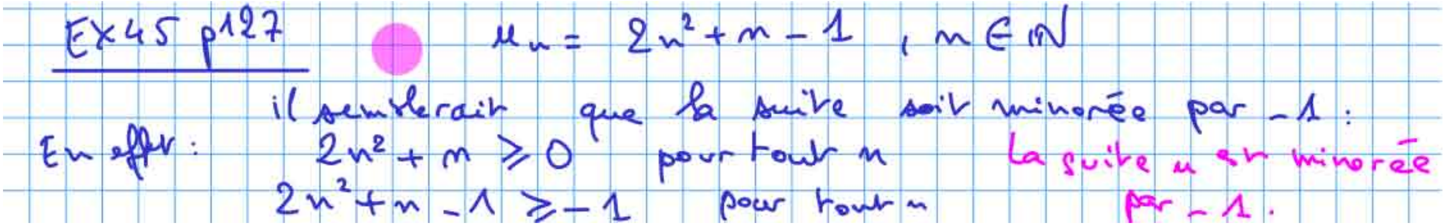
A partir du rang 1 $(n \geq 1)$, $u_n \geq -5$.

et $u_0 = -3 \geq -5$ Donc la suite est bien minorée par -5.

b) $u_n = -3n^2 - 2n + 5$, $n \in \mathbb{N}$; il semblerait à la calculatrice qu'elle ait un majorant qui vaut 5.

$$u_n - 5 = (-3n^2 - 2n + 5) - 5$$
$$= -3n^2 - 2n = -(\underbrace{3n^2 + 2n}_{\geq 0}) \leq 0$$

La suite u est bien majorée par 5.



Ex45 p127 $u_n = 2n^2 + n - 1$, $n \in \mathbb{N}$

il semblerait que la suite soit minorée par -1 :

En effet : $2n^2 + n \geq 0$ pour tout n

$2n^2 + n - 1 \geq -1$ pour tout n

La suite u est minorée par -1.

20100215-SuitesEx45Page127a

Il semblerait que la suite u définie par :

$$u_n = -2n^2+8n-9 \quad , \; n \in \mathbb{N}$$

est majorée par -1.

$$u_n - (-1) = (-2n^2+8n-9) - (-1)$$
$$= -2n^2+8n-8$$
$$= -2(n^2-4n+4)$$
$$= -2(n-2)^2 \leqslant 0 \quad \text{pour } \forall\, n \in \mathbb{N}$$
$$u_n \leqslant -1 \quad \text{pour } \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

La suite u est majorée par -1.

Ex 61 b) p 129

$$u_n = \sqrt{2n-7}$$

$2n-7 \geqslant 0$

$2n \geqslant 7$ $\quad n \geqslant \frac{7}{2}$

la suite u est définie à partir de $n = 4$

$\boxed{n \geqslant 4}$

$$f(x) = \sqrt{\underbrace{2x-7}_{u}} \qquad x \geqslant \frac{7}{2}$$

pour $x > \frac{7}{2}$, f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2}{2\sqrt{2x-7}} = \frac{1}{\sqrt{2x-7}} > 0$$

f est donc strict^mt ↗ sur $\left]\frac{7}{2} ; +\infty\right[$

D'où la suite u est ↗ pour $n \geqslant 4$.

Raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété, $n \in \mathbb{N}$.

1) Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie

2) Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, pour tout $n \geqslant n_0$.

Si 1) et 2) sont réalisées, alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est VRAIE pour tout $n \geqslant n_0$.

Exemple avec l'ex. 71 p 129

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right)^2 \quad \text{et} \quad u_0 = -4$$

La suite u est définie par récurrence.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $\left[\, u_n > 0 \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \,\right]$

Preuve par récurrence :

1) $u_1 = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

2) Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \geqslant 1$:

$u_n > 0$ $\quad \frac{1}{2}u_n > 0$ d'où $\frac{1}{2}u_n + 1 \geqslant 1$

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right)^2 \geqslant 1 > 0$$

Donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tt $n \geqslant 1$.

$\boxed{u_n > 0 \text{ dès que } n \geqslant 1.}$

$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{50}$) il y a 50 termes

$$S = (u_1 + u_{50}) \times \frac{50}{2}$$

$$S = (20 + (-58,4)) \times 25 = \boxed{-960}$$

20100219-Ex76bPage129

3- Somme de termes consécutifs

a) Pour tout entier naturel n : $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

1er terme

Dernier terme

b) Si (u_n) est une suite arithmétique, $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=\underbrace{(n+1)}_{\text{nb de termes}}\dfrac{u_0+u_n}{2}$.

C Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n
$\boxed{u_{n+1}= q.u_n}$.
Le nombre q est appelé raison de la suite géométrique.

1- Sens de variation

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$. (si les u_n sont tous non nuls).

Si u_0 et q sont strictement positifs, on en déduit que :

- si $q>1$, la suite (u_n) est strictement croissante. $(u_{n+1}>u_n)$ ↗
- si $q<1$, la suite (u_n) est strictement décroissante. $(u_{n+1}<u_n)$ ↘

$q>1$ ↗ $q<1$ ↘

$q=1$ Suite cste.

– si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.

$u_1 = \underbrace{u_0 \times q}_{}$

$u_2 = u_1 \times q = u_0 \times q^2$

$u_3 = u_2 \times q = u_0 \times q^3$

etc... (sous entendu 1 raisonnt par récurrence).

$u_n = u_0 \times q^n$

2- Expression de u_n en fonction de n

> Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
> Pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n = u_0.q^n}$

3- Somme de termes consécutifs

> a) Pour tout réel q différent de 1 et pour tout entier naturel n : $\boxed{1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$.
>
> b) Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, $q \neq 1$, $\boxed{u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$.

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut :

$$(\text{Nombre de termes}) \times \frac{1^{er}\text{ terme} + \text{Dernier terme}}{2}$$

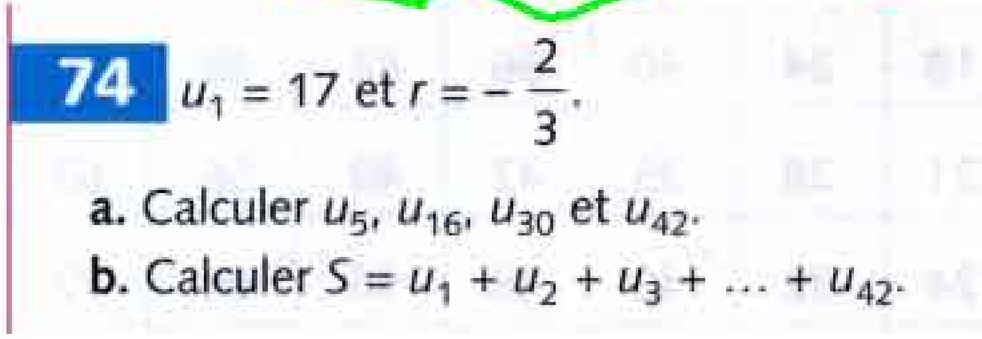
exemple :

$$\underbrace{u_{10} + \ldots + u_{55}}_{\text{il y a } 55-10+1=46 \text{ termes}} = 46 \times \frac{u_{10} + u_{55}}{2}$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{42}$$

$$\oplus \quad S = u_{42} + u_{41} + \dots + u_1$$

$$2S = \underbrace{(u_1 + u_{42})}_{2u_1+41r} + \underbrace{(u_2 + u_{41})} + \dots + \underbrace{(u_{42} + u_1)} \quad \Big\}\ \text{il y a } 42 \text{ termes}$$



74 $u_1 = 17$ et $r = -\frac{2}{3}$.

a. Calculer u_5, u_{16}, u_{30} et u_{42}.

b. Calculer $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{42}$.

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

$$u_{42} = u_1 + 41r$$

$$u_1 + u_{42} = \boxed{2u_1 + 41r}$$

$$\begin{cases} u_2 = u_1 + r \\ u_{41} = u_1 + 40r \end{cases}$$

$$u_2 + u_{41} = \boxed{2u_1 + 41r}$$

$$\begin{cases} u_3 = u_1 + 2r \\ u_{40} = u_1 + 39r \end{cases}$$

$$u_3 + u_{40} = \boxed{2u_1 + 41r}$$

$$2S = 42 \times (2u_1 + 41r)$$

$$S = 21\left(2 \times 17 + 41\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \boxed{140}$$

Ex 76 p 129. SA de raison $-1,6$ et $u_1 = 20$

$$S = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{20}}_{20 \text{ termes}}$$

$$S = (u_1 + u_{20}) \times \frac{20}{2}$$

$$S = (20 + (-10,4)) \times 10 = \boxed{96}$$

20100219-SuitesEx76aPage129

n° 82 p 130 — SA — $u_6 = 1$ $u_{15} = -5$

● 1ère méthode

on a : $\begin{cases} u_6 = u_1 + (6-1)\, r \\ u_{15} = u_1 + (15-1)\, r \end{cases}$ d'où le système :

$$\begin{cases} u_1 + 5r = 1 \\ u_1 + 14r = -5 \end{cases}$$

Par différence des 2 lignes on élimine u_1 :

$5r - 14r = 1 - (-5)$

$-9r = 6$ $\boxed{r = -\frac{2}{3}}$

D'où $u_1 = 1 - 5r = 1 - 5 \times \left(-\frac{2}{3}\right)$

$= 1 + \frac{10}{3} = \boxed{\frac{13}{3}}$

● 2e méthode

$$u_n = u_p + (n-p) \times r$$

$\left(\text{si } n = p \quad u_p = u_p + \underbrace{(p-p) \times r}_{0} \right)$

On peut donc calculer la raison directement :

$u_{15} = u_6 + (15-6) \times r$

$-5 = 1 + 9 \times r$

$-6 = 9r$ $r = -\frac{6}{9} = \boxed{-\frac{2}{3}}$

Départ :

$u_{15} = u_1 + (15-1)\, r$

$-5 = u_1 + 14 \times \left(-\frac{2}{3}\right)$ d'où u_1.

Programmer une suite avec la calculatrice. (TI 82)

- une suite arithmétique

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Noms des variables du programme

A : valeur de départ de la suite
R : raison
B : les termes successifs de la suite

```
PROMPT A          on entre le départ
PROMPT R                  raison
A → B             on initialise la suite au départ
FOR(I, 1, 20)         on va calculer les 20 1ers termes
B+R → B               on ajoute la raison à la valeur
                       courante de la suite
DISP B
PAUSE
END
```

```
PROMPT A
PROMPT R
A → B
FOR(I, 1, 20)
B+R → B
DISP B
PAUSE
END
```

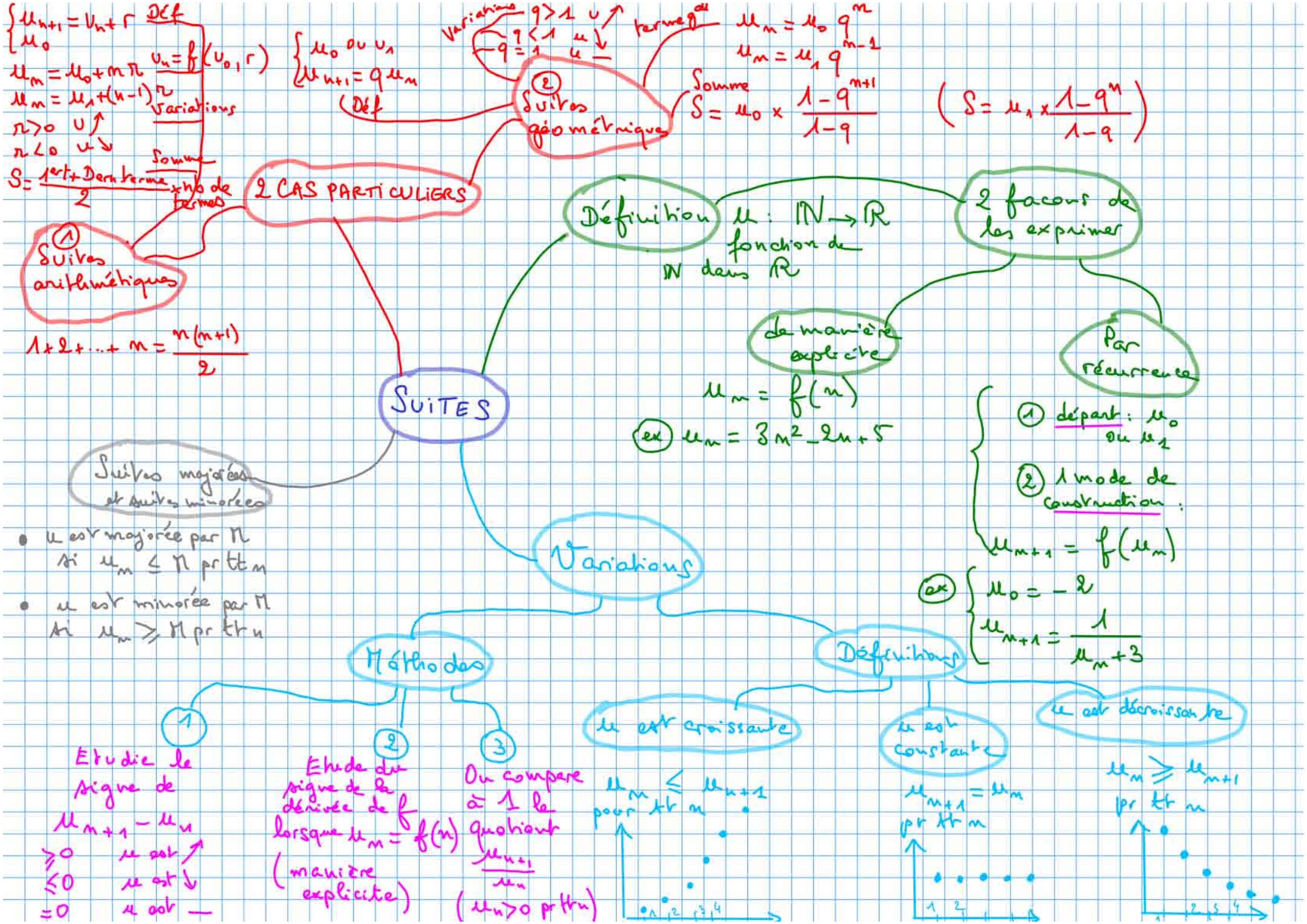
A = 1 $(u_1 = 1)$
R = 2
B = 1

I = 1
1+2 → B   B = 3

I = 2
3+2 → B   B = 5

I = 3
5+2 → B   B = 7

etc…



20100222-CarteMentaleSuites

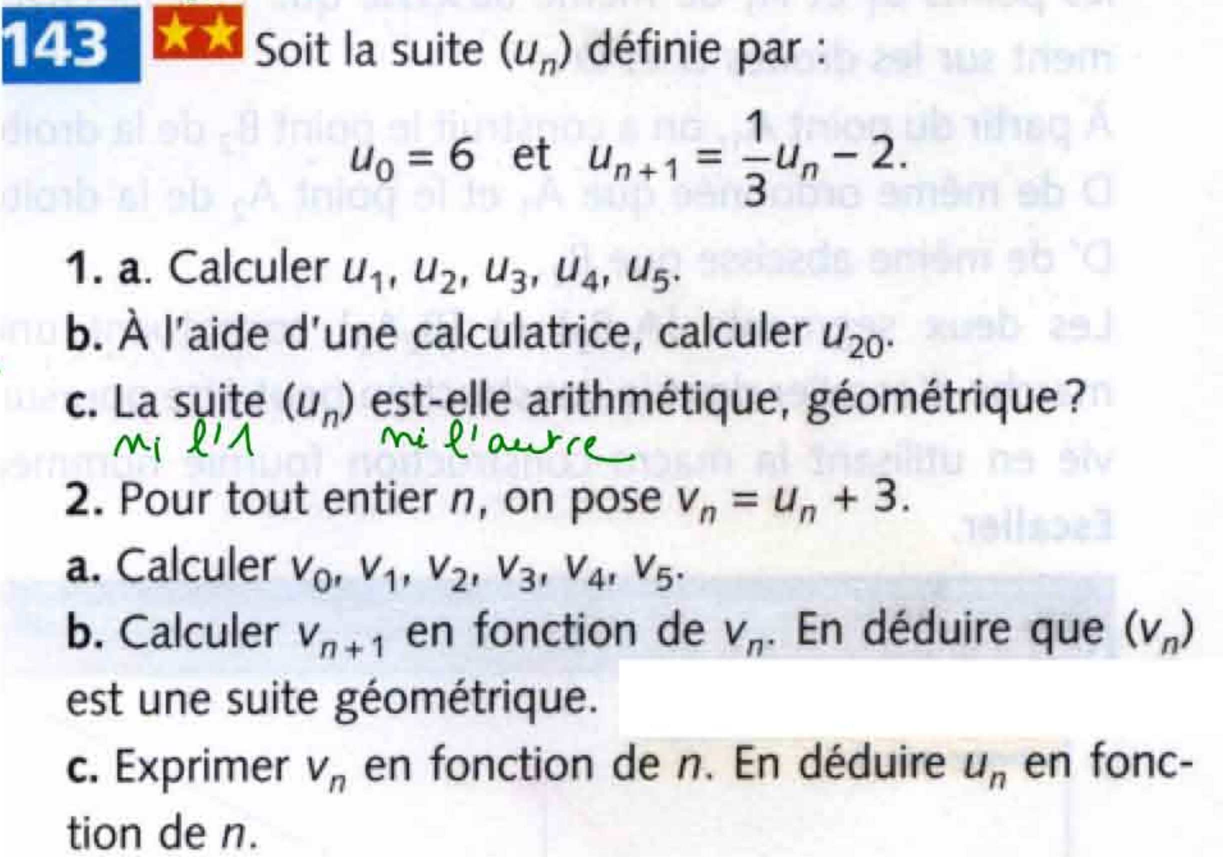
1. a. Programme TI 82 :

```
PROMPT A
A → B
PRompt J
FOR (I, 1, 50)
1/3 * B - 2 → B
DISP "U", J+I
DISP B ▶FRAC
Pause
End
```

A : u_0
B : les termes de la suite (u_n)
J : l'indice de départ.

$u_1 = 0$ $u_2 = -2$ $u_3 = -\frac{8}{3}$
$u_4 = -\frac{26}{9}$ $u_5 = -\frac{80}{27}$

$u_{20} \simeq -2,999999917$
$u_{20} \simeq -3$



143 ★★ Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 6 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2.$$

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

b. À l'aide d'une calculatrice, calculer u_{20}.

c. La suite (u_n) est-elle arithmétique, géométrique ?

ni l'1 ni l'autre

2. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n + 3$.

a. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

b. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire que (v_n) est une suite géométrique.

c. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

c) * u est arithmétique si $u_{n+1} - u_n = r$ pr tt n

* u est géométrique $(q \neq 0)$ si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ pr tt n.
(avec $u_n \neq 0$)

② a) $v_0 = 9$ $v_1 = 3$ $v_2 = 1$ $v_3 = \frac{1}{3}$
$v_4 = \frac{1}{9}$ $v_5 = \frac{1}{27}$

on dirait que v est SG avec $q = \frac{1}{3}$

b) $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \left(\frac{1}{3}u_n - 2\right) + 3 = \frac{1}{3}u_n + 1$, pr tt n
$v_n = u_n + 3$ $\Rightarrow u_n = v_n - 3$, pr tt n

D'où $v_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - 3) + 1$, pr tt n

$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n - 1 + 1$, pr tt n

$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n}$ pr tt n v est bien 1 suite géom. de raison $q = \frac{1}{3}$ (1er terme $v_0 = 9$)

c) $v_n = v_0\, q^n$

$\boxed{v_n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

or $u_n = v_n - 3$, pr tt n

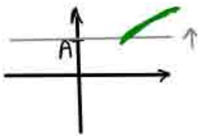
Donc $\boxed{u_n = 9\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3}$

Limites et asymptotes

A Limites et infini

Soit *f* une fonction.

1- Limite infinie en l'infini



Lorsque $f(x)$ peut être rendu supérieur à tout réel positif A pour x suffisamment grand, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. On écrit alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

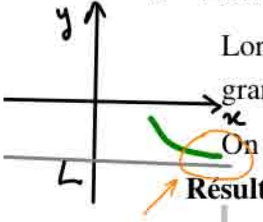
On définit de manière similaire :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ($f(x)$ devient inférieur à – A),
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ (x doit être suffisamment grand en valeur absolue mais négatif)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Résultats à retenir

> • en $+\infty$: pour tout entier n supérieur à 0 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$.
>
> • en $-\infty$: si n est un entier positif pair, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$; n pair
>
> mais si n est un entier positif impair, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$. n impair

2- Limite finie en l'infini



Lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi proche qu'on le désire d'un réel L pour x suffisamment grand, on dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $+\infty$. On écrit alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

On définit de manière similaire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$.

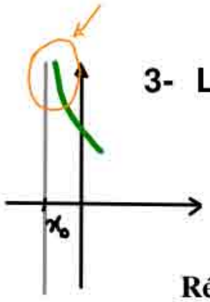
Résultat à retenir

> Pour tout entier n supérieur à 0, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}=0$.

Asymptote horizontale

> Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = L$ comme asymptote horizontale; cela signifie que lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la courbe se rapproche de plus en plus de la droite.

3- Limite infinie en x_0



Lorsque $f(x)$ peut être rendu supérieur à tout réel positif A pour x suffisamment proche d'un réel x_0, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0. On écrit alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

On définit de façon similaire $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

Résultats à retenir

> • sur $]0;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}=+\infty$, on écrit alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}=+\infty$.
> $(x>0)$ $(x>0)$

$(x<0)$ $(x<0)$

- sur]-∞; 0[, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=-\infty$, on écrit alors $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=-\infty$.

Asymptote verticale

Lorsque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, la courbe représentative de *f* admet la droite d'équation $x = x_0$ comme asymptote verticale.

4- Asymptotes obliques

Soit *f* une fonction de courbe C dans le plan muni d'un repère.

Soit D la droite d'équation $y = ax + b$.

La droite D est une asymptote à la coube C en +∞ si $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$.

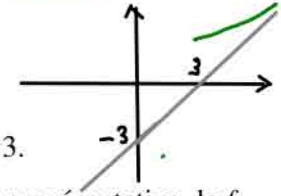
oblique

La droite D est une asymptote à la coube C en −∞ si $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$.

oblique

Exemple :

Soit *f* définie par $f(x)=x-3+\frac{1}{x}$ sur ℝ*.   à étudier



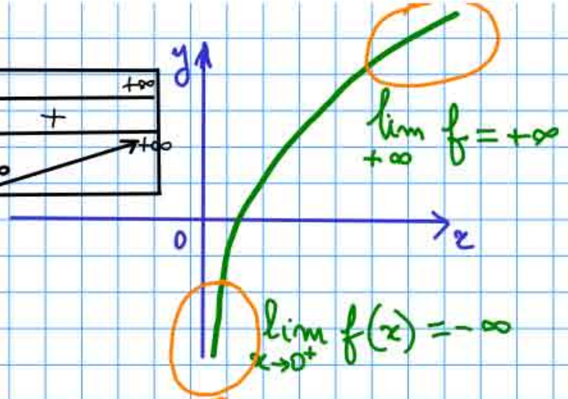
Lorsque *x* tend vers +∞, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, *f(x)* est donc très voisin de $x - 3$.

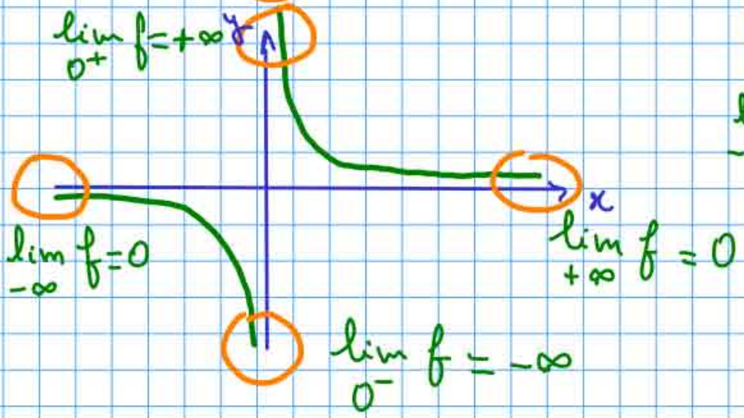
Montrons que la droite d'équation y = x – 3 est une asymptote à la courbe représentative de *f*.

$$f(x)-(x-3)=x-3+\frac{1}{x}-(x-3)=\frac{1}{x}.$$

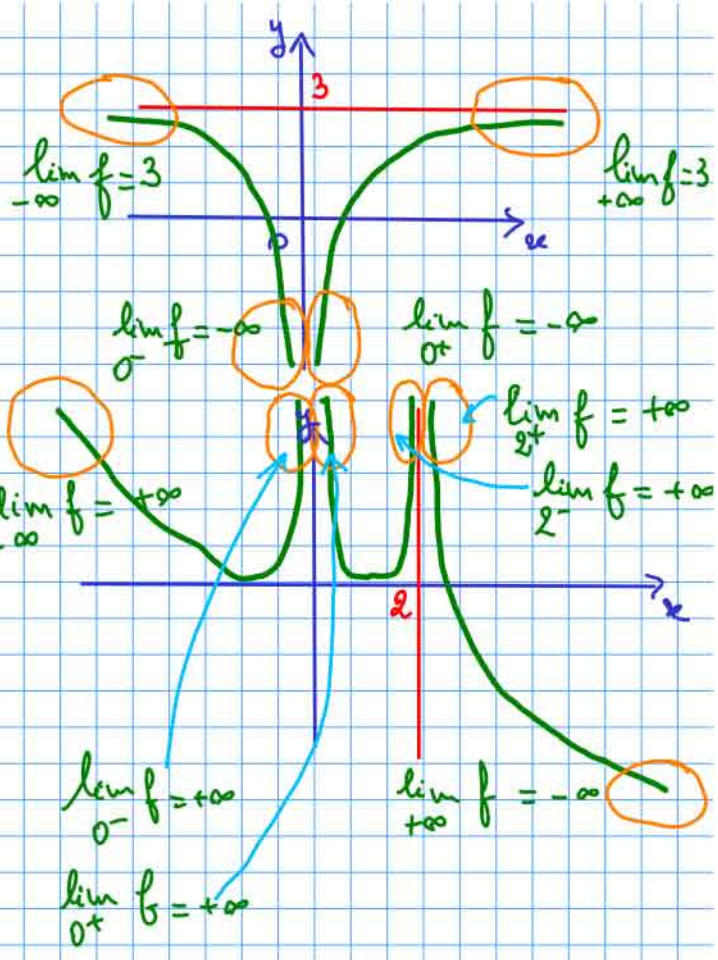
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-3)=0$ et la droite d'équation $y = x - 3$ est bien une asymptote à la courbe représentative de *f*.

x	0		+∞
f'		+	
f	-∞	↗	+∞





x	-∞		0		+∞
f'		-	‖	-	
f	0	↘ -∞	‖ +∞	↘	0



20100301-Limites3

Act 2 p 87

① a) $\boxed{x>0}$ on a $x^2 \geqslant 10^4$ dès que $x \geqslant 10^2$

$x \in [100 ; +\infty[$

b) $\boxed{x<0}$ on a $x^2 \geqslant 10^6$ dès que $x \leqslant -10^3$

$x \in]-\infty ; -10^3]$

c) on a $x^2 \geqslant 10^{10}$ dès que $x \geqslant 10^5$ ou $x \leqslant -10^5$

$x \in]-\infty ; -10^5] \cup [10^5 ; +\infty[$

② $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 7x^2+100 \end{array}$

- Pour avoir $f(x) \geqslant 1100$, il suffit d'avoir :

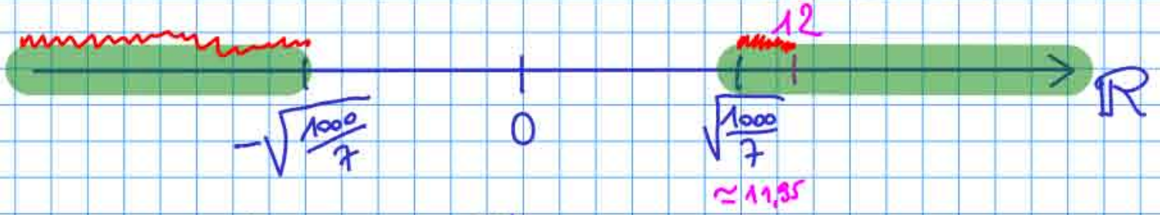
$7x^2+100 \geqslant 1100$. Il suffit donc d'avoir :

$7x^2 \geqslant 1000$ et donc d'avoir :

$x^2 \geqslant \frac{1000}{7}$ soit

$\left(x-\sqrt{\frac{1000}{7}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{1000}{7}}\right) \geqslant 0$ soit

$x \in \left]-\infty ; -\sqrt{\frac{1000}{7}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1000}{7}} ; +\infty\right[$



$x \geqslant 12$ ne suffit pas.

- Pour avoir $f(x) \geqslant 1000$, il suffit d'avoir

$\boxed{x>0}$

$7x^2+100 \geqslant 1000$

$7x^2 \geqslant 900$

$x^2 \geqslant \frac{900}{7}$ donc il suffit :

$\dashrightarrow x \geqslant \sqrt{\frac{900}{7}} \simeq 11{,}34$

Si $x \geqslant 11$, cela ne suffit pas.

- Si $x \geqslant 1000$, alors $7x^2 + 100 \geqslant 7 \times 1000^2 + 100$

Oui cela suffit.

càd $f(x) \geqslant 1000\;1000$

③ Pour $x \geqslant 10\,000^2$, $\sqrt{x} \geqslant 10\,000$

Pour avoir la courbe représentative de la fonction $\sqrt{\ }$ au dessus de la dte d'éq $y = 10\,000$, il suffit d'avoir :

$$x \in [10^8 ; +\infty[$$

Activité 3

Asymptotes horizontale et verticale.

1) Comportement en +∞.

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$x \in]-1 ; +\infty[$

ⓐ

- * pour $x \in [0 ; 10]$

$$0 \leq f(x) \leq 9{,}1$$

- * pour $x \in [100 ; 200]$ $\quad 99{,}01 \leq f(x) \leq 199$
- * pour $x \in [1000 ; 2000]$ $\quad 999 \leq f(x) \leq 1999$

ⓑ $g(x) = x - 1$ est une fonction affine dont $\mathcal{C}_f$ semble se rapprocher au voisinage de +∞.

On dit que $\mathcal{D}$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$, au voisinage de +∞.

2) Comportement au voisinage de −1

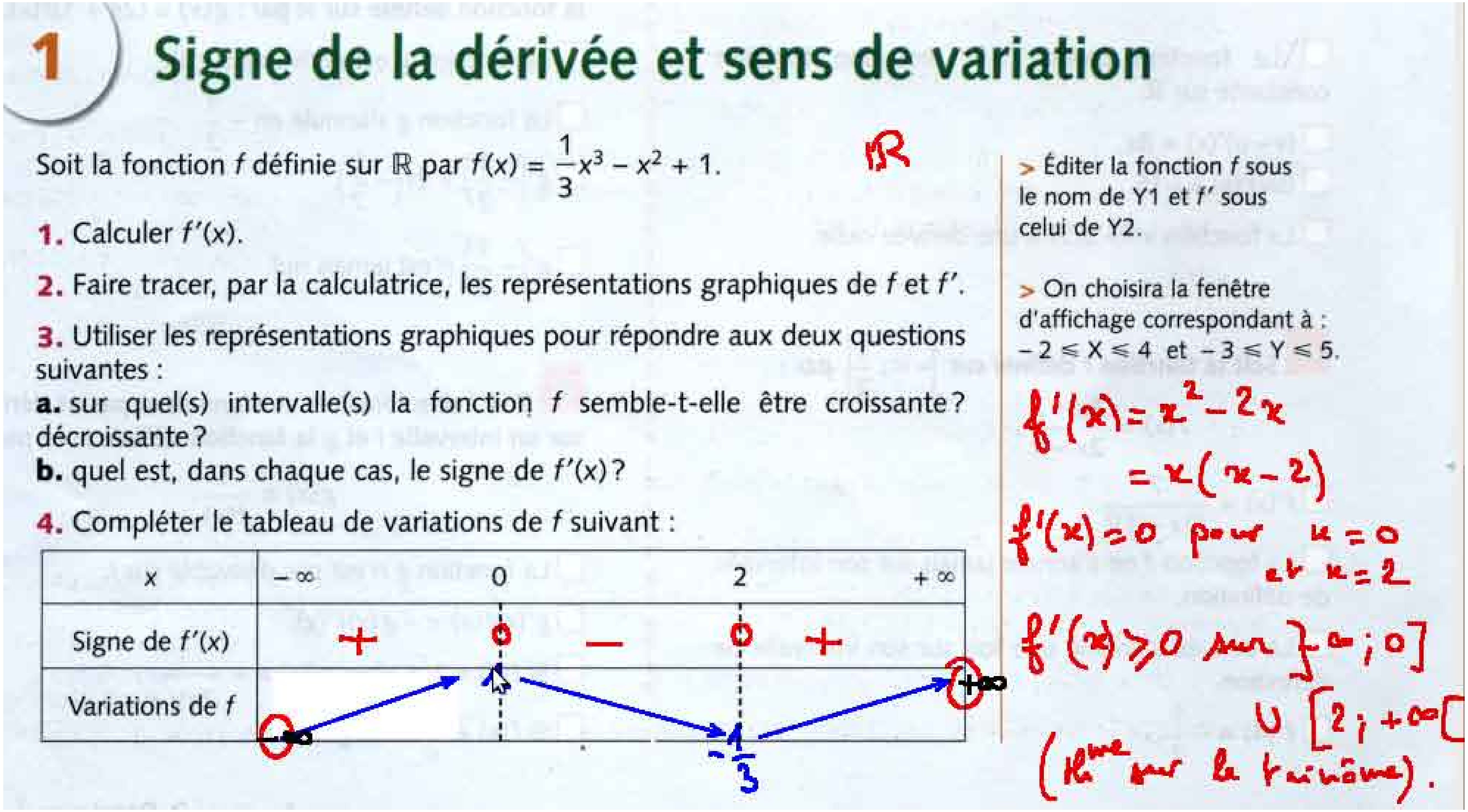
Pour $-0{,}99 \leq x \leq -0{,}9$, $f(x) \in [98{,}01 ; 8{,}1]$

Pour $-0{,}999 \leq x \leq -0{,}99$, $f(x) \in [998 ; 98{,}01]$

Plus x se rapproche de -1, plus $f(x)$ devient grand.

on a ici $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$

Et la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.



1 Signe de la dérivée et sens de variation

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$.

$\mathbb{R}$

1. Calculer $f'(x)$.

2. Faire tracer, par la calculatrice, les représentations graphiques de f et f'.

3. Utiliser les représentations graphiques pour répondre aux deux questions suivantes :
a. sur quel(s) intervalle(s) la fonction f semble-t-elle être croissante ? décroissante ?
b. quel est, dans chaque cas, le signe de $f'(x)$?

4. Compléter le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	1	↘	$-\frac{1}{3}$	↗	$+\infty$

> Éditer la fonction f sous le nom de Y1 et f' sous celui de Y2.

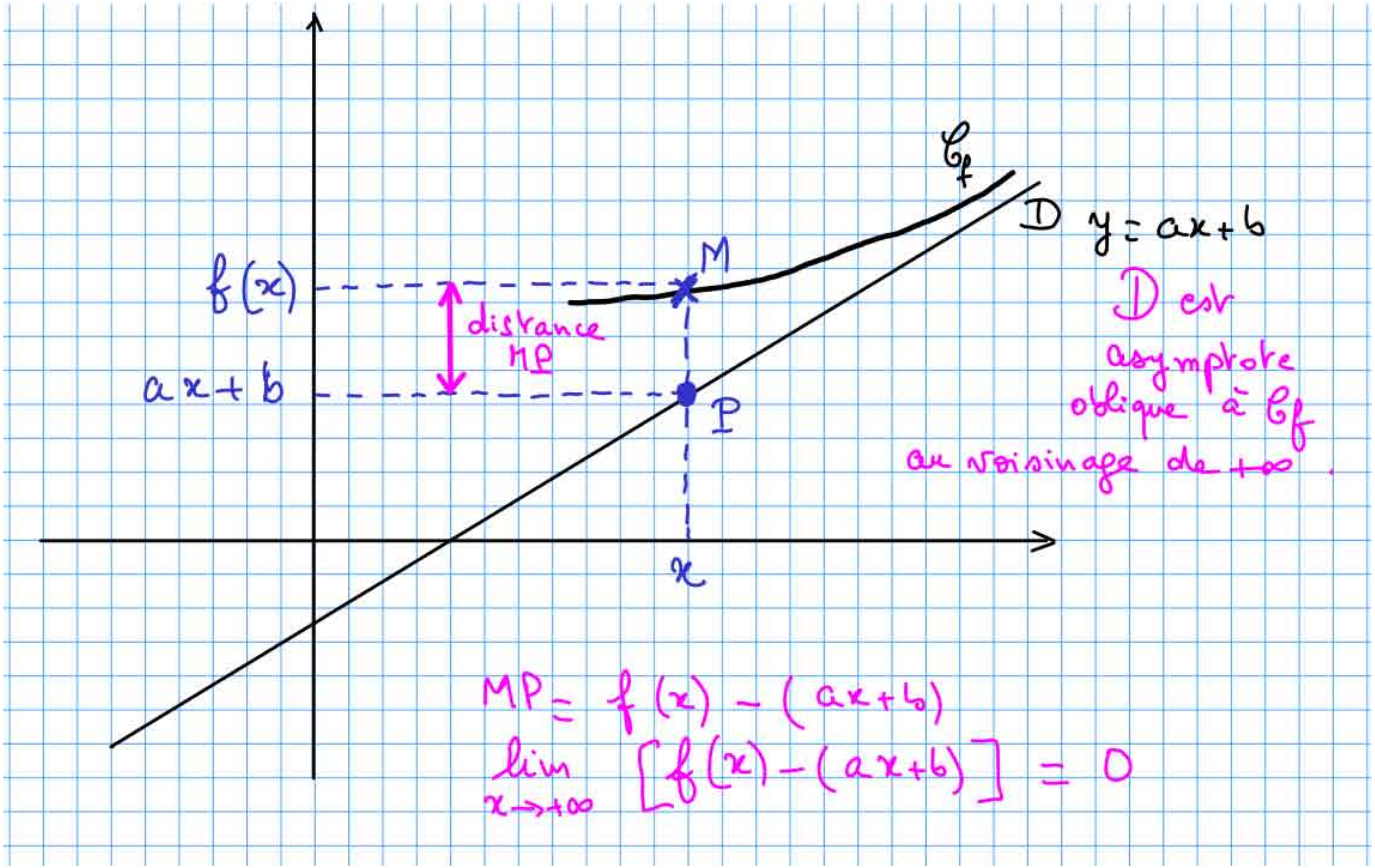
> On choisira la fenêtre d'affichage correspondant à : $-2 \leqslant X \leqslant 4$ et $-3 \leqslant Y \leqslant 5$.

$$f'(x) = x^2 - 2x$$
$$= x(x-2)$$

$f'(x) = 0$ pour $x = 0$
et $x = 2$

$f'(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty ; 0]$
$\cup [2 ; +\infty[$
(Th^{me} sur le trinôme).

20100301-TableauDeVariation



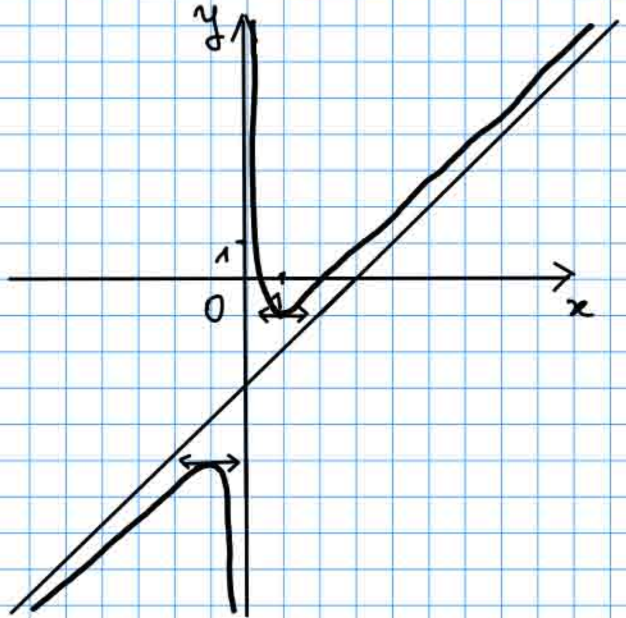
D est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

$$MP = f(x) - (ax+b)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$$

20100302-AsymptoteOblique

Représentation graphique



A(-1 ; -5)
B(1 ; -1)
} sommets avec tangente horizontale

Domaine de définition

$D_f = \mathbb{R}^*$

ETUDE D'UNE FONCTION

$f(x) = x - 3 + \frac{1}{x}$

$(\mathcal{C}_f)$

Limites aux bornes du Domaine de Définition

$D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

① ② ③ ④

① $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

② $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

③ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

④ $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

Asymptotes éventuelles

① La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$

② $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$ (idem en $-\infty$)

Donc la droite d'éq. $y = x-3$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.

Sens de variation

Dérivée de f

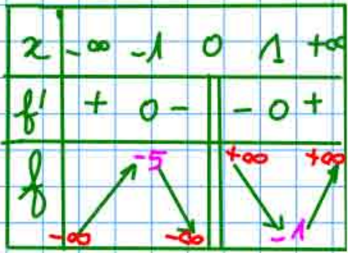
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

Signe de la dérivée :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

f' est du signe du numérateur dc f' > 0 à l'ext des racines -1 et 1

Tableau de variation



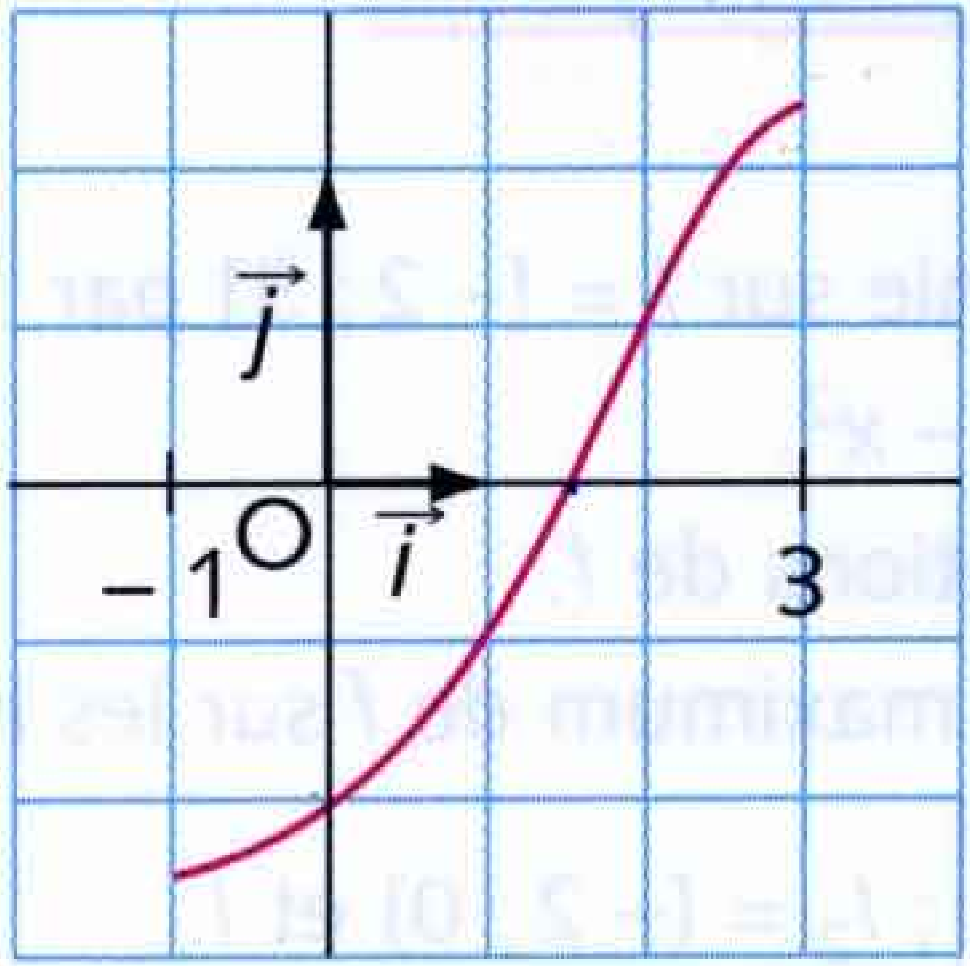
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

20100302-CarteMentaleEtudedeFonction

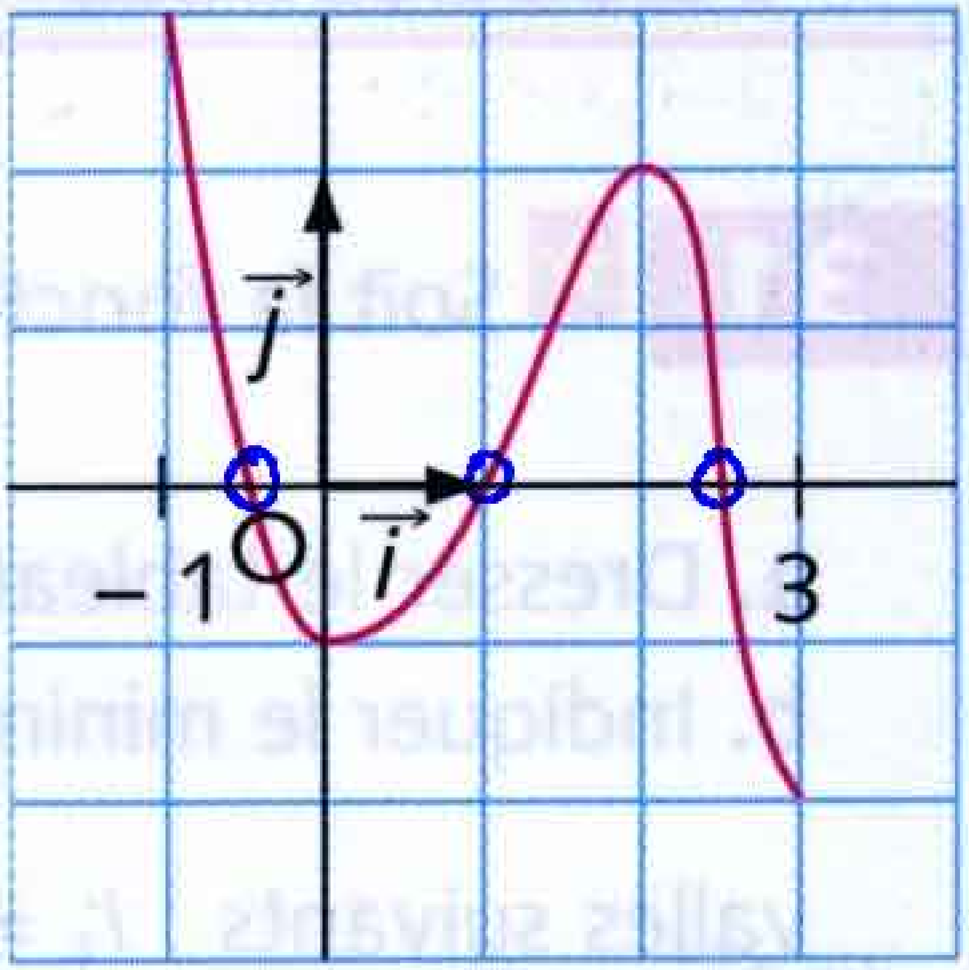
x	-1		$3/2$		3
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

x	-1		$-1/2$		1		$5/2$		3
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↗		↘		↗		↘	

27 $I = [-1\,;3]$



28 $I = [-1\,;3]$



Exercice 29 page 99

- $f'(x) = x^2 + 1$ donc $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + k$, $k \in \mathbb{R}$

  donc c'est Γ et $f(0) = 0$ donc $k = 0$

  $$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$$

- $g'(x) = -\frac{1}{2}$ alors $g(x) = -\frac{1}{2}x + k$, $k \in \mathbb{R}$

  donc c'est la droite bleue $\mathcal{D}$ et $g(0) = -1$

  donc $k = -1$

  $$g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$$

- $h'(x) = -2x + 4$ donc $h(x) = -x^2 + 4x + k$, $k \in \mathbb{R}$

  (donc c'est la parabole rouge $\mathcal{C}$ et $h(0) = 0$ donc $k = 0$

  $h(x) = -x^2 + 4x$)

  avec le pt $(1;3)$:

  $h(1) = +3$ donc $-1 + 4 + k = 3$ donc $k = 0$.

20100305-LimitesAsymptotesEx29Page99

Exercice 30 p 99

$h'(x) = 3x(x-2) = 3x^2 - 6x + 0$

$h(x) = x^3 - 3x^2 + k$ avec $k=3$ puisque $h(0) = 3$.

$\mathcal{C}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	0	$+$	
h	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

$a(x-0)(x-2)$

Γ

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f(x) = x^4 - 2x^2 + k$

et comme $f(0) = 1$, $k = 1$

$$\boxed{f(x) = x^4 - 2x^2 + 1}$$

$\mathcal{D}$

x	$-\infty$		$+\infty$
g'		0	
g		→	

$g(x) = -1{,}5$

$g'(x) = 0$

PS1	Mathématiques	mardi 16 mars 2010
Lycée Antoine Roussin	Asymptotes et courbes	Durée : 1 h 30

Exercice 1 : Courbes et asymptotes *Sans calculatrice* *(6 points)*

Sur la page 2, vous avez 6 courbes correspondant à 6 fonctions *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et *f*.
Etablir les tableaux de variation de chacune de ces courbes en indiquant les asymptotes éventuelles, après les avoir justifiées.
Les images dont vous avez besoin seront indiquées, si besoin est, $a(x)$, $b(x)$ etc... où x est l'abscisse du point et *a*, *b*, etc... le nom de la fonction concernée.
Les abscisses dont vous pouvez avoir besoin sont toutes indiquées sur le graphique, soit avec des nombres, soit avec des lettres (r, t, r', t').

Exercice 2 : le labyrinthe *Sans calculatrice* *(4 points)*

En page 3, Marie et Vincent veulent aller ensemble à un concert.
Ils partent de la case en bas à gauche marquée DEPART et sont obligés de prendre 2 directions différentes. De chaque case, ils peuvent se rendre dans une case voisine, ***à condition de suivre la direction d'une asymptote à la courbe dont l'équation figure dans la case où ils sont.***

A quel type de concert peuvent-ils se retrouver : jazz ? rock ? Classique ?

On indiquera clairement les chemins et raisonnements suivis pour Marie et Vincent.

RENDRE LES 2 PREMIERS EXERCICES mais garder les feuilles d'énoncé

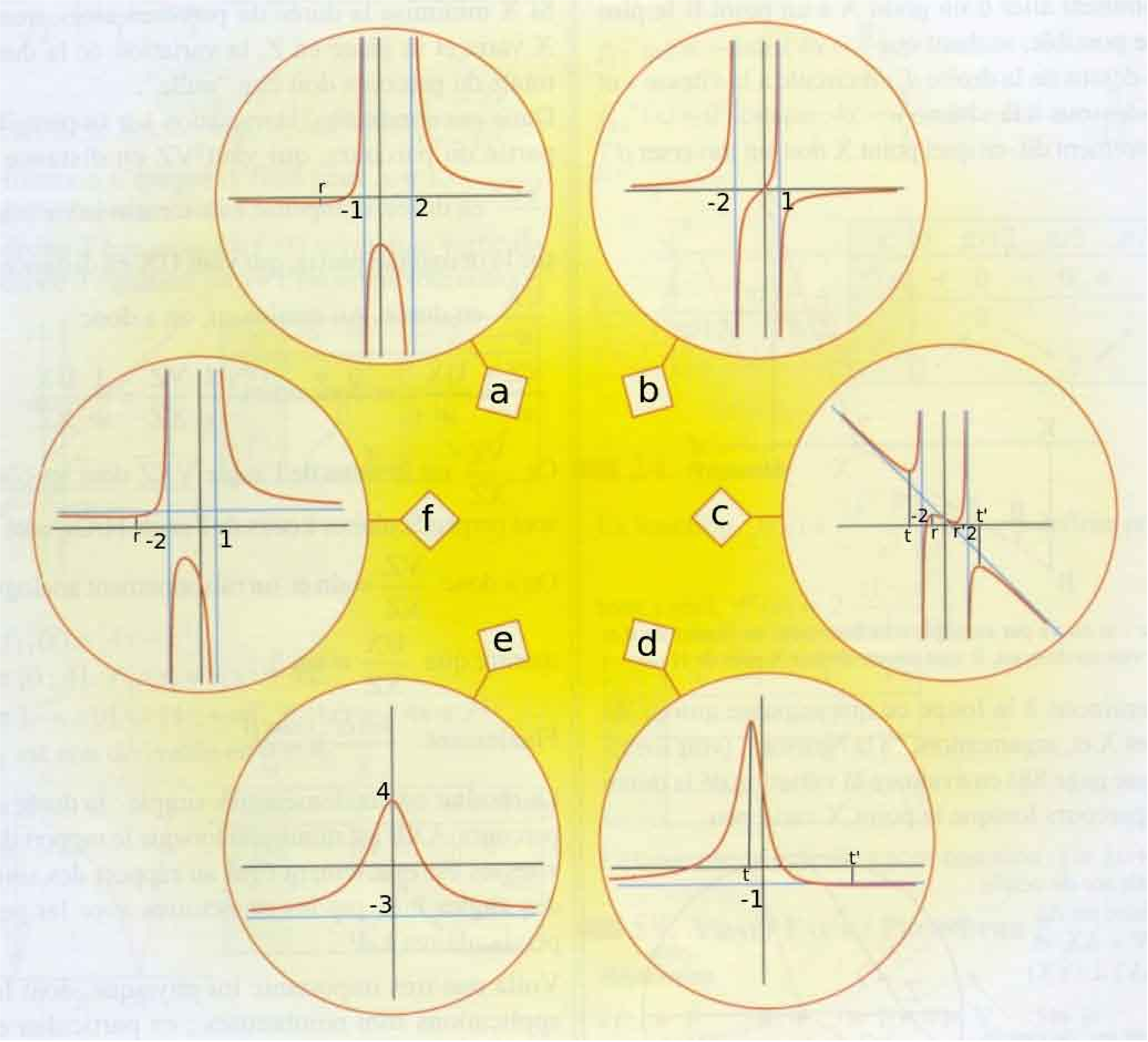
Exercice 3 : Qui va avec qui ? *Sans calculatrice* *(6 points)*

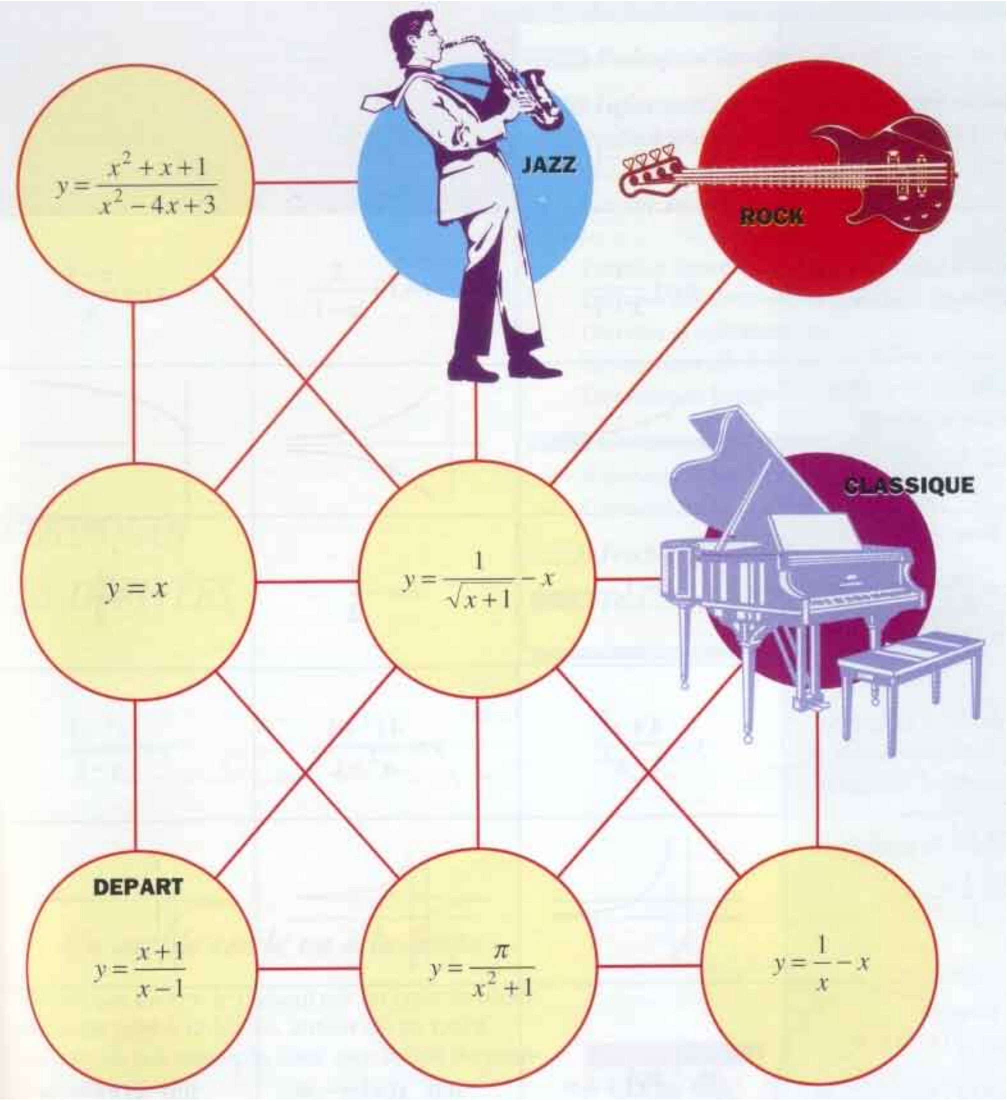
Associer chacune des 6 fonctions de la page 4 à chaque courbe dessinée. Justifier.

RENDRE LE 3ème EXERCICE

Exercice 4 : le labyrinthe *Avec calculatrice* *(4 points)*

Refaire l'exercice 2 à l'aide de la calculatrice.


r
-1
2
a
-2
1
b
-2
t
r
r'
2
t'
c
4
-3
e
t
-1
t'
d
r
-2
1
f



20100308-DevoirAsymptotesPage3

$f : x \mapsto -x + \frac{1}{2} - \frac{2x}{x^2-4}$

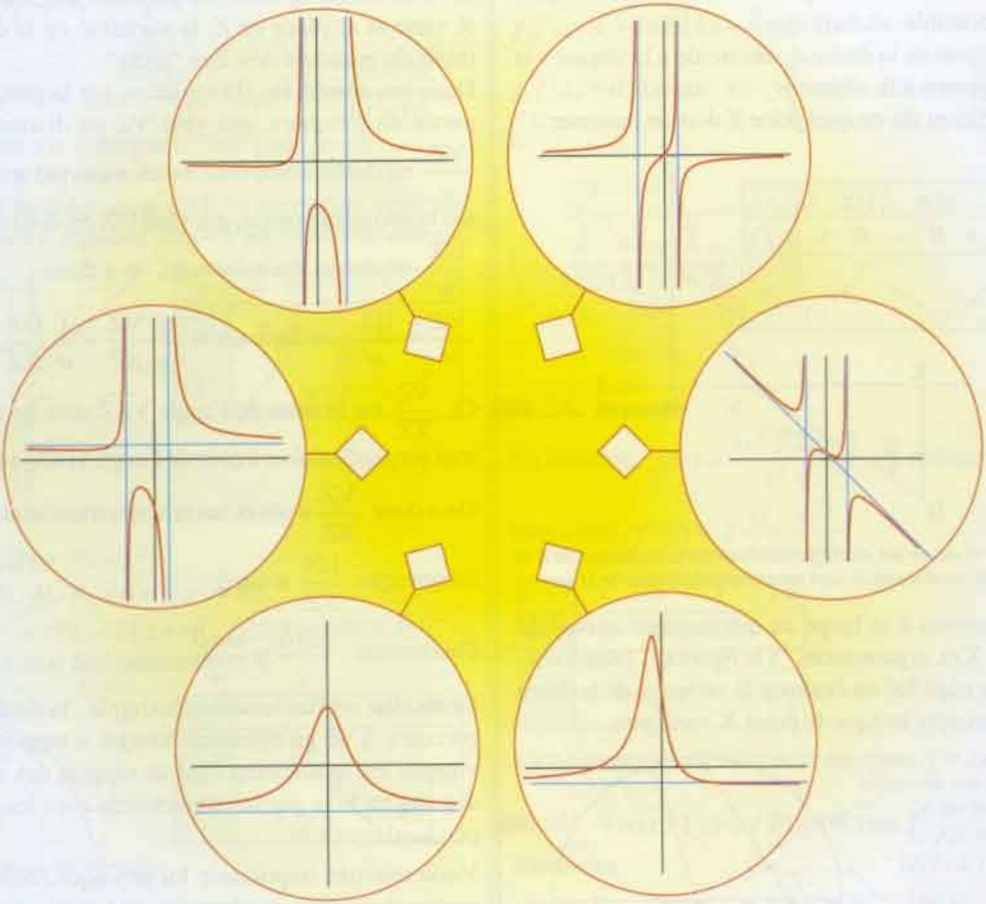
$g : x \mapsto \frac{3x+6}{x^2-x-2}$

$r : x \mapsto \frac{12-3x^2}{x^2+3}$

$a : x \mapsto \frac{x^2+4x+7}{x^2+x-2}$

$i : x \mapsto \frac{-2x}{(x-1)(x+2)}$

$o : x \mapsto \frac{-x^2-3x+5}{x^2+x+1}$



(ex) $S = \underset{A}{147} + 144 + \dots\dots + \underset{B}{9}$

Analyse Calcul de la somme des termes d'1 SA

Variable : S stockage de la somme

Entrées
- A début
- B fin
- R raison.

C termes de la suite

Algorithme

```
Entrer A
Entrer B                     A → C  (initialise C)
Entrer R
A → S         (on initialise la somme)
Pour I allant de 1 à 1000    (on "surdimensionne" la boucle)
    S+R → S        (on calcule la somme).
  * C+R → C        (on calcule les termes de la suite)
    Si C = B
        Alors
            STOP
    Fin Si
Fin Pour
Afficher S
```

Faire le même programme pour la somme des termes d'une suite géométrique.

20100309-AlgorithmeSommeTermesSA

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + 5 \\ u_0 = -7 \end{cases}$$

$u_1 = \frac{13}{4}$ $u_2 = \frac{93}{16}$ $u_3 = \frac{413}{64}$

1) Si la suite u est arithmétique, alors :

la raison serait $r = u_2 - u_1 = \frac{93}{16} - \frac{13}{4} = \frac{41}{16}$

$u_2 + r = \frac{93}{16} + \frac{41}{16} = \frac{67}{8} \neq u_3$

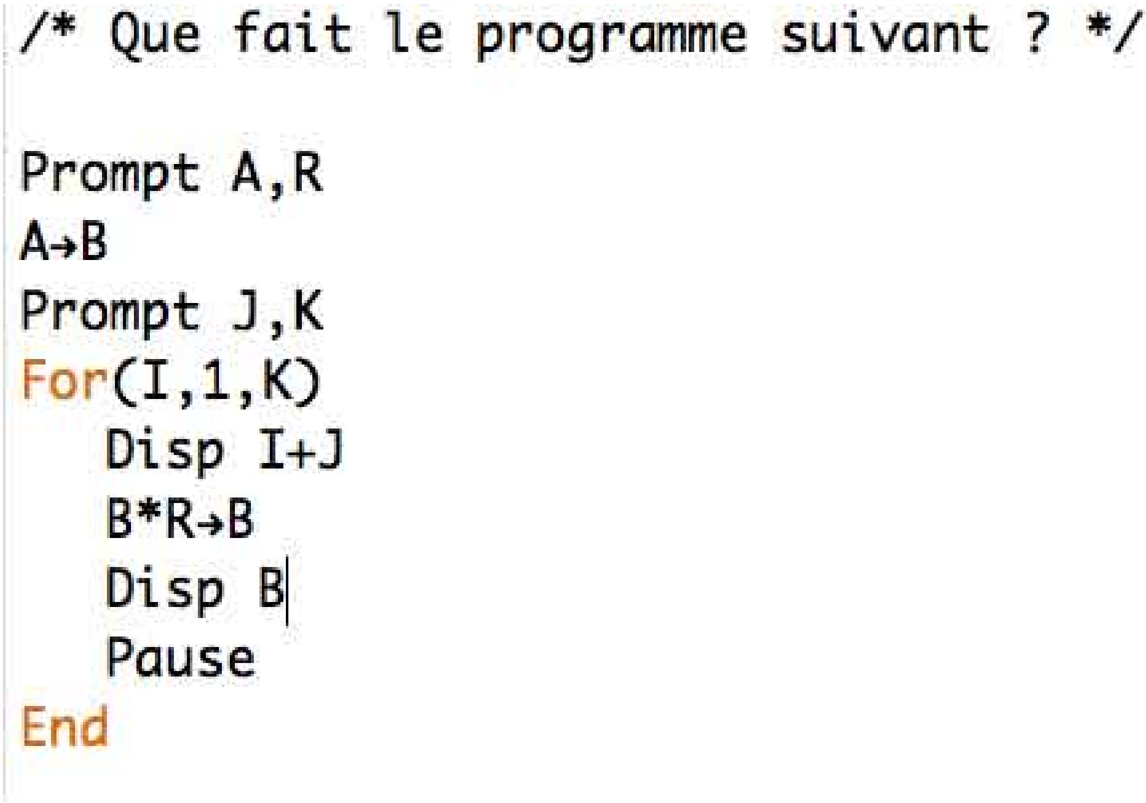
2) Si la suite u était géom, alors :

la raison serait $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{93}{152}$ et $u_2 \times \frac{93}{152} = \frac{8649}{832} \neq u_3$

20100309-CorrectionDSSuitesEx1

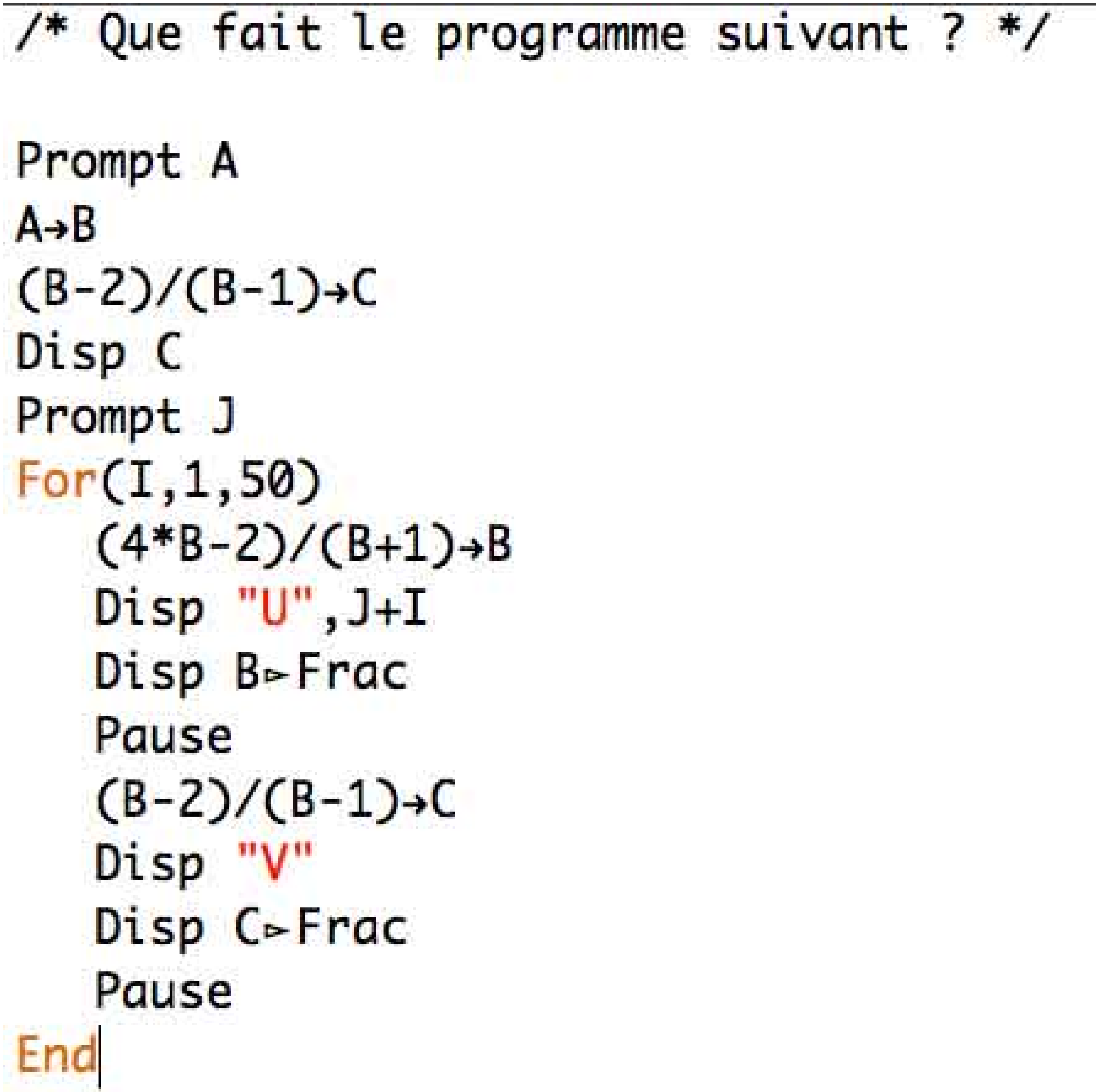
```
/* Correction de l'exercice 1 du DS
   sur les suites */

Prompt A
A→B
For(I,1,20)
   1/4*B+5→B
   ClrHome
   Disp "U"
   Disp I,B
   Disp B▸Frac
   Pause
   B-20/3→C
   Disp "V"
   Disp C▸Frac
   Pause
End
```

20100309-ProgrammeTI82-Ex1DuDSSurLesSuites



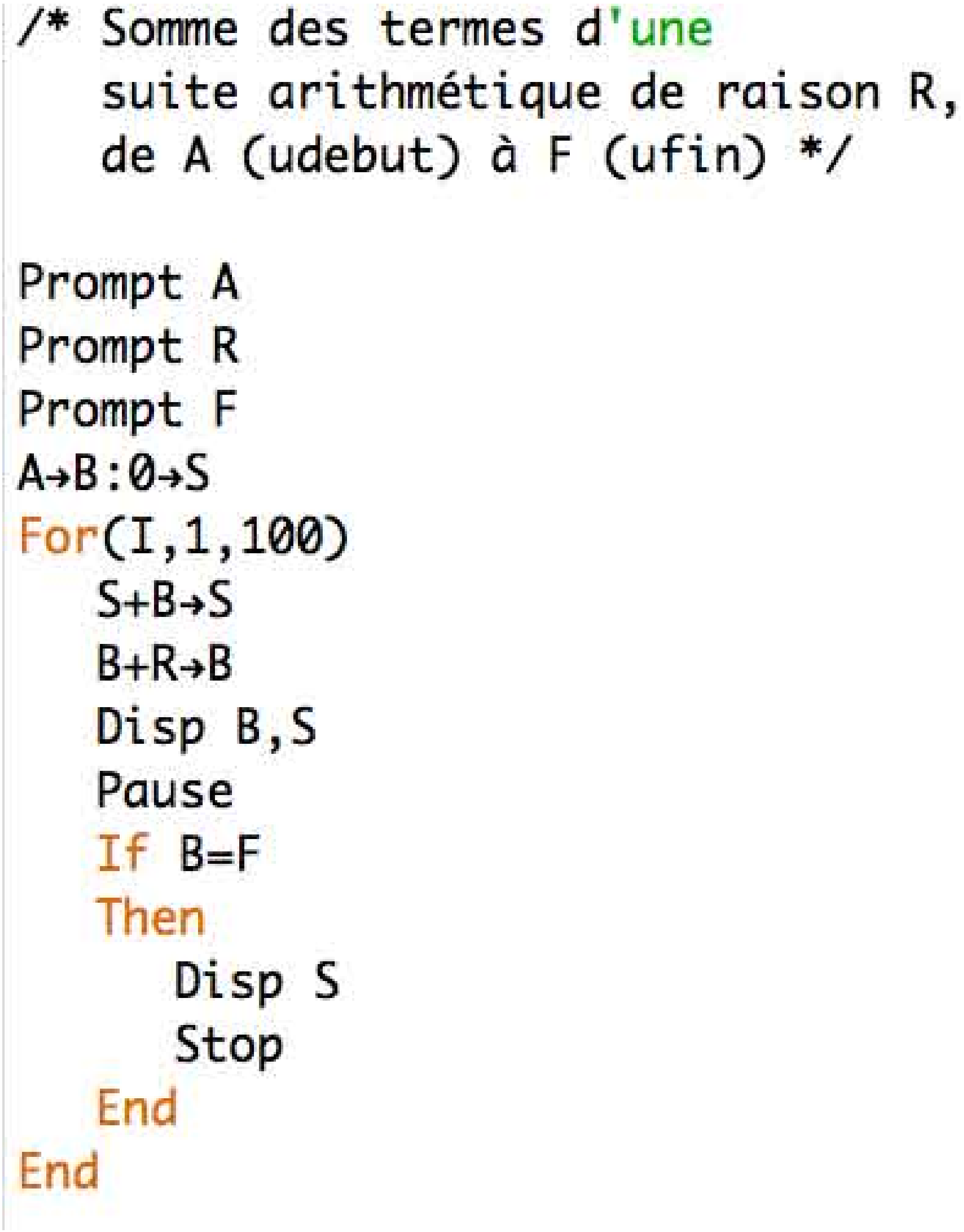
```
/* Que fait le programme suivant ? */

Prompt A,R
A→B
Prompt J,K
For(I,1,K)
   Disp I+J
   B*R→B
   Disp B
   Pause
End
```

20100309-ProgrammeTI82-QueFaitLeProgramme1



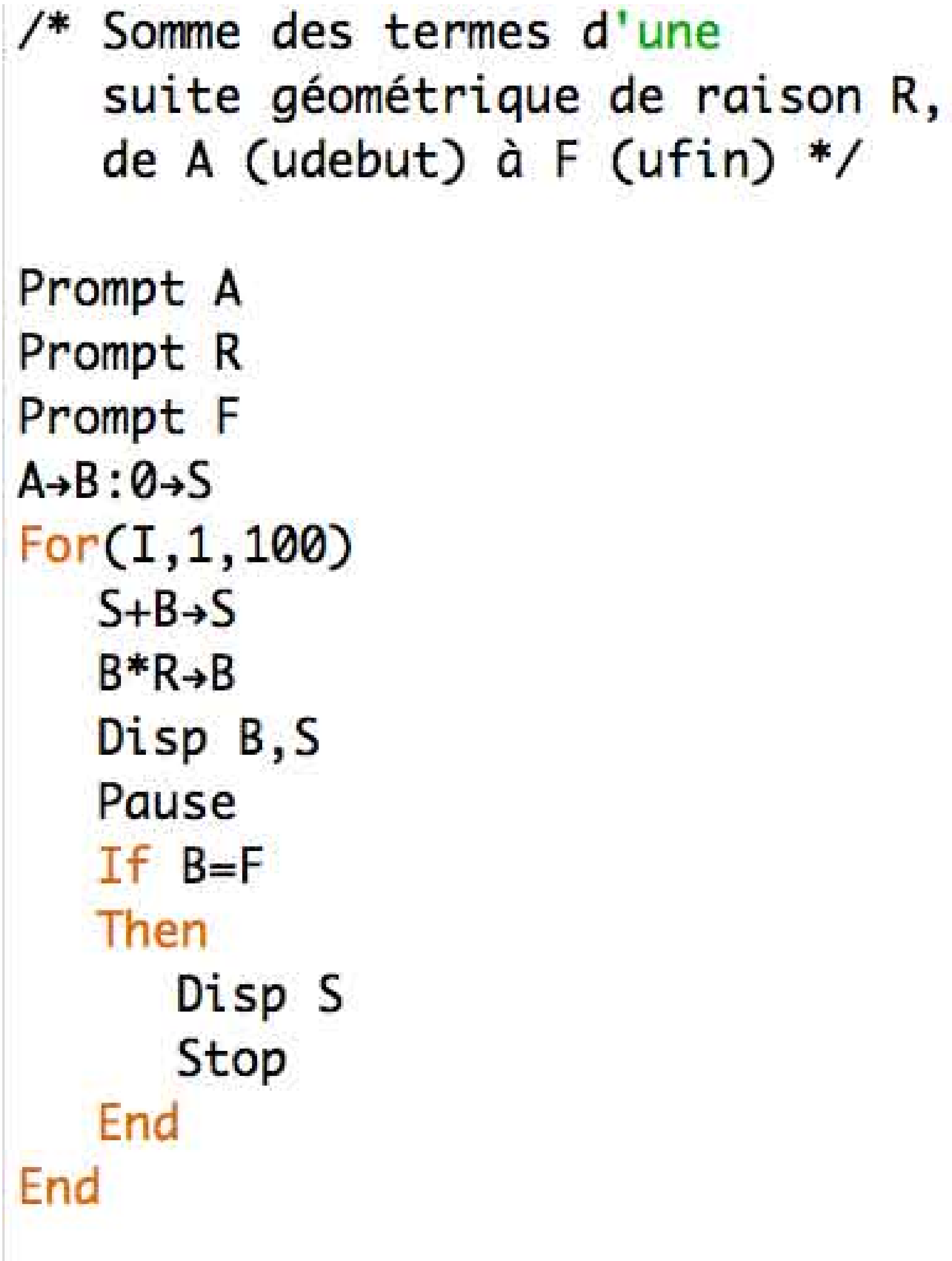
```
/* Que fait le programme suivant ? */

Prompt A
A→B
(B-2)/(B-1)→C
Disp C
Prompt J
For(I,1,50)
   (4*B-2)/(B+1)→B
   Disp "U",J+I
   Disp B▸Frac
   Pause
   (B-2)/(B-1)→C
   Disp "V"
   Disp C▸Frac
   Pause
End
```

20100309-ProgrammeTI82-QueFaitLeProgramme2



```
/* Somme des termes d'une
   suite arithmétique de raison R,
   de A (udebut) à F (ufin) */

Prompt A
Prompt R
Prompt F
A→B:0→S
For(I,1,100)
   S+B→S
   B+R→B
   Disp B,S
   Pause
   If B=F
   Then
      Disp S
      Stop
   End
End
```

20100309-ProgrammeTI82-SommeDesTermesDuneSuiteArithmetique

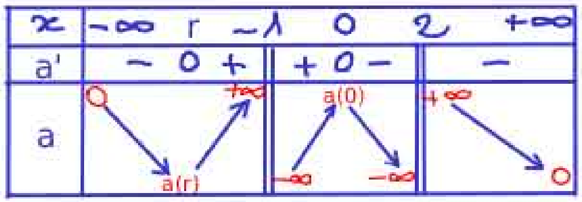


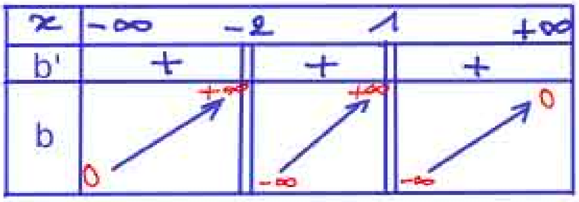
```
/* Somme des termes d'une
   suite géométrique de raison R,
   de A (udebut) à F (ufin) */

Prompt A
Prompt R
Prompt F
A→B:0→S
For(I,1,100)
   S+B→S
   B*R→B
   Disp B,S
   Pause
   If B=F
   Then
      Disp S
      Stop
   End
End
```

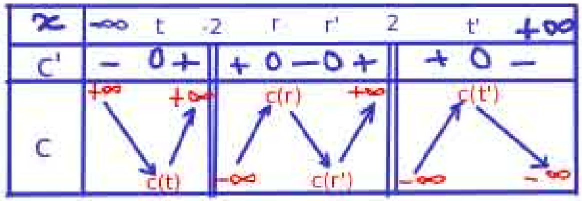
20100309-ProgrammeTI82-SommeDesTermesDuneSuiteGeometrique

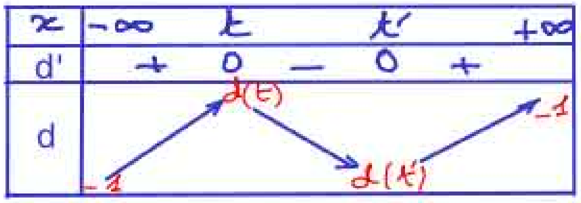
Correction du devoir sur les limites et asymptotes du 16 mars 2010

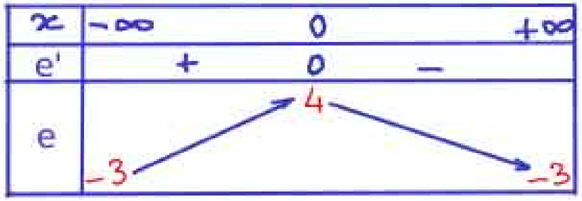
Exercice 1

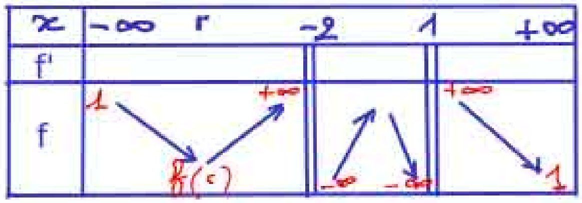












Les asymptotes : a) 2 asymptotes verticales d'équation x=-1 et x=2
1 symptote horizontale d'équation y=0

b) 2 asymptotes verticales d'équation x=-2 et x=1

c) 2 asymptotes verticales d'équation x=-2 et x=2
1 symptote oblique

d) 1 asymptote horizontale d'équation y=-1

e) 1 asymptote horizontale d'équation y=-3

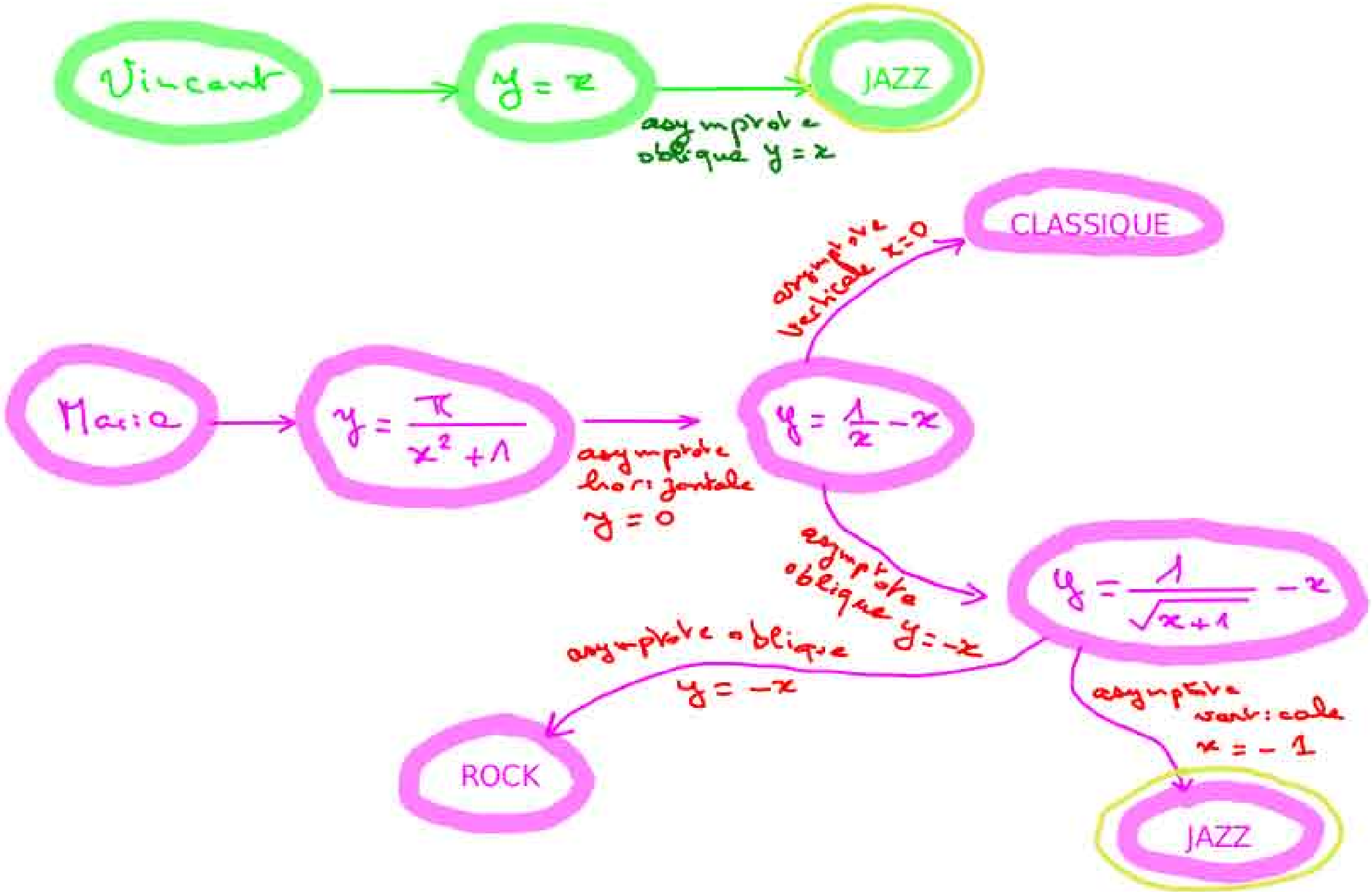
f) 2 asymptotes verticales d'équation x=-2 et x=1
1 symptote horizontale d'équation y=1

Exercice 2 : le labyrinthe

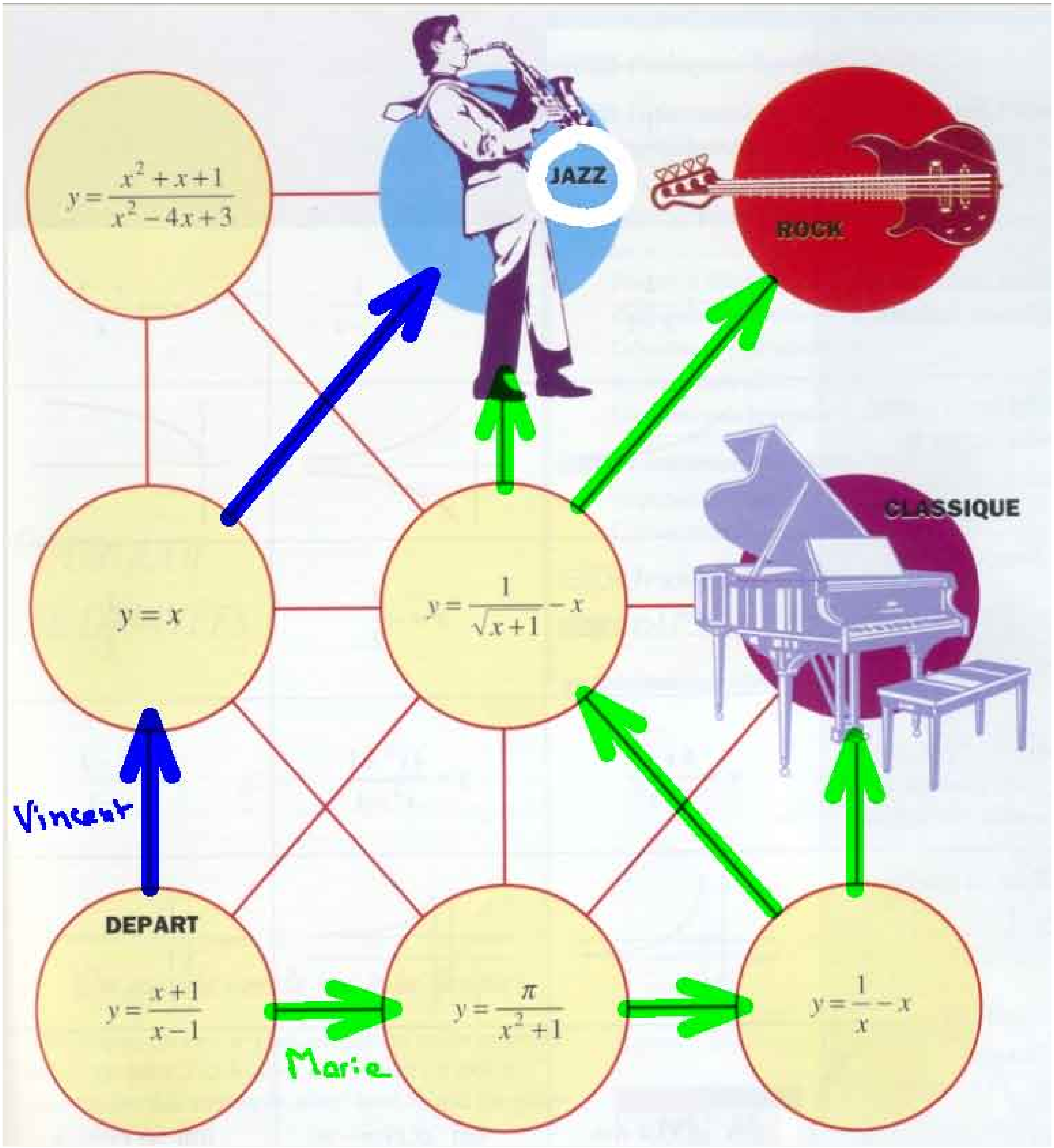
$y = \frac{x+1}{x-1}$ s'écrit $y = \frac{x-1+2}{x-1}$ donc $y = 1 + \frac{2}{x-1}$ et possède donc 2 asymptotes :

- $x = 1$ verticale car $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$
- $y = 1$ horizontale car $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ \text{ou } -\infty}} \frac{x+1}{x-1} = 1$

Supposons que Marie se déplace suivant l'asymptote horizontale et Vincent suivant l'asymptote verticale.



CONCLUSION :
Marie et Vincent peuvent se retrouver au concert de Jazz.



20100316-DevoirAsymptotesCorrectionEx2b

Exercice 3 : Qui va avec qui ?

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ sont r ($x^2+3>0$ pour $\forall x$) et o (car $x^2+x+1>0$ pr $\forall x$: $\Delta<0$)

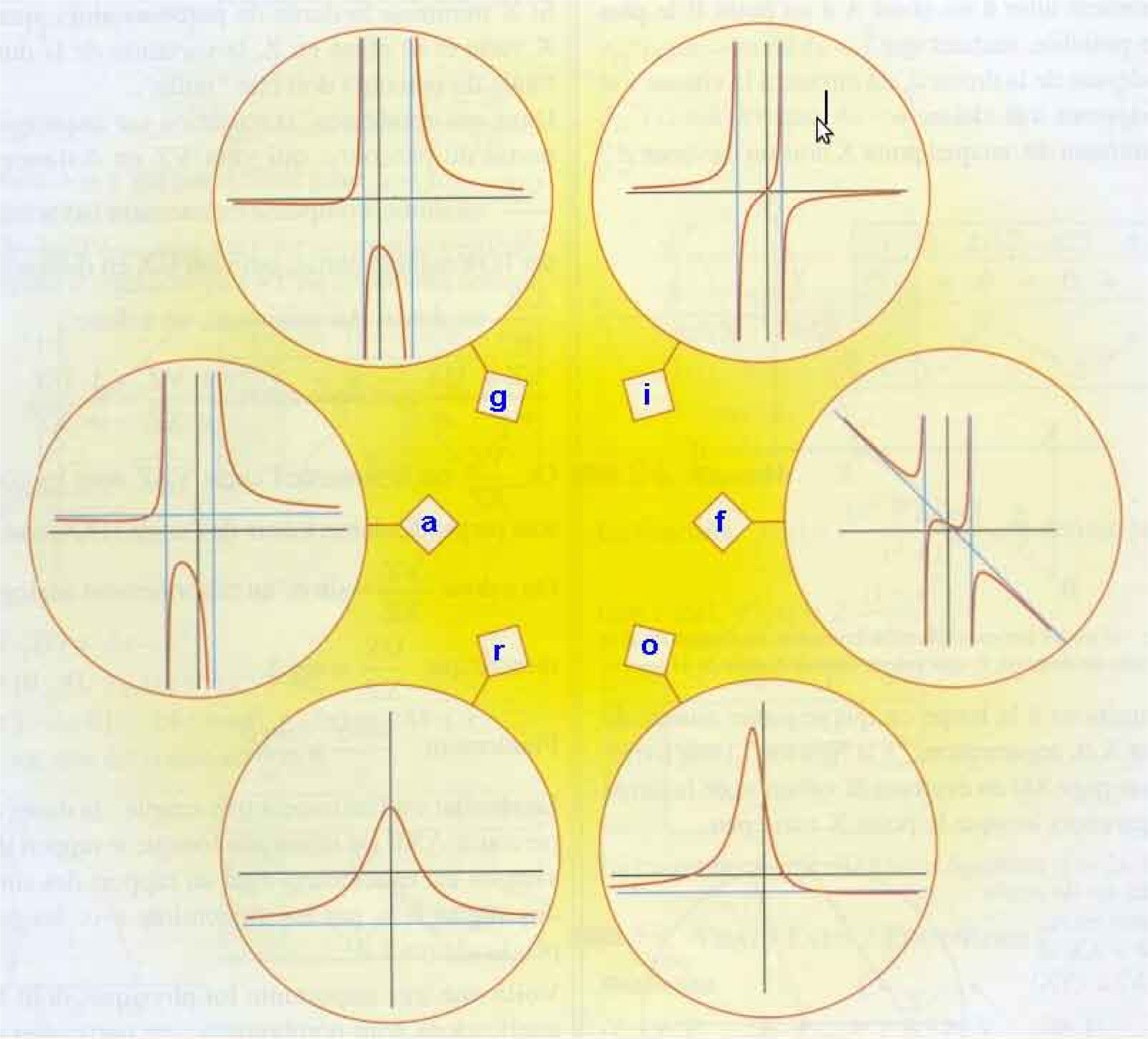
r est paire ($r(-x)=r(x)$ pr $\forall x$)
Donc les 2 courbes du bas sont r et o (si on tourne dans le sens trigo).

a : $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ $\quad D_a=\mathbb{R}-\{1;-2\}=D_i$

$i(0)=0$ d'où les 2 courbes associées.

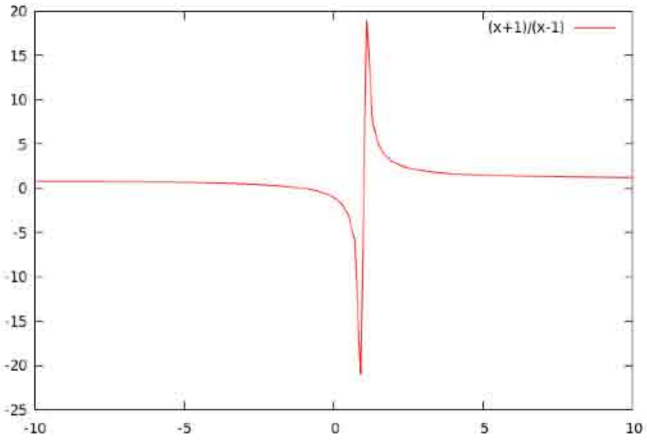
f : $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$ $\quad$ 1 seule courbe possible.

La seule courbe qui reste est donc celle de g.

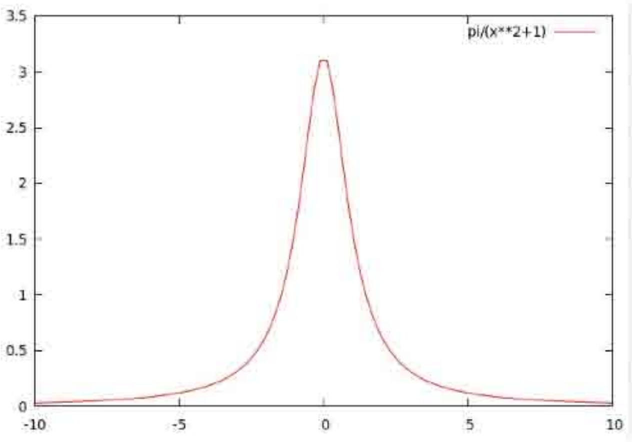


20100316-DevoirAsymptotesCorrectionEx3b

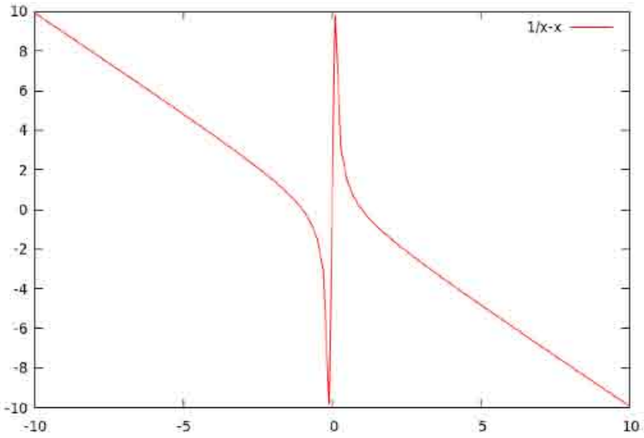
Exercice 4. A la calculatrice, on peut obtenir les tracés suivants et en déduire visuellement les directions des asymptotes.



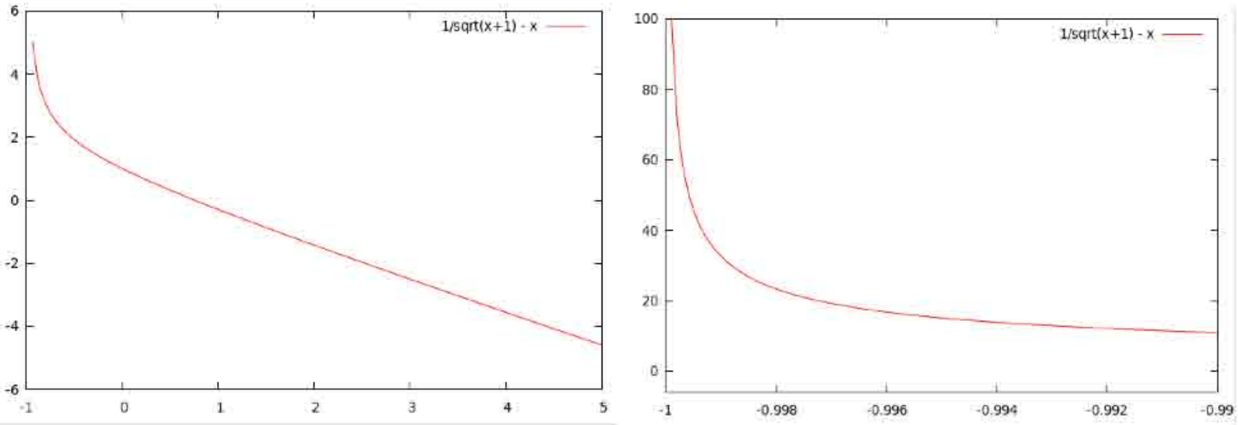
2 asymptotes : une verticale (x=1) et une horizontale (y=1)



1 asymptote horizontale (x=0)



2 asymptotes : une verticale (x=0)
et une oblique (y=-x)



2 asymptotes : une oblique d'équation y=-x et une verticale au voisinage de -1

Remarque : les tracés sont ici obtenus avec le logiciel gnuplot.

- $f(x) = x^2 - x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$

Méthode : Fonction polynôme :

$f(x) = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ car $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

D'après le théorème sur le produit des limites,

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right) \times \left(x^2 + 4x\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 4x = +\infty$ Donc on a 1 forme indéterminée

$f(x) = x + 4$ $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

- $$f(x) = \frac{-x^2 - 3x + 5}{x^2 + x + 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \to +\infty} \left(\underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{-x^2} \left(1 + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{3}{x}} - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{5}{x^2}} \right) \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + x + 1) = \lim_{x \to +\infty} \left(\underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x^2} \left(1 + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{x}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{x^2}} \right) \right) = +\infty$$

On a une forme indéterminée

Méthode : Fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{-\cancel{x^2}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \textcircled{$-$}\,\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{3}{x}}-\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{5}{x^2}}\right) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{x}}+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{x^2}}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

20100326-LimitesTheoremes3

$f(x) = -x + \frac{1}{2} - \frac{2x}{x^2-4}$

$x^2 - 4 \neq 0$ $\quad (x-2)(x+2) \neq 0$ $\quad x \neq 2$ et $x \neq -2$

$D_f =]\underset{1}{-\infty} ; \underset{2}{-2}[\cup]\underset{3}{-2} ; \underset{4}{2}[\cup]\underset{5}{2} ; \underset{6}{+\infty}[$

- Limites de f au voisinage $-\infty$ et $+\infty$:

$\lim_{x\to-\infty} \left(-x + \frac{1}{2}\right) = \boxed{+\infty}$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} \left(-x + \frac{1}{2}\right) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} -\frac{2x}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{\cancel{x} \times 2}{\cancel{x}\left(x-\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{x-\underset{\overset{\downarrow}{0}}{\frac{4}{x}}} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} -\frac{2x}{x^2-4} = 0$

$\lim_{-\infty} f = +\infty$ $\qquad \lim_{+\infty} f = -\infty$

- Limites de f au voisinage de -2 :

* par valeurs inférieures

$x < -2$ donc $x + 2 < 0$

$\lim_{x\to-2^-} \left(-x + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

$\lim_{x\to 2^-} (-2x) = 4$ $\qquad \lim_{x\to-2^-} (x^2-4) = \lim_{x\to-2^-} \underbrace{(x-2)}_{\to -4}\underbrace{(x+2)}_{<0 \to 0^-} = 0^+$

$\lim_{x\to-2^-} -\frac{2x}{x^2-4} = +\infty$ $\qquad \boxed{\lim_{-2^-} f = +\infty}$

* par valeurs supérieures

$x > -2$ $\qquad x + 2 > 0$

$\lim_{x\to-2^+} \left(-x + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$ $\qquad \lim_{x\to-2^+} (-2x) = 4$

$\lim_{x\to-2^+} (x^2-4) = \lim_{x\to-2^+} \underbrace{(x-2)}_{\overset{\downarrow}{-4}}\underbrace{(x+2)}_{>0 \to 0^+} = 0^-$

$\lim_{x\to-2^+} -\frac{2x}{x^2-4} = -\infty$ $\qquad \boxed{\lim_{-2^+} f = -\infty}$

- **Limites de f au voisinage de 2**

* par valeurs inférieures (en 2^-)

$x < 2 \qquad x - 2 < 0$

$$\lim_{x\to 2^-} \left(-x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \qquad \lim_{x\to 2^-} (-2x) = -4$$

$$\lim_{x\to 2^-} (x^2-4) = \lim_{x\to 2^-} (x-2)\underbrace{(x+2)}_{4} = 0^-$$

$$\lim_{x\to 2^-} -\frac{2x}{x^2-4} = +\infty \qquad \lim_{2^-} f = +\infty$$

* par valeurs supérieures. (en 2^+)

$x > 2 \qquad x - 2 > 0$

$$\lim_{x\to 2^+} (x^2-4) = 0^+$$

$$\lim_{x\to 2^+} -\frac{2x}{x^2-4} = -\infty \qquad \lim_{2^+} f = -\infty$$

DÉRIVÉE

$u = -2x \qquad u' = -2$

$v = x^2 - 4 \qquad v' = 2x$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-2(x^2-4) - (-2x)(2x)}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+8+4x^2}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{2x^2+8}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{2x^2+8}{(x^2-4)^2} = \frac{-(x^2-4)^2+2x^2+8}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-(x^4-8x^2+16)+2x^2+8}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-x^4+8x^2-16+2x^2+8}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-x^4+10x^2-8}{(x^2-4)^2}$$

signe du numérateur : $X = x^2$

$$-X^2 + 10X - 8$$

$\Delta = 68$ $\qquad X_1 = \frac{-10-\sqrt{68}}{-2} = \frac{10+2\sqrt{17}}{2} = 5+\sqrt{17} > 0$

$X_2 = \frac{-10+\sqrt{68}}{-2} = 5-\sqrt{17} \simeq 0{,}87 > 0$

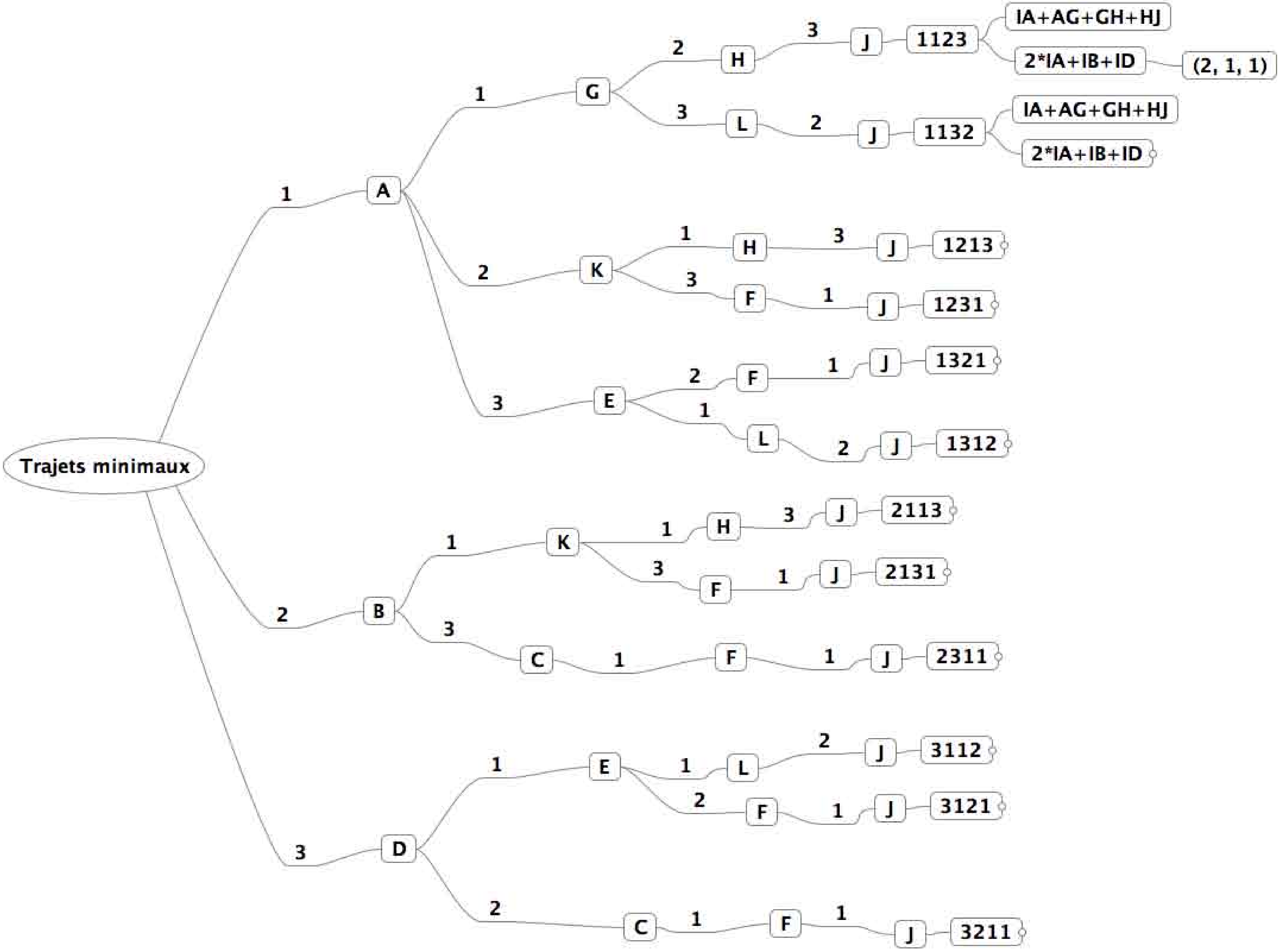
$$-X^2+10X-8 = -(X-X_1)(X-X_2)$$

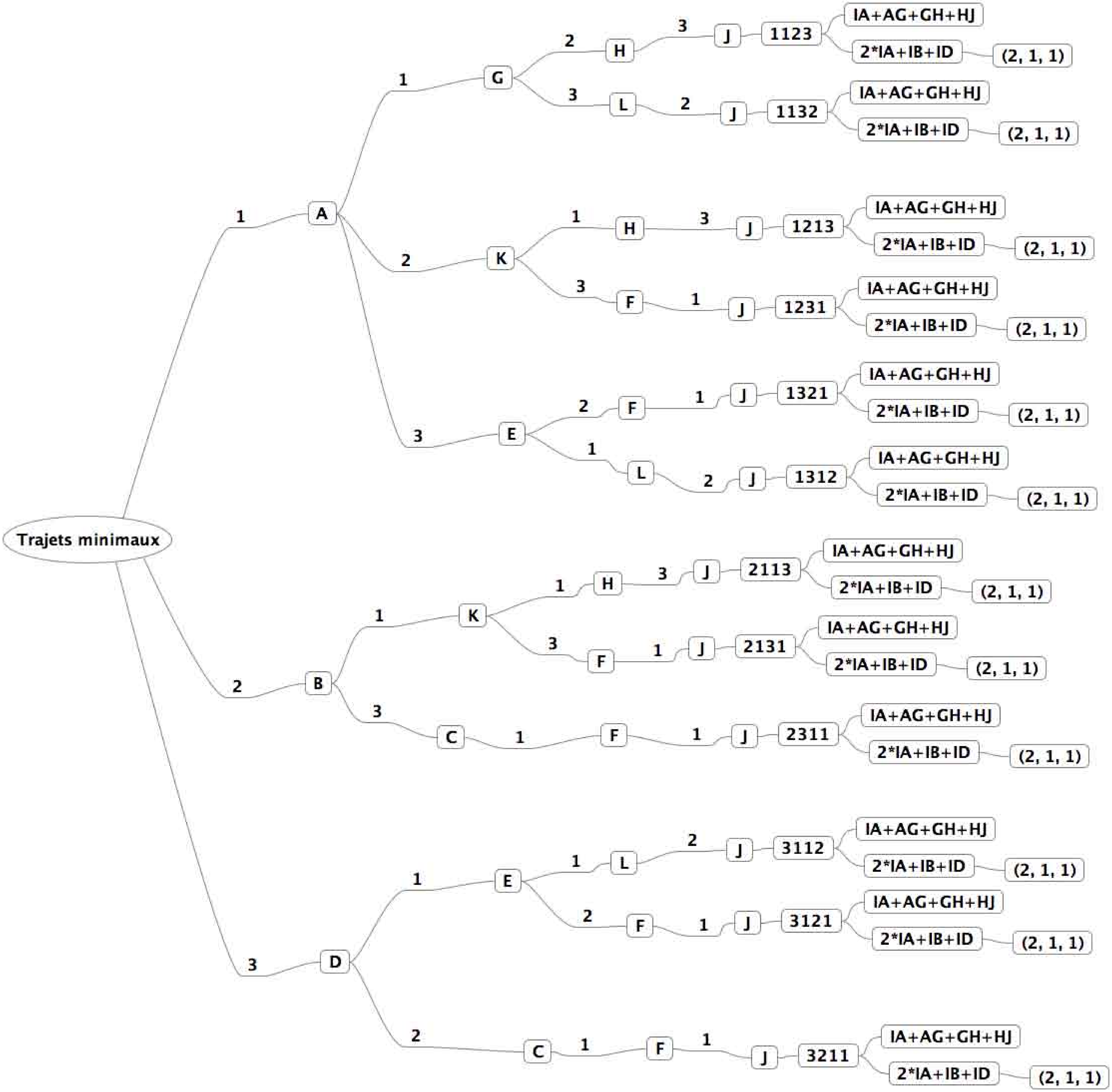
$$= -\left(x^2 - (\underbrace{5+\sqrt{17}}_{>0})\right)\left(x^2 - (\underbrace{5-\sqrt{17}}_{>0})\right)$$

$$= \boxed{-}\underbrace{\left(x-\sqrt{5+\sqrt{17}}\right)\left(x+\sqrt{5+\sqrt{17}}\right)}_{\text{trinôme 1}}\underbrace{\left(x-\sqrt{5-\sqrt{17}}\right)\left(x+\sqrt{5-\sqrt{17}}\right)}_{\text{trinôme 2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5+\sqrt{17}}$		-2		$-\sqrt{5-\sqrt{17}}$		$\sqrt{5-\sqrt{17}}$		2		$\sqrt{5+\sqrt{17}}$		$+\infty$
trin 1		+	0	−	‖	−	|	−	|	−	‖	−	0	+	
trin 2		+	|	+	‖	+	0	−	0	+	‖	+	|	+	
$f'(x)$		−	0	+	‖	+	0	−	0	+	‖	+	0	−	

x	$-\infty$		$\overset{x_0}{-\sqrt{5+\sqrt{17}}}$		-2		x_1		x_2		2		$\overset{x_3}{\sqrt{5+\sqrt{17}}}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	‖	+	0	−	0	+	‖	+	0	−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(x_0)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$f(x_3)$	↘	$-\infty$


Trajets minimaux
1
A
1
G
2
H
3
J
1123
IA+AG+GH+HJ
2*IA+IB+ID
(2, 1, 1)
3
L
2
J
1132
IA+AG+GH+HJ
2*IA+IB+ID
2
K
1
H
3
J
1213
3
F
1
J
1231
3
E
2
F
1
J
1321
1
L
2
J
1312
2
B
1
K
1
H
3
J
2113
3
F
1
J
2131
3
C
1
F
1
J
2311
3
D
1
E
1
L
2
J
3112
2
F
1
J
3121
2
C
1
F
1
J
3211


Trajets minimaux
1
A
1
G
2
H
3
J
1123
IA+AG+GH+HJ
2*IA+IB+ID
(2, 1, 1)
3
L
2
J
1132
IA+AG+GH+HJ
2*IA+IB+ID
(2, 1, 1)
2
K
1
H
3
J
1213
IA+AG+GH+HJ
2*IA+IB+ID
(2, 1, 1)
3
F
1
J
1231
IA+AG+GH+HJ
2*IA+IB+ID
(2, 1, 1)
3
E
2
F
1
J
1321
IA+AG+GH+HJ
2*IA+IB+ID
(2, 1, 1)
1
L
2
J
1312
IA+AG+GH+HJ
2*IA+IB+ID
(2, 1, 1)
2
B
1
K
1
H
3
J
2113
IA+AG+GH+HJ
2*IA+IB+ID
(2, 1, 1)
3
F
1
J
2131
IA+AG+GH+HJ
2*IA+IB+ID
(2, 1, 1)
3
C
1
F
1
J
2311
IA+AG+GH+HJ
2*IA+IB+ID
(2, 1, 1)
3
D
1
E
1
L
2
J
3112
IA+AG+GH+HJ
2*IA+IB+ID
(2, 1, 1)
2
F
1
J
3121
IA+AG+GH+HJ
2*IA+IB+ID
(2, 1, 1)
2
C
1
F
1
J
3211
IA+AG+GH+HJ
2*IA+IB+ID
(2, 1, 1)

Activité 1 p 320

$$\underbrace{\vec{IA}+\vec{AC}}_{\vec{IC}}+\vec{CJ} = \vec{IC}+\vec{CJ} = \vec{IJ}$$

d'après la rel° de Chasles

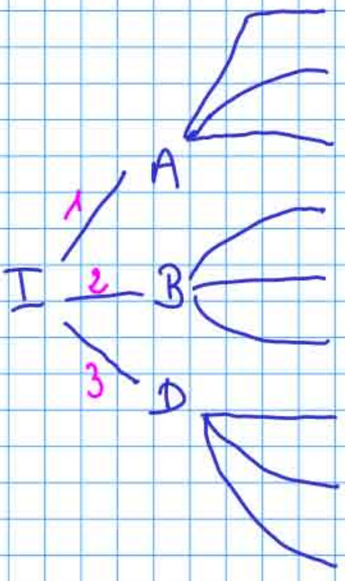
132 $\vec{IA}+\vec{AE}+\vec{EJ} = \vec{IA}+\vec{ID}+\vec{IB}$

213 $\vec{IB}+\vec{BC}+\vec{CJ} = \vec{IB}+\vec{IA}+\vec{ID}$

3211 $\vec{IJ} = \vec{ID}+\vec{DC}+\vec{CF}+\vec{FJ}$

$= \vec{ID}+\vec{IB}+\vec{IA}+\vec{IA}$

Dénombrement : déterminer tous les trajets minimaux possibles



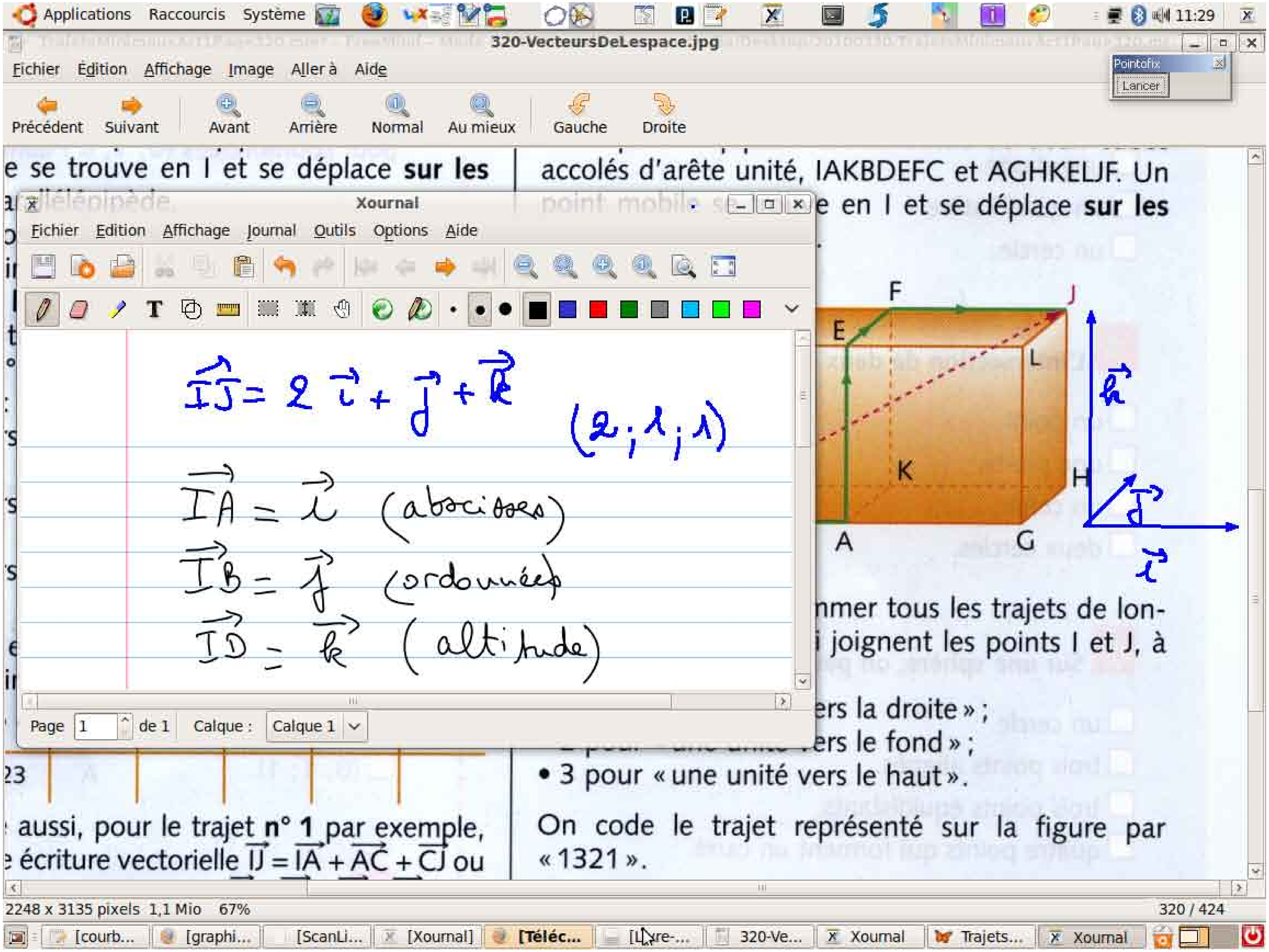
$\vec{IA} = \vec{i}$ (abscisse)

$\vec{IB} = \vec{j}$ (ord.)

$\vec{ID} = \vec{k}$ (altitude)

$$\boxed{M(1,0,1)}$$

$$\vec{IA}+0\,\vec{IB}+1\,\vec{ID}$$



e se trouve en I et se déplace **sur les**

accolés d'arête unité, IAKBDEFC et AGHKELJF. Un point mobile se… e en I et se déplace **sur les**

$$\vec{IJ} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

(2 ; 1 ; 1)

$\vec{IA} = \vec{i}$ (abscisses)

$\vec{IB} = \vec{j}$ (ordonnées)

$\vec{ID} = \vec{k}$ (altitude)

nmer tous les trajets de lon-
i joignent les points I et J, à

ers la droite » ;
ers le fond » ;
- 3 pour « une unité vers le haut ».

On code le trajet représenté sur la figure par « 1321 ».

23

aussi, pour le trajet **n° 1** par exemple,
écriture vectorielle $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AC} + \vec{CJ}$ ou

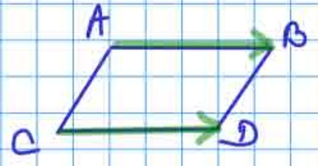
20100330-VecteursDeLespaceAct1Page320

VECTEURS DE L'ESPACE

I) Définition

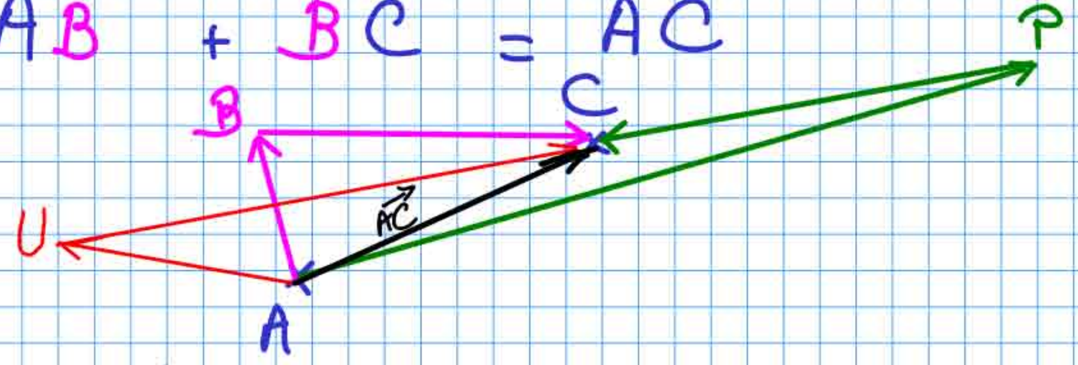
2 vecteurs sont égaux s'ils ont
1) m̂ direction
2) m̂ sens
3) m̂ longueur

$\vec{AB} = \vec{CD}$ ssi ABDC #



Relation de CHASLES

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

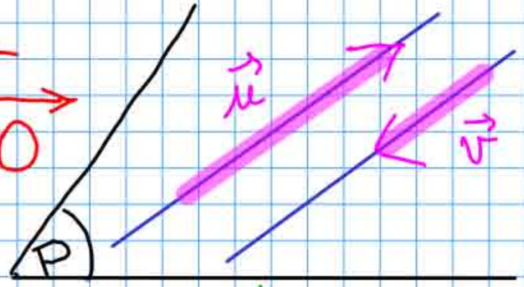


II Vecteurs colinéaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe 2 réels non tous nuls α et β tels que

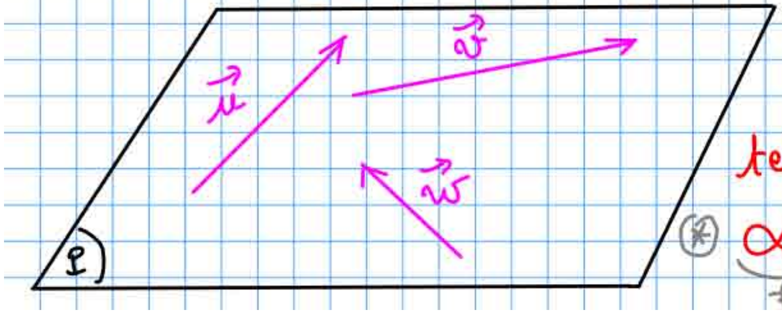
$$\underbrace{\alpha}_{\neq 0} \vec{u} + \underbrace{\beta}_{\neq 0} \vec{v} = \vec{0}$$

ou



Pré) $(AB) \parallel (CD)$ ssi $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

III Vecteurs coplanaires



$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires s'il existe 3 réels α, β, γ non tous nuls ($\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$) tels que

$$(*)\ \underbrace{\alpha}_{\neq 0} \vec{u} + \underbrace{\beta}_{\neq 0} \vec{v} + \underbrace{\gamma}_{\neq 0} \vec{w} = 0$$

ou ou

on suppose $\gamma \neq 0$

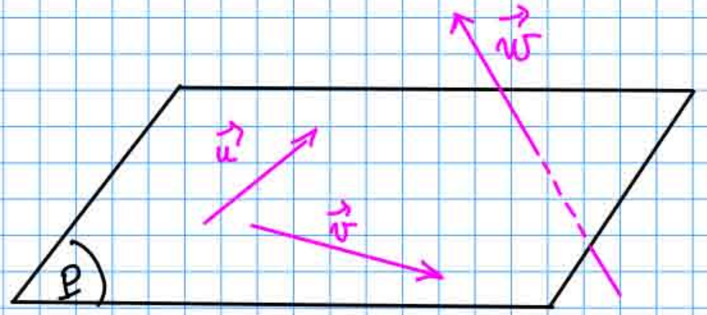
$$\circledast \quad \gamma \vec{w} = -\alpha \vec{u} - \beta \vec{v}$$

$$\vec{w} = \boxed{-\frac{\alpha}{\gamma}}\,\vec{u}\ \boxed{-\frac{\beta}{\gamma}}\,\vec{v}$$

Je peux exprimer le vecteur $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(Dans le plan : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$)

- Dans le cas où dans les exercices, on trouve $\alpha = \beta = \gamma = 0$ cela voudra dire que les 3 vect. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont non-coplanaires.



Déf | 4 Pts sont coplanaires s'ils $\in$ au m plan

Csqce | A, B, C, D sont coplanaires ssi les vect. $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ sont coplanaires.

IV Repère de l'espace

Déf | Les vct $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ forment une base de l'espace ssi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont non-coplanaires.

Soit O un point de l'espace

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne 1 repère de l'espace

Si M est 1 pt de l'espace, il existera alors un unique triplet (x, y, z) tel que $\vec{OM} = \overset{\text{abscisse}}{x}\,\vec{i} + \overset{\text{ordonnée}}{y}\,\vec{j} + \overset{\text{altitude}}{z}\,\vec{k}$

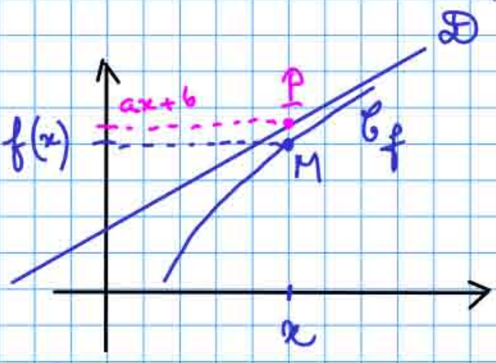
On appelle (x, y, z) les coordonnées de M dans l'espace.

ASYMPTOTE OBLIQUE

Pour démontrer que la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique $\underset{\text{en} +\infty}{\wedge}$ à $\mathcal{C}_f$, on forme la différence

$$f(x) - (ax+b)$$

et on montre qu'elle tend vers 0 en $+\infty$ (idem en $-\infty$).



PM = écart entre les 2 courbes

$$y_P - y_M$$

$x^2 - x + 2x - 2$

$x^2 + x - 2$

82p103 $f(x) - (x+2) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1} - (x+2)$

$$= \frac{x^2+x+1}{x-1} - \frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$$

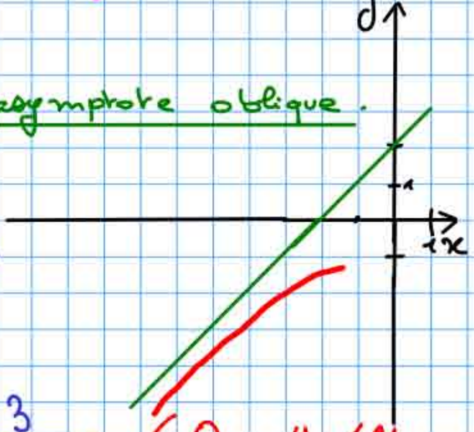
$$= \frac{\cancel{x^2}+\cancel{x}+1 - \cancel{x^2} - \cancel{x} + 2}{x-1}$$

$$= \frac{3}{x-1} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left[f(x) - (x+2)\right] = \lim_{x\to -\infty} \frac{3}{x-1} = 0$$

La dte d'éq $y = x+2$ est bien asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

Position de la courbe par rapport à son asymptote oblique.



Soit $M(x\,;f(x))$ un point de $\mathcal{C}_f$

$P(x\,;x+2)$ un point de $\mathcal{D}$.

$$y_M - y_P = f(x) - (x+2)$$

$$= \frac{x^2+x+1}{x-1} - (x+2) = \frac{3}{x-1} < 0$$

$y_M < y_P$

car : Au voisinage de $-\infty$ $x < 1$ pr tt x, donc $x-1<0$

$\mathcal{C}_f$ en dessous de $\mathcal{D}$

Exercice 105 page 109

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 4x + 5}$$

1) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ car $x^2 - 4x + 5$ a un discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 5 < 0$ donc $x^2 - 4x + 5 > 0$ sur $\mathbb{R}$ (toujours du signe de a)

2) f' ? $u = x^2 - x - 1$ $v = x^2 - 4x + 5$

$u' = 2x - 1$ $v' = 2x - 4$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2-4x+5) - (x^2-x-1)(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 12x - 9}{(x^2-4x+5)^2}$$

1 annule le numérateur

$$= -3\,\frac{x^2-4x+3}{(x^2-4x+5)^2} = \boxed{-3}\,\frac{(x-1)(x-3)}{(x^2-4x+5)^2}$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$-0{,}5$	$\nearrow$	$2{,}5$	$\searrow$	

3) Tangente (T) en $x = 2$ à $\mathcal{C}_f$?

$y = ax + b$ et $a = f'(2)$ et $(2 ; f(2)) \in T$

4) $$\lim_{-\infty} f = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2\left(1 - \overset{\to 0}{\frac{1}{x}} - \overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}\right)}{x^2\left(1 - \underset{\downarrow 0}{\frac{4}{x}} + \underset{\downarrow 0}{\frac{5}{x^2}}\right)} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

idem en $+\infty$:

$\lim_{+\infty} f = 1$ ← y

Donc la dte d'éq $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisi. de $+\infty$.

idem en $-\infty$.

DILMAHOMED

Haemayraa

PS1

Devoir Commun de Mathématiques.

Note : 19,0 / 20

appréciations : Excellent devoir

Excellent exercice 3 – Avec de très bonnes justifications –

Un point faible néanmoins : l'exercice de géométrie. (A travailler).

4,75

Exercice 1 :

a) On a $f(x) = \frac{4x^2+4x-6}{2x-3}$.

Cette fonction n'est pas définie pour

$2x - 3 = 0$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

0,25 Le domaine de définition est donc $D_f = \mathbb{R} / \{\frac{3}{2}\}$.

b) On a :

$u = 4x^2 + 4x - 6$ et $v = 2x - 3$

$u' = 4 \times 2x + 4$ $v' = 2$.

$= 8x + 4$

La dérivée est donc :

$$f'(x) = \frac{(8x+4)(2x-3) - [2(4x^2+4x-6)]}{(2x-3)^2}$$

$$= \frac{16x^2 - 24x + 8x - 12 - [8x^2 + 8x - 12]}{(2x-3)^2}$$

$$= \frac{16x^2 - 24x + \cancel{8x} - \cancel{12} - 8x^2 \cancel{- 8x} \cancel{+ 12}}{(2x-3)^2}$$

0,5 $$= \frac{8x^2 - 24x}{(2x-3)^2}.$$

DILMAHOMED

PS1

1,5

Suites.

Exercice 6.

1) $u_7 = -98$ $\quad u_{17} = 72.$

On sait que $u_7 = u_0 + 7r$

et $u_{17} = u_0 + 17r$

On a aussi $u_{17} = u_7 + 10r$

0,25

donc $-98 + 10r = 72$

$10r = 72 + 98$

$r = \frac{170}{10} = 17.$ TB.

on en déduit u_0:

$u_7 = u_0 + 7r$

donc $u_0 = u_7 - 7r$

$= -98 - 7 \times 17$

$= -217$

C'est donc une suite arithmétique de raison $r = 17$ et de premier terme $u_0 = -217$.

0,5

2) $u_n = u_0 + rn.$ à remplacer !

3) On calcule la somme des 30 premiers termes:

$u_{29} = u_0 + 29 \times 17$

$= -217 + 29 \times 17$

$= 276$

0,75

d'où $S = 30 \times \frac{u_0 + u_{29}}{2} = 30 \times \frac{-217 + 276}{2} = 885.$ TB

4,25

Exercice 7.

1) $u_0 = 0$ $\quad u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{u_n + 1}$.

$u_1 = \frac{5u_0 - 3}{u_0 + 1} = \frac{-3}{1} = -3$

$u_2 = \frac{5u_1 - 3}{u_1 + 1} = \frac{5\times -3 - 3}{-3 + 1} = 9$

0,75

$u_3 = \frac{5\times 9 - 3}{9 + 1} = \frac{21}{5}$

- Si (u_n) est une suite arithmétique alors:

$r = -3 - 0$

$= -3$

0,25

et $u_2 = u_1 - 3 = -3 - 3 = -6$ or $u_2 = 9$.

Donc la suite n'est pas une suite arithmétique.

- Si (u_n) est une suite géométrique alors:

0,25

$q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{9}{-3} = -3$

et $u_3 = u_2 \times -3$

$= 9 \times -3 = -27$ or $u_3 = \frac{21}{5}$

Donc (u_n) n'est pas une suite géométrique.

2) $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}$

On a:

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 1}$

$= \cancel{\frac{\frac{5u_n - 3}{u_n + 1} - 3}{\frac{5u_n - 3}{u_n + 1} - 1}} = \frac{\frac{5u_n - 3 - 3u_n - 3}{u_n + 1}}{\frac{5u_n - 3 - u_n - 1}{u_n + 1}}$

$= \frac{2u_n - 6}{u_n + 1} \times \frac{u_n + 1}{4u_n - 4}$

$\boxed{0{,}75}$

Exercice 8.

a) $v_n = -n^3 + 3n$ pour $n \geq 1$

$v'_n = -3n^2 + 3$

Non ! écrire soit
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -x^3 + 3x$
$f'(x) = -3x^2 + 3$ . . .

$\Delta = 0 - 4 \times (-3) \times 3$
$= 36$

0,25

donc $x_1 = \frac{-0 - \sqrt{36}}{-3 \times 2} = 1$ et $x_2 = \frac{-0 + \sqrt{36}}{-3 \times 2} = -1$

or $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$ donc v_n' est du signe de a c'est à dire -3 à l'extérieur des racines donc négatif pour $n \geq 1$. On en déduit que (v_n) est décroissante pour $n \geq 1$.

b) $w_n = n + \frac{1}{n+1}$ et $w_{n+1} = n+1 + \frac{1}{n+1}$

$= \frac{n^2+n+1}{n+1}$

$= \frac{(n+1)(n+1)+1}{(n+1)}$

$= \frac{n^2+n+n+1+1}{(n+1)}$

$= \frac{n^2+2n+2}{n+1}$

On étudie :

0,5

$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{n^2+2n+2}{n+1} \times \frac{n+1}{n^2+n+1}$

$= \frac{n^3+n^2+2n^2+2n+2n+2}{n^3+n^2+n+n^2+n+1}$

$= \frac{n^3+3n^2+4n+2}{n^3+2n^2+2n+1}$

Soit $a = n^3+3n^2+4n+2$

$b = n^3+2n^2+2n+1$

TB

$a > b$ pour a et $b \neq 0$ donc $\frac{a}{b} > 1$

Dc w est ↗.

C'est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ car 0,25

$V_2 = V_1 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ Cela ne prouve rien.

3°) * $V_{n+1} = V_{\boxed{0}} \times q^n$ Non

$\rightarrow V_n = \frac{V_{n+1}}{q^n}$?

*

Exercice 8:

① +0,5 de rédaction

a) $v_n = -n^3 + 3n$ pour $n \geqslant 1$

J'appelle v_n, $f(x) \rightarrow f(x) = -x^3 + 3x$

$f'(x) = -3x^2 + 3$

Pour $x > 1$, $f'(x) < 0$, donc f est décroissante.

Donc la suite v est décroissante. TB

b) $w_n = n + \frac{1}{n+1}$

J'appelle $g(x) = x + \frac{1}{x+1}$

$g'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$

$g'(x)$ est positif, donc g est croissant, d'où la suite w est croissante. TB

Exercice 6:

0,50

1°) $u_7 = u_6 + 7r = -98$

$u_8 = u_7 + 8r = -98 + 8r$

Donc la raison r vaut ?

0,25 2°) $u_n = u_0 + nr$ ... 0,25

c) On a :

$f'(x) = 0$

$\frac{8x^2 - 24x}{(2x-3)^2} = 0$

$8x^2 - 24x = 0$ $= 8x(x-3)$

On a $\Delta = 24^2 - 4 \times 8 \times 0$
$= 24^2$) ok !

on a ainsi $x_1 = \frac{24-24}{2 \times 8} = 0$ et $x_2 = \frac{24+24}{2 \times 8}$

$= \frac{48}{16}$

$= 3$ /

0,75

D'où le tableau de signe :
→ le théorème sur le second d° suffit.

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$8x^2 - 24x$		+	0	−	‖	−	0	+	
$(2x-3)^2$		+		+	‖	+		+	
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	

d) D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$		↗	2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	14	↗	

0,75 TB

e) On a :

$\lim_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}} \left(\frac{4x^2+4x-6}{2x-3} \right)$

On sait que $\lim_{x \to \frac{3}{2}} (2x-3) = 0$

donc $\lim_{x \to \frac{3}{2}} \left(\frac{4x^2+4x-6}{2x-3} \right) = \pm\infty$ /

0,25 La fonction admet donc une asymptote verticale $x = \frac{3}{2}$

0,5 puisque $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x) = +\infty$.

f) On a $y = 2x+5$.

On étudie la limite de $f(x) - (2x+5)$ en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (2x+5) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+4x-6}{2x-3} - 2x - 5$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{4x^2} + \cancel{4x} - 6 - \cancel{4x^2} + \cancel{6x} - \cancel{10x} + 15}{2x-3}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{9}{2x-3}$$

or on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-3) = +\infty$ donc

0,5 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{9}{2x-3} = 0.$

$y = 2x+5$ est donc bien asymptote oblique à la courbe. en $\pm\infty$.

On étudie ensuite la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ:

Soit $M(x; f(x)$ un point de $\mathcal{C}_f$

et $P(x; 2x+5)$ un point de Δ.

On a $y_M - y_P = f(x) - (2x+5)$

$$= \frac{4x^2+4x-6}{2x-3} - 2x - 5$$

$$= \frac{9}{2x-3}$$

0,5 On a ainsi $y_M - y_P > 0$ pour $x > \cancel{1}\ \frac{3}{2}$ et

$y_M - y_P < 0$ pour $x < \cancel{1}.\ \frac{3}{2}$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc au-dessus de Δ pour $x > \frac{3}{2}$ et

au-dessous de Δ pour $x < \frac{3}{2}$.

g) Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses sont :

$$f(x)=0$$

$$\frac{4x^2+4x-6}{2x-3}=0$$

$$4x^2+4x-6=0$$

$$\Delta = 4^2-4\times4\times(-6)$$

0,5 $$= 16+96$$

$$= 112 \quad = (4\sqrt{7})^2$$

TB

d'où $x_1 = \frac{-4-\sqrt{112}}{8}$ $\qquad x_2 = \frac{-4+\sqrt{112}}{8}$

$$\frac{-4-4\sqrt{7}}{8} = \frac{-1-\sqrt{7}}{2} \qquad \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$$

Donc $A\left(\frac{-4-\sqrt{112}}{8};0\right)$ $\qquad B\left(\frac{-4+\sqrt{112}}{8};0\right)$.

Les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des ordonnées est :

$$f(0) = \frac{4\times0^2+4\times0-6}{2\times0-3}$$

$$= \frac{-6}{-3} = 2.$$

0,25 $C(0;2)$

1,25

Exercice 2 :

TB. 0,75

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{3}{4}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{17}{4}$	↗	$+\infty$

On a une asymptote vertical d'équation :

0,25 $x=-1$ puisque $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

0,25 et une asymtote oblique d'équation $y = \frac{1}{4}x+2$ TB

DILMAHOMED

PS1

③ +0,5 justif.

puisque $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (\frac{1}{4}x + 2) = 0$.

Exercice 3: Excellent !

- $a(x) = x + \frac{1}{x^2}$ n'est pas définie pour $x = 0$, elle admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$. De plus, elle admet une asymptote oblique d'équation $y = x$. On a le choix entre ⑤ et ⑥.

  On calcule l'image de 2 : $a(2) = 2 + \frac{1}{2^2} = \frac{9}{4}$ donc il s'agit de la fonction ⑤. TB.

- $b(x) = \frac{-3}{x^2+4}$ est définie sur $\mathbb{R}$; on a le choix entre ④ et ⑧ ; l'image de 0 est $b(0) = \frac{-3}{4}$ donc c'est la fonction ⑧ TB

- $c(x) = \frac{3x+5}{x^2-x+7}$ est défini~~e~~ [illegible] $\mathbb{R}$, il s'agit donc de ④ TB

- $d(x) = \frac{5}{x^2+2x-3}$ n'est pas défini pour -3 et 1.

  ($\Delta = 16$ et $x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1$). Il s'agit de ③ TB

- $e(x) = \frac{x-6}{2x+7}$ n'est pas défini pour $2x+7=0$ donc $x = \frac{-7}{2}$. il s'agit de ① puisqu'elle admet une asymptote verticale $x = -\frac{7}{2}$ TB

- $f(x) = \frac{x-6}{2x+7} - x$ n'est pas définie pour $x = \frac{-7}{2}$ et admet une asymptote oblique $y = -x$ et une asymptote verticale $x = -\frac{7}{2}$ donc c'est la fonction ⑦ oui

• $g(x)=\frac{x^2}{x^2-2x-4}$ n'est pas défini~~e~~ pour :

$\Delta = 4 - 4\times 1\times -4$

$= 4+16$

$= 20$

d'où $x_1=\frac{2-\sqrt{20}}{2}$ et $x_2=\frac{2+\sqrt{20}}{2}$ TB

et admet deux asymptotes verticales $x=\frac{2-\sqrt{20}}{2}$ et $x=\frac{2+\sqrt{20}}{2}$

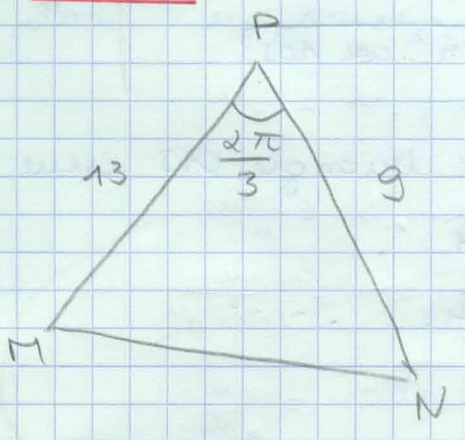
Il s'agit de la fonction ②.

• $h(x)=\frac{1}{x^2}-x$ n'est pas défini pour $x=0$ et admet donc une asymptote verticale $x=0$ et une asymptote oblique $y=-x$. Il s'agit donc de la fonction ⑥.

DILMAHOMED
Houmayraa
PS1

donc $\frac{w_{n+1}}{w_n} > 1$. On peut en déduire que (w_n) est croissante.

① **Exercice 5 :**



On a, d'après Al'Keshi :

0,25 $MN^2 = PM^2 + PN^2 - 2PM.PN.\cos\widehat{MPN}$

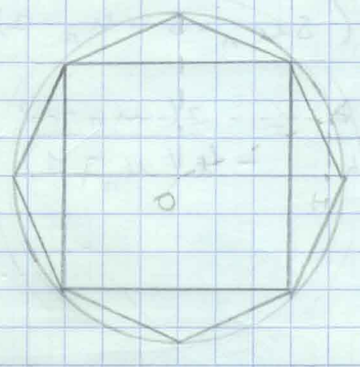
$= 13^2 + 9^2 - 2\times13\times9.\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

0,75 $= 367$

d'où $MN = \sqrt{367} \simeq 19,2$.

② **Exercice 4 :**

a)



nom des points ?

b)

$IA^2 = OI^2 + OA^2 - 2OI . OA . \cos \widehat{AOI}$ /

$= r^2 + r^2 - 2 \times r \times r . \cos \widehat{AOI}$ / $\widehat{AOI} = \frac{\pi}{4}$

$= 2r^2 - 2r^2 . \cos \widehat{AOI}$

0,25 d'où $IA = \sqrt{2r^2 - 2r^2 . \cos \widehat{AOI}}$ à arranger .

OH est la hauteur du triangle OAJ issue de O:

donc $OH = OA . \cos \widehat{AOH}$.

$= r . \cos \widehat{AOH}$ . . - - - .

0,25 c) $\widehat{AOH} = \frac{\pi}{8}$ /

d) $\cos \frac{\pi}{8} = OH = \cancel{r} . \cos \widehat{AOH}$? $= \frac{OH}{OA}$ . . .

et $\sin \frac{\pi}{8} = \cancel{\frac{1}{3} r = IJ}$.

Exercice 7 suite.

2) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 1}$

TB

2

$= \frac{\frac{5u_n - 3}{u_n + 1} - 3}{\frac{5u_n - 3}{u_n + 1} - 1}$

$= \frac{(5u_n - 3 - 3u_n - 3)\cancel{(u_n + 1)}}{\cancel{(u_n + 1)}(5u_n - 3 - u_n - 1)}$

$= \frac{2u_n - 6}{4u_n - 4} = \frac{2(u_n - 3)}{4(u_n - 1)} = \frac{u_n - 3}{2(u_n - 1)} = \frac{1}{2} \frac{u_n - 3}{u_n - 1}$

$= \frac{1}{2} v_n$.

(v_n) est donc bien une suite géométrique de raison

$q = \frac{1}{2}$ /

3) $v_n = v_1 \cdot q^{n-1}$ or $v_1 = \frac{u_1 - 3}{u_1 - 1}$

0,75 $= \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}^{n-1}$ TB $= \frac{-3-3}{-3-1} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}$ donc $u_n - 3 = v_n \times (u_n - 1)$

$u_n = v_n(u_n - 1) + 3$ 0,25

$u_n = v_n \cdot u_n - v_n + 3$

~~$\frac{u_n}{v_n u_n} =$ [illegible] $- v_n + 3$~~

~~$\frac{u_n}{u_n} = -v_n + 3 \times v_n$~~

$u_n(1 - v_n) = 3 - v_n$

$u_n = \frac{3 - v_n}{1 - v_n}$ - - -

$\vec{AB}(1;1;-3)$ $\vec{AC}(4;3;1)$

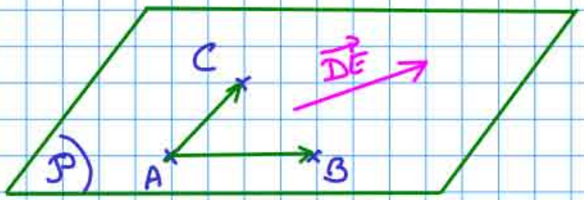
- Existe-t-il un réel k tq $\vec{AB} = k\vec{AC}$?

Si k existe, il faut nécessairement $\frac{1}{4}$ mais $3 \times \frac{1}{4} \neq 1$.

Les vect. $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les pts A, B, C ne sont pas alignés.

Donc les points A, B, C définissent un plan : (ABC)

$\vec{DE}(-1;0;-10)$



Si (DE) est // (ABC), alors il existe 2 réels λ et μ tels que $\vec{DE} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$

$\vec{AB}(1;1;-3)$ $\vec{AC}(4;3;1)$

$$\begin{cases} \lambda \times 1 + \mu \times 4 = -1 \\ \lambda \times 1 + \mu \times 3 = 0 \\ \lambda \times (-3) + \mu \times 1 = -10 \end{cases}$$

D'où le système

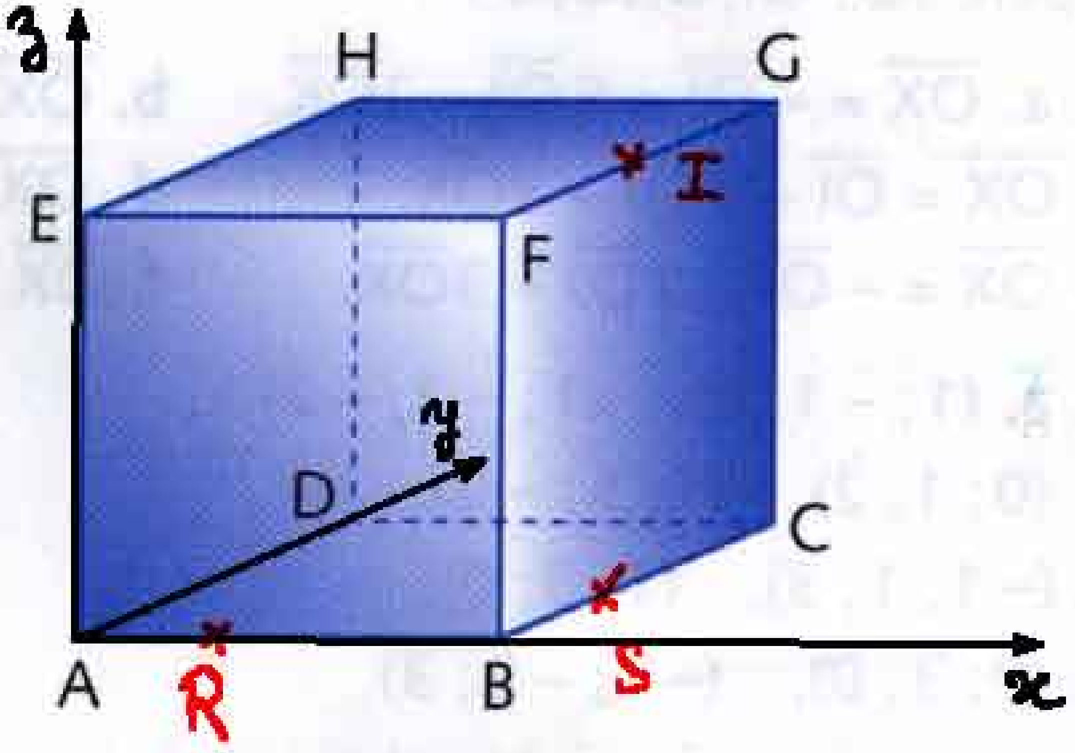
$$\begin{cases} \lambda + 4\mu = -1 \\ \lambda + 3\mu = 0 \\ -3\lambda + \mu = -10 \end{cases}$$

2e Méthode : choix d'1 repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

Dans ce repère : $R\left(\frac{1}{3} ; 0 ; 0\right)$ $S\left(1 ; \frac{1}{3} ; 0\right)$

$E(0 ; 0 ; 1)$ $I\left(1 ; \frac{1}{2} ; 1\right)$

30 ★ Soit ABCDEFGH un cube.



a. Placer sur l'arête [AB] le point R tel que $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, sur l'arête [BC], le point S tel que $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et le milieu I de l'arête [FG].

b. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{EI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

c. En déduire que les points E, I, R et S sont coplanaires.

$\overrightarrow{RS}\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; 0\right)$

$\overrightarrow{EI}\left(1 ; \frac{1}{2} ; 0\right)$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{EI}\left(\frac{2}{3} ; \underbrace{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}_{= \frac{1}{3}} ; 0\right)$

Donc

$\frac{2}{3}\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{RS}$

$\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont colinéairs dc coplanaires.

Dc ls pts E, I, R, S sont coplanaires.

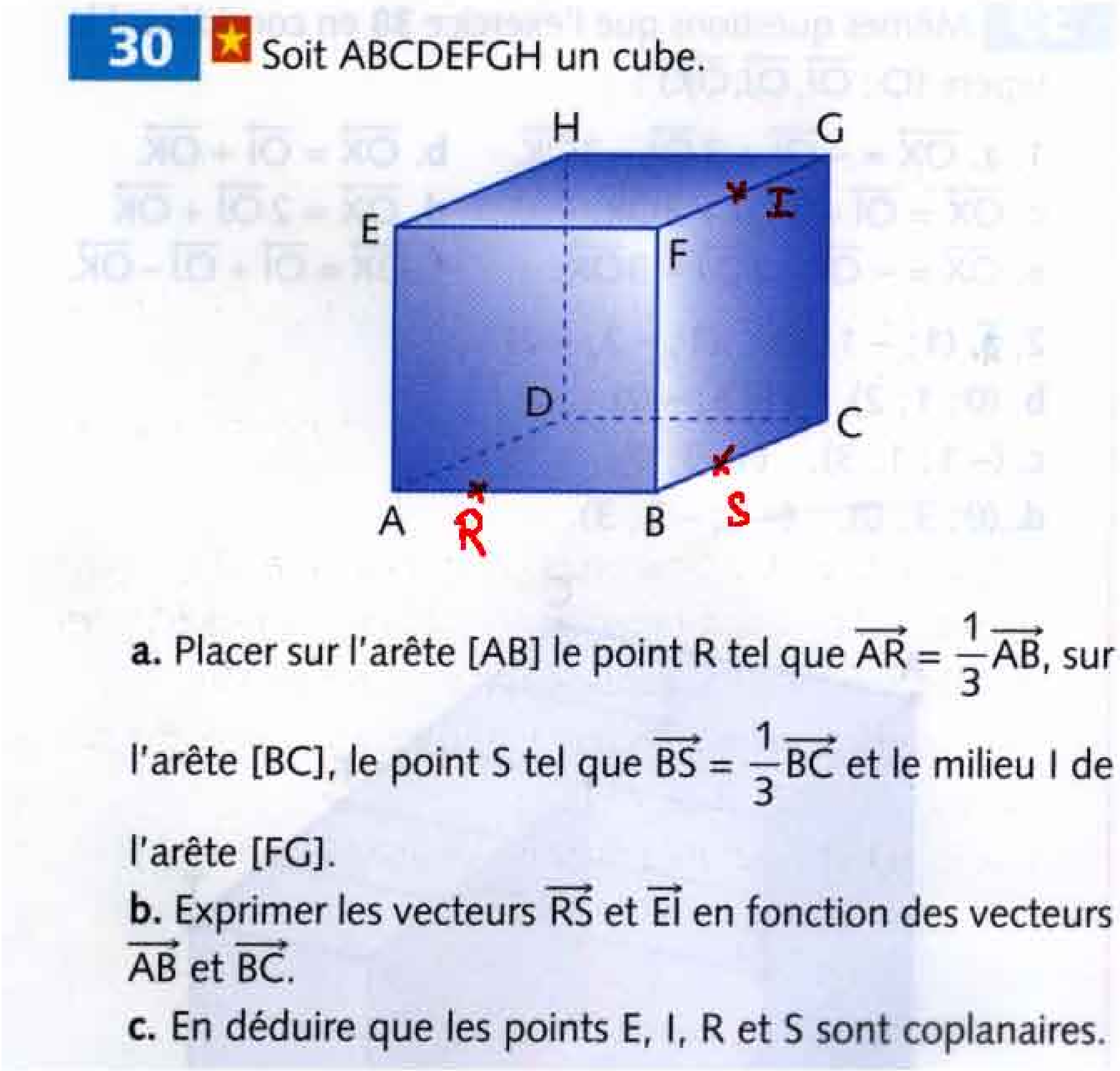
b) Relation de Chasles : $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BS}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FI}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$



30 ★ Soit ABCDEFGH un cube.

a. Placer sur l'arête [AB] le point R tel que $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, sur l'arête [BC], le point S tel que $\overrightarrow{BS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et le milieu I de l'arête [FG].

b. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{EI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

c. En déduire que les points E, I, R et S sont coplanaires.

$\frac{3}{2}\overrightarrow{RS} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\overrightarrow{AB} + \frac{\cancel{3}}{2} \times \frac{1}{\cancel{3}}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

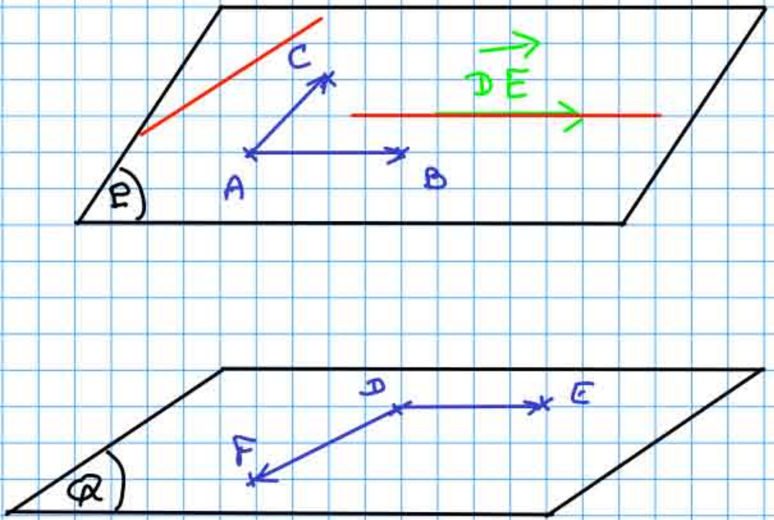
$= \overrightarrow{EI}$

$$\boxed{\overrightarrow{EI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{RS}}$$

les vct. $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{RS}$ sont colinéaires donc coplanaires.

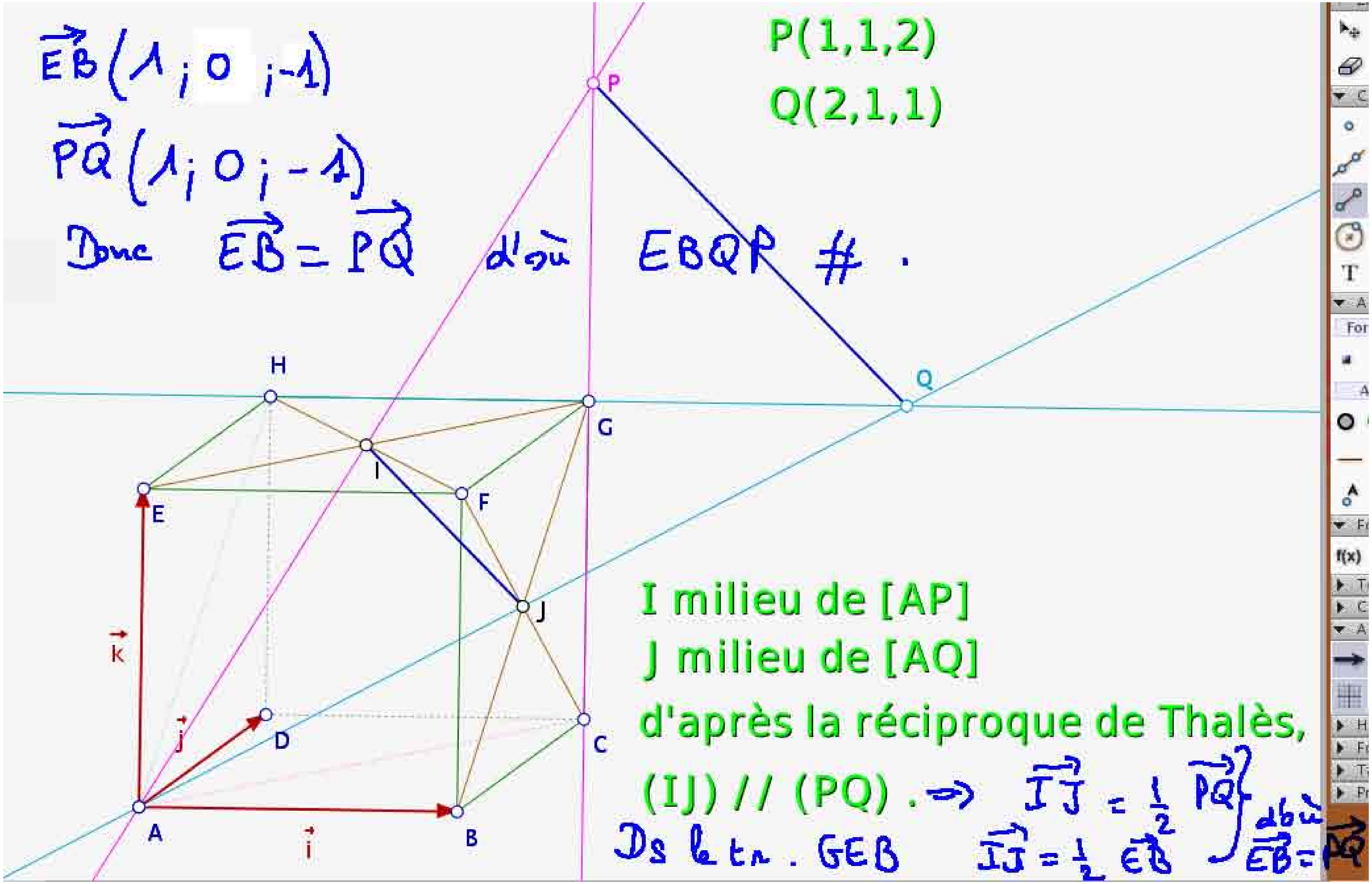
Donc les pts E, I, R et S sont coplanaires.

Ex77 p. 332



1) (DE) // (ABC)   2) (DF) // (ABC)

20100409-EspaceEx77Page329



$\vec{EB}(1;0;-1)$

$\vec{PQ}(1;0;-1)$

Donc $\vec{EB} = \vec{PQ}$ d'où EBQP # .

P(1,1,2)

Q(2,1,1)

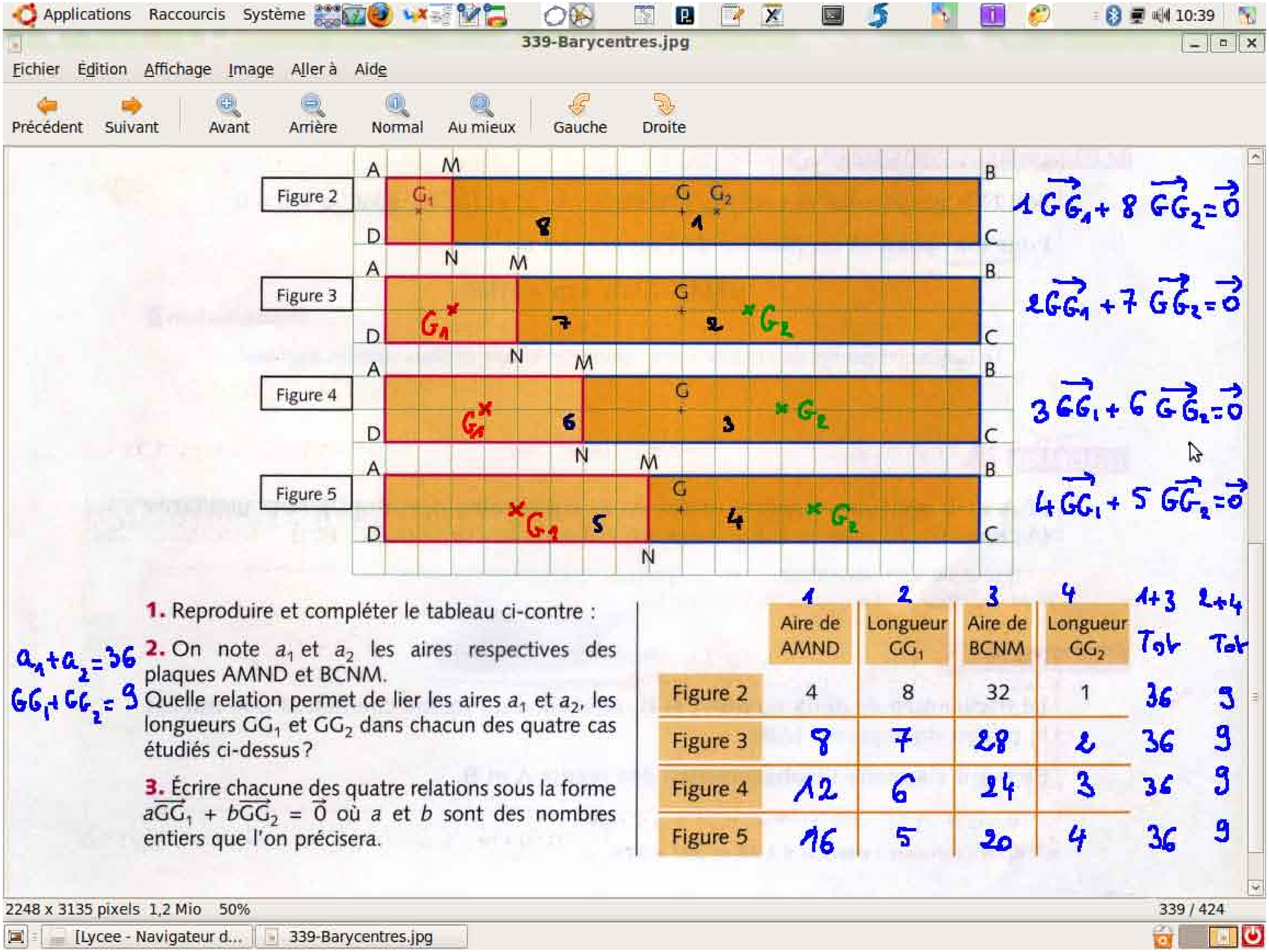
I milieu de [AP]

J milieu de [AQ]

d'après la réciproque de Thalès,

(IJ) // (PQ) . $\Rightarrow$ $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{PQ}$

Ds le tr. GEB $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{EB}$ $\Big\}$ d'où $\vec{EB} = \vec{PQ}$



$1\,\overrightarrow{GG_1} + 8\,\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$

$2\,\overrightarrow{GG_1} + 7\,\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$

$3\,\overrightarrow{GG_1} + 6\,\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$

$4\,\overrightarrow{GG_1} + 5\,\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$

1. Reproduire et compléter le tableau ci-contre :

2. On note a_1 et a_2 les aires respectives des plaques AMND et BCNM.
Quelle relation permet de lier les aires a_1 et a_2, les longueurs GG_1 et GG_2 dans chacun des quatre cas étudiés ci-dessus ?

$a_1 + a_2 = 36$

$GG_1 + GG_2 = 9$

3. Écrire chacune des quatre relations sous la forme $a\overrightarrow{GG_1} + b\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$ où a et b sont des nombres entiers que l'on précisera.

	1	2	3	4	1+3	2+4
	Aire de AMND	Longueur GG_1	Aire de BCNM	Longueur GG_2	Tot	Tot
Figure 2	4	8	32	1	36	9
Figure 3	8	7	28	2	36	9
Figure 4	12	6	24	3	36	9
Figure 5	16	5	20	4	36	9

Barycentre

I) BARYCENTRE DE 2 POINTS

Problème à résoudre :

Soient A, B 2 pts distincts du plan .

Soient $(\alpha,\beta) \in \underset{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}{\mathbb{R}^2}$ tels que $\alpha+\beta \neq 0$

Pb

On cherche s'il existe un point G tel que :

$$\alpha\,\vec{GA} + \beta\,\vec{GB} = \vec{0}$$

A, B, α, β étant donnés , la seule inconnue du pb, c'est G.

$\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GB}=\vec{0}$ équivaut à :

$\alpha\vec{GA}+\beta(\vec{GA}+\vec{AB}) = \vec{0}$ éq. à :

$\underbrace{\alpha\vec{GA}+\beta\vec{GA}}_{(\alpha+\beta)\vec{GA}}+\beta\vec{AB}=\vec{0}$

$(\alpha+\beta)\vec{GA}+\beta\vec{AB}=\vec{0}$

$(\alpha+\beta)\vec{GA} = -\beta\vec{AB}$

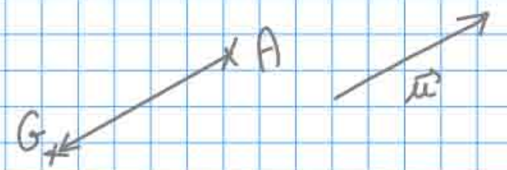
a connu

$2x + 47a = 0$ $\swarrow -47a$

$2x = -47a$

Comme $\alpha+\beta\neq 0$, on a :

$$\boxed{\vec{GA} = \overbrace{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\vec{AB}}^{\text{Connu}}}$$



Définition On appelle barycentre de (A, α) et (B, β) avec $\alpha+\beta\neq 0$ l'unique point G tel que :

$$\alpha\,\vec{GA} + \beta\,\vec{GB} = \vec{0}$$

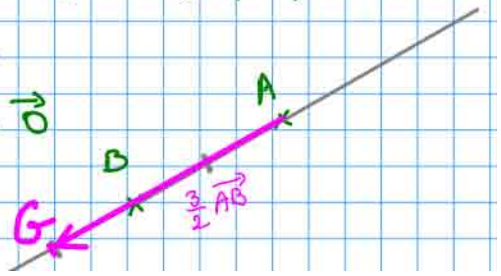
exemple : G barycentre de (A, −1) (B, 3)

$-1+3\neq 0$ dnc G existe

$-1\,\vec{GA} + 3\,\vec{GB} = \vec{0}$

$-\vec{GA} + 3(\vec{GA}+\vec{AB}) = \vec{0}$

$-\vec{GA} + 3\vec{GA} + 3\vec{AB} = \vec{0}$



$$2\,\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$2\,\overrightarrow{GA} = -3\,\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{GA} = -\frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$$

Propriété fondamentale A et B sont 2 pts du plan
α et β 2 réels tq $\alpha+\beta\neq 0$

G est le barycentre de (A,α) , (B,β)

Pour tout point M du plan , on :

$$\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG}$$

Preuve: G est bar de (A,α) (B,β) :

$$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

soit M un pt du plan: $\alpha\,(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}) + \beta\,(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB}) = \vec{0}$

$$\alpha\,\overrightarrow{GM} + \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{GM} + \beta\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{GM} + \underbrace{\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB}} = \vec{0}$$

$$\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} = -(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{GM}$$

$$\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG}$$

Ex G Bar de $(A,-1)$; $(B,3)$ $(-1+3\neq 0)$

(Déf $-\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$)

Appliquons la pté fondamentale (M au pt A).

$$-1\,\underbrace{\overrightarrow{AA}}_{\vec{0}} + 3\,\overrightarrow{AB} = (-1+3)\,\overrightarrow{AG}$$

$$3\,\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AG}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$$

Conséquence G Bar de (A,α) ; (B,β) $\alpha+\beta\neq 0$

On applique la pté fondamentale : on met M en A

$$\alpha\,\underbrace{\overrightarrow{AA}}_{\vec{0}} + \beta\,\overrightarrow{AB} = (\alpha+\beta)\,\overrightarrow{AG}$$

$$\boxed{\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG}}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéairs.
Dc les pts A, B, G sont alignés

$G \in (AB)$

- Construire le barycentre de (A ; 1) (B ; -4)

$\vec{GA} - 4\vec{GB} = \vec{0}$ $\quad (1-4 \neq 0)$

pté) $\quad 1\,\vec{AA} - 4\,\vec{AB} = (1-4)\,\vec{AG}$

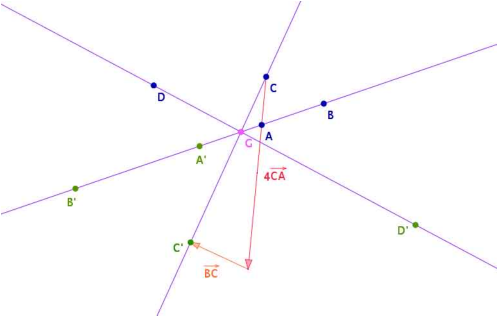
$-4\vec{AB} = -3\,\vec{AG}$ $\quad \vec{AG} = \frac{4}{3}\,\vec{AB}$.

15 a) p347

- G est bar de $(A, \textcircled{2})$; $(B, \textcircled{-1})$

$\textcircled{2}\,\vec{MA} \textcircled{-} \vec{MB} = (2-1)\,\vec{MG} = \vec{MG}$

$4\,\vec{NA} - 2\vec{NB} = 2(2\vec{NA} - \vec{NB}) = 2\cdot(2-1)\vec{NG} = 2\vec{NG}$



20100413-BarycentreAct1Page339

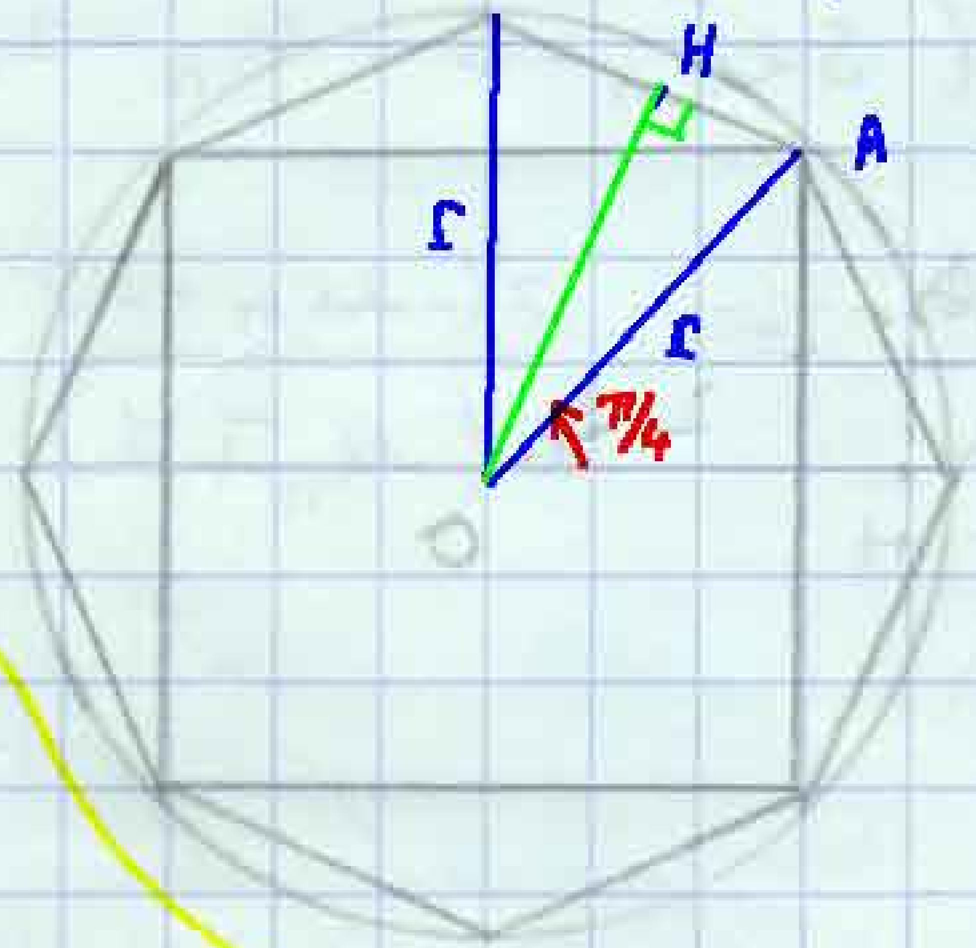
OIA: $IA^2 = OI^2 + OA^2 - 2\,OI.OA\,\underset{I}{\cos}(\widehat{IOA}) = r^2 + r^2 - 2r^2\cos\frac{\pi}{4}$

$IA^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\frac{\pi}{4}$

$= 2r^2(1-\cos\frac{\pi}{4})$

$= 2r^2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

1



nom

points

Pythagore ds OAH rect en H :

$OH^2 = OA^2 - HA^2$

$= OA^2 - \frac{1}{4}IA^2$

$= r^2 - \frac{1}{4}(2r^2(1-\frac{\sqrt{2}}{2}))$

$= r^2 - \frac{1}{2}r^2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$= \frac{1}{2}r^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}r^2$

$IA = \sqrt{2r^2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})}$

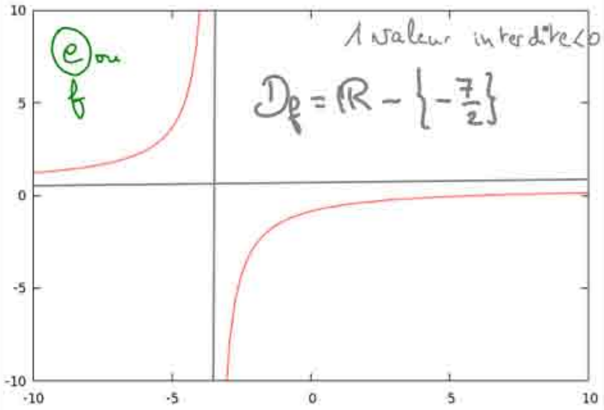
$IA = r\sqrt{2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})}$

$$\boxed{IA = r\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{OH = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

b)

On expliquera ses choix.

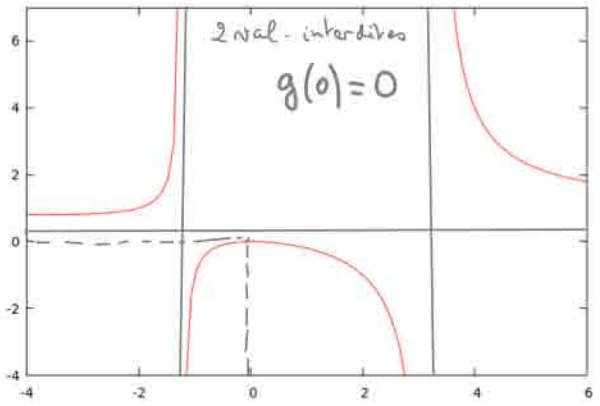


e ou f

1 valeur interdite<0

$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{7}{2}\right\}$

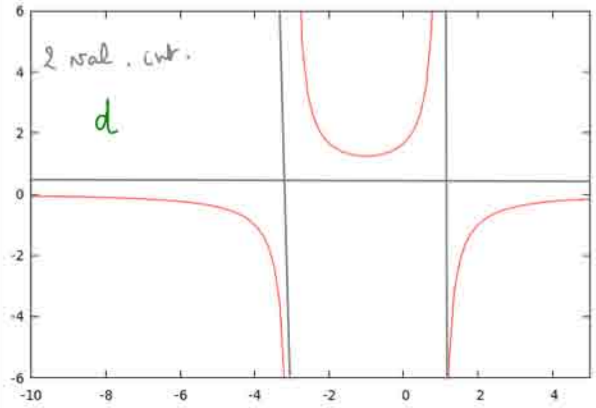
1



2 val. interdites

$g(0)=0$

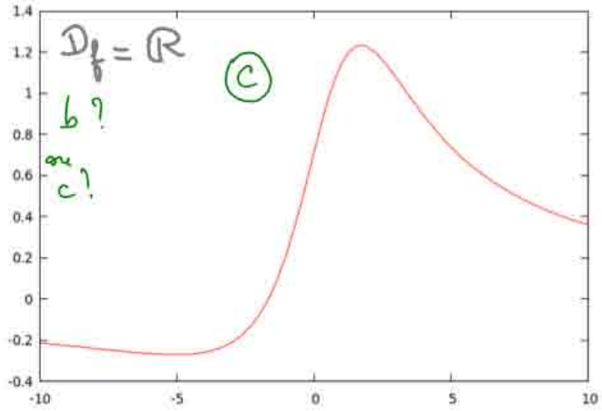
2



2 val. int.

d

3

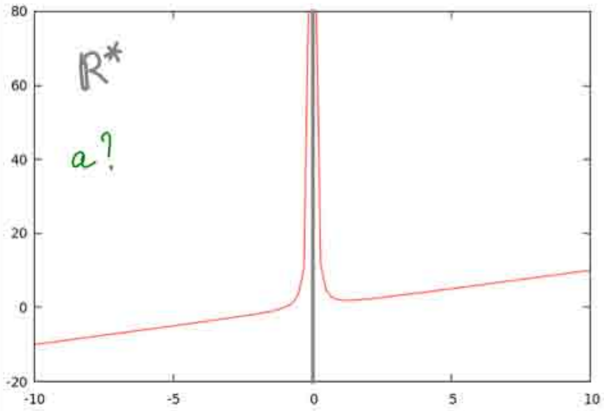


$D_f = \mathbb{R}$

c

b ? ou c ?

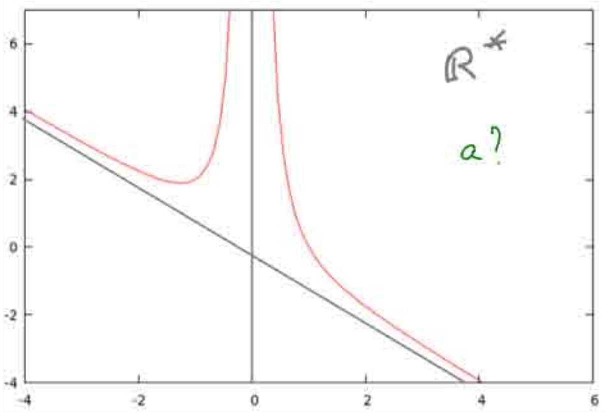
4



$\mathbb{R}^*$

a ?

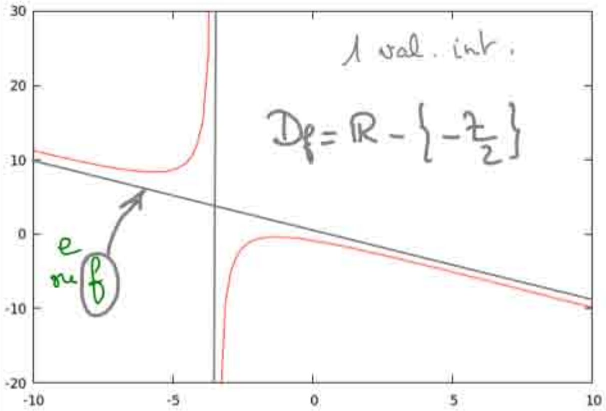
5



$\mathbb{R}^*$

a ?

6

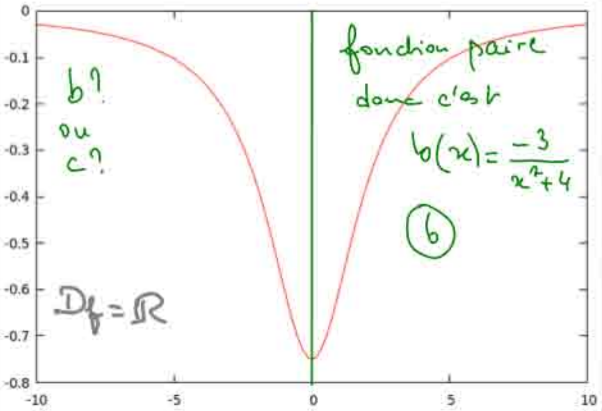


1 val. int.

$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{7}{2}\right\}$

e ou f

7



fonction paire donc c'est $b(x) = \frac{-3}{x^2+4}$

b

b ? ou c ?

$D_f = \mathbb{R}$

8

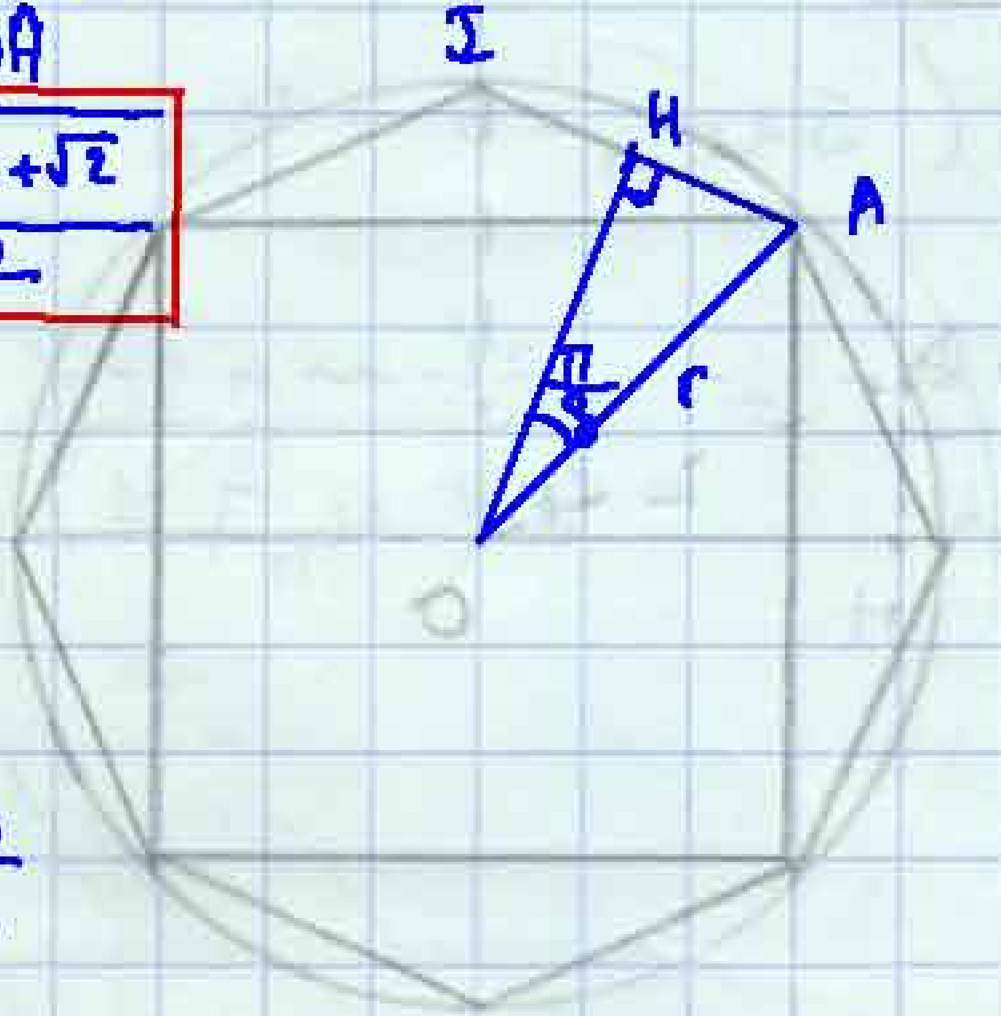
$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\widehat{AOH} = \frac{OH}{OA}$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{r\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\times r} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

$$\widehat{AOH} = \frac{1}{2}\,\widehat{AOI} = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\pi}{8}$$

nom

points



1

$AH = \frac{1}{2} IA$.

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sin\widehat{AOH} = \frac{HA}{OA}$$

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

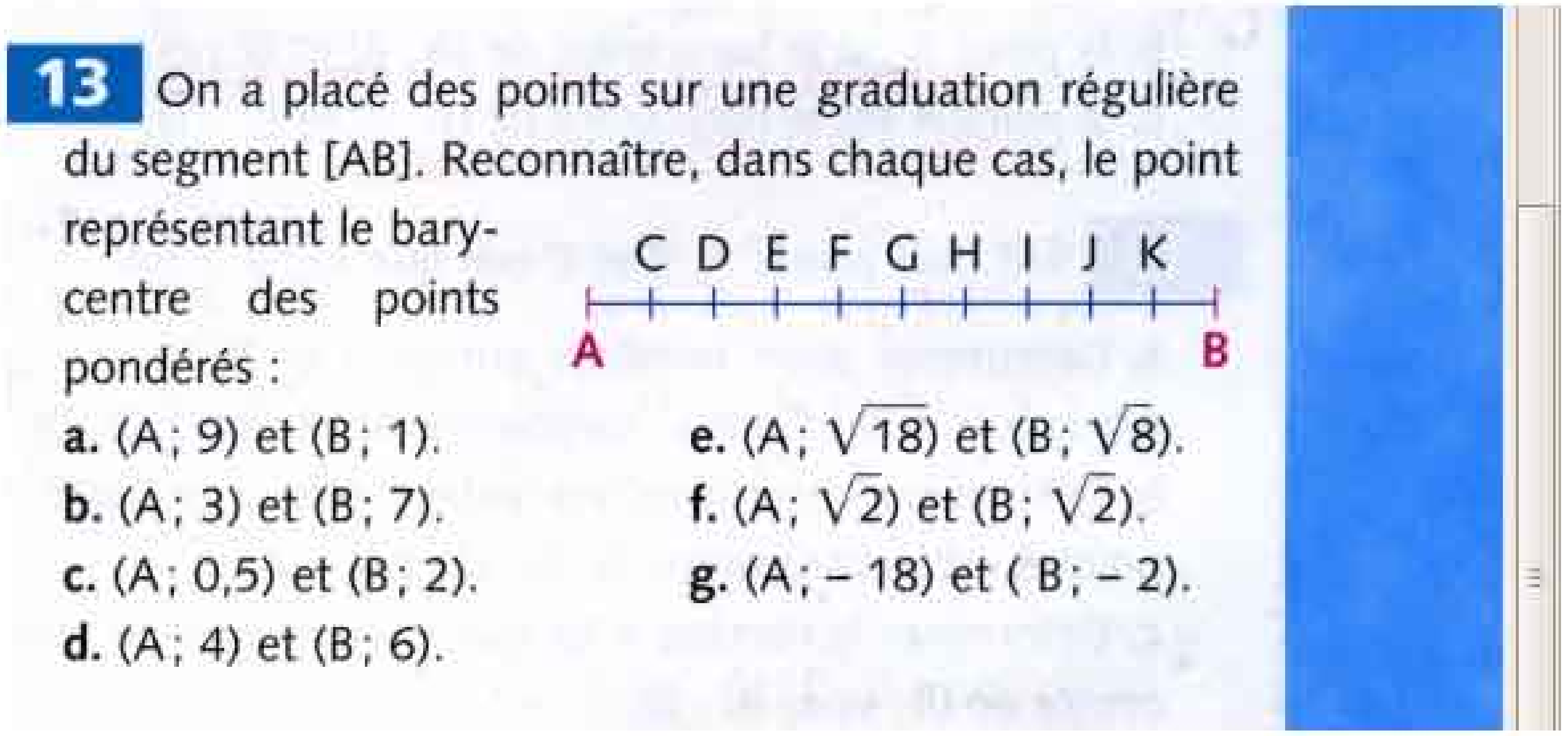
Pr tt M du plan :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

- M en A :

$$\beta \overrightarrow{AB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}$$

(*) $$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$$



13 On a placé des points sur une graduation régulière du segment [AB]. Reconnaître, dans chaque cas, le point représentant le barycentre des points pondérés :

a. (A ; 9) et (B ; 1).
b. (A ; 3) et (B ; 7).
c. (A ; 0,5) et (B ; 2).
d. (A ; 4) et (B ; 6).
e. (A ; $\sqrt{18}$) et (B ; $\sqrt{8}$).
f. (A ; $\sqrt{2}$) et (B ; $\sqrt{2}$).
g. (A ; – 18) et (B ; – 2).

a) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$ G = C

b) $\overrightarrow{AG} = \frac{7}{10}\overrightarrow{AB}$ G = I

c) $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{8}{10}\overrightarrow{AB}$ G = J

d) $\overrightarrow{AG} = \frac{6}{10}\overrightarrow{AB}$ G = H

e) $\sqrt{18} = \sqrt{3\times6} = 3\sqrt{2}$ | $\sqrt{18}\,\overrightarrow{GA} + \sqrt{8}\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ | $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

(*) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ G = F

f) Milieu de [AB] car $\alpha = \beta = \sqrt{2}$

G = G

g) (A ; 9) et (B ; 1)

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$ G = C

Ex 16 b) page 347.

G existe bien car $1-3 \neq 0$

G est barycentre de $\left(A ; \frac{1}{2}\right)$ $\left(B ; -\frac{3}{2}\right)$ donc $(A ; 1)$ $(B ; -3)$

Pté fondamentale : Pr tt M du plan, on a :

$$1\,\overrightarrow{MA} - 3\,\overrightarrow{MB} = -2\,\overrightarrow{MG} \quad \circledast$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{WA} - \frac{3}{2}\overrightarrow{WB} = \frac{1}{2}\left(1\,\overrightarrow{WA} - 3\,\overrightarrow{WB}\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{-2\,\overrightarrow{WG}}_{\text{d'après } \circledast}\right) = -\overrightarrow{WG}$$

$$1\,\overrightarrow{XA} - 3\,\overrightarrow{XB} = -2\,\overrightarrow{XG} \quad \text{d'après } \circledast$$

$$-2\,\overrightarrow{YA} + 6\,\overrightarrow{YB} = -2\left(1\,\overrightarrow{YA} - 3\,\overrightarrow{YB}\right) = \underset{\text{d'après } \circledast}{-2\,\overrightarrow{YG}}.$$

Exercice 20 page 348

① $3\,\overrightarrow{IJ} + 2\,\overrightarrow{IK} = \underset{I}{\overrightarrow{KJ}}$ on veut : $a\,\overrightarrow{IJ} + b\,\overrightarrow{IK} = \vec{0}$

éclatement avec la relation de Chasles.

- $3\,\overrightarrow{IJ} + 2\,\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IJ}$

$3\,\overrightarrow{IJ} + 2\,\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{IK} - \overrightarrow{IJ} = \vec{0}$ $\qquad 2\,\overrightarrow{IJ} + 3\,\overrightarrow{IK} = \vec{0}$ $\quad 2+3 \neq 0$

3 2

① me donne :

- $-3\,\overrightarrow{JI} + 2\left(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK}\right) = -\overrightarrow{JK}$ (on veut $a\,\overrightarrow{JI} + b\,\overrightarrow{JK} = \vec{0}$)

$-3\,\overrightarrow{JI} + 2\,\overrightarrow{IJ} + 2\,\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{JK} = \vec{0}$ $\qquad -5\,\overrightarrow{JI} + 3\,\overrightarrow{JK} = \vec{0}$ $\quad -5+3 \neq 0$

①

- $3\left(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KJ}\right) - 2\,\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{KJ}$ (on veut $a\,\overrightarrow{KI} + b\,\overrightarrow{KJ} = \vec{0}$)

$3\,\overrightarrow{IK} + 3\,\overrightarrow{KJ} - 2\,\overrightarrow{KI} - \overrightarrow{KJ} = \vec{0}$ $\qquad -5\,\overrightarrow{KI} + 2\,\overrightarrow{KJ} = \vec{0}$

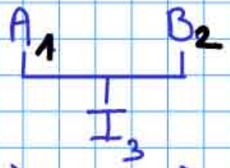
Synthèse : 3 pts alignés I, J, K

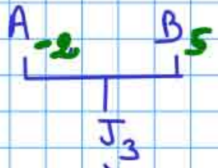
I Bar de $(J ; 2)$ $(K ; 3)$ équivaut à :

J Bar de $(I ; -5)$ $(K ; 3)$ équivaut à :

K Bar de $(I ; -5)$ $(K ; 2)$

$$\boxed{\text{Ex 26 page 348}}$$





$1\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ $\quad -2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} = \vec{0}$

$1\overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \quad 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \quad 3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$

20100419-BarycentreEx26Page348

QCM page 337 - VECTEURS DE L'ESPACE.

⑧

$\overrightarrow{AB}(2;-2;0)$ $\overrightarrow{AC}(0;-1;1)$

$\overrightarrow{DE}(-2;-1;3)$

- $\overrightarrow{DE}$ n'est colinéaire ni à $\overrightarrow{AB}$, ni à $\overrightarrow{AC}$.

Donc $(DE) \nparallel (AB)$ et $(DE) \nparallel (AC)$

- Existe-t-il λ et μ réels tels que $\overrightarrow{DE} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$?

$$\begin{cases} -2 = 2\lambda + 0\mu \\ -1 = -2\lambda - \mu \\ 3 = 0\lambda + 1\mu \end{cases}$$

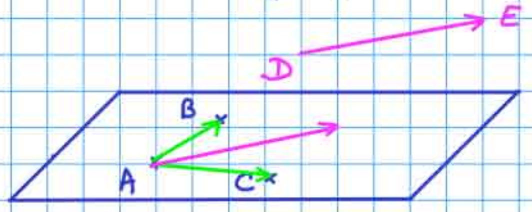
donc $\lambda = -1$

donc $-1 = -2\times(-1) - \mu$ $\quad -1-2 = -\mu \quad \mu = 3$

$$\boxed{\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}$$

$\overrightarrow{DE}$ est 1 combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Donc la droite (DE) est // au plan (ABC)



Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

⑨

$\overrightarrow{AB}(-1;5;-3)$ $\overrightarrow{AC}(1;2;-2)$

$\overrightarrow{AD}(3;6;-6)$ $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$ donc A, D, C alignés

$\overrightarrow{AE}(3;-1;-1)$

$\overrightarrow{BC}(2;-3;1)$ $\overrightarrow{BD}(4;1;-3)$ $\overrightarrow{BE}(4;-6;2)$

$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BC}$ donc B, E, C alignés

A, D, C sont alignés d'1 part.
B, E, C sont alignés d'autre part.
Donc les points
A, B, C, D, E sont coplanaires.

- 

$\vec{GA} - 4\vec{GB} = \vec{0}$ $(1-4 \neq 0)$

$p^{té})$ $1\,\vec{AA} - 4\,\vec{AB} = (1-4)\,\vec{AG}$

$-4\vec{AB} = -3\,\vec{AG}$ $\vec{AG} = \frac{4}{3}\,\vec{AB}$.

- $^{15\,a)\ p347}$ G est bar de $(A, 2)\,;\,(B, -1)$

$2\,\vec{MA} - \vec{MB} = (2-1)\,\vec{MG} = \vec{MG}$

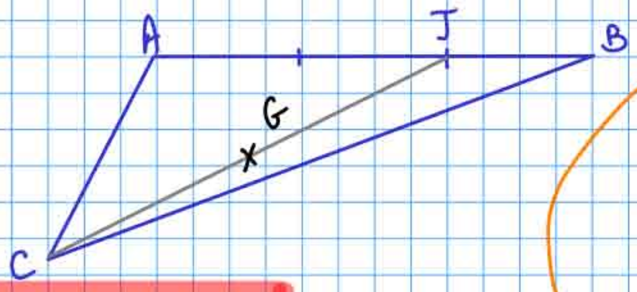
$4\,\vec{NA} - 2\vec{NB} = 2\left(2\vec{NA} - \vec{NB}\right) = 2\cdot(2-1)\vec{NG} = 2\vec{NG}$

II] BARYCENTRE DE 3 POINTS

Définition On appelle barycentre de (A, α) et (B, β) (C, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ l'unique point G tel que :

$$\alpha\,\vec{GA} + \beta\,\vec{GB} + \gamma\,\vec{GC} = \vec{0}$$

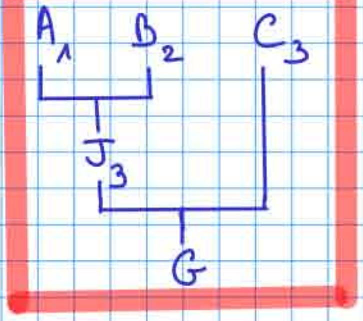
Exemple : G Barycentre de $(A, 1)$ $(B, 2)$ $(C, 3)$



* Soit J Bar de $(A;1)(B;2)$

* Montrer que G est aussi barycentre de $(J;3)$ $(C;3)$

donc que G est le milieu de $[JC]$



$$\underbrace{\vec{GA} + 2\vec{GB}}_{3\,\vec{GJ}} + 3\,\vec{GC} = \vec{0}$$

$3\,\vec{GJ} + 3\,\vec{GC} = \vec{0}$

Pr tt M du plan $\vec{MA} + 2\,\vec{MB} = 3\vec{MJ}$

G est bar de $(J, 3)$ $(C, 3)$
dc de $(J, 1)$ $(C, 1)$

Propriété fondamentale A, B et C sont 3 pts du plan
α, β, γ 3 réels tq $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$

G est le barycentre de (A,α), (B,β), (C,γ)

Pour tout point M du plan $\overset{\text{ou de l'espace}}{,}$ on a :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

ASSOCIATIVITÉ DU BARYCENTRE.

G Barycentre de (A,α) (B,β) (C,γ)

I Barycentre de (A,α) (B,β) $\forall M \in \mathcal{P}, \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$

Alors G est barycentre de $(I, \alpha+\beta)$ (C,γ)

$$\underbrace{(\alpha+\beta)\overrightarrow{GI}} + \gamma\overrightarrow{GC} =$$

M en G $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ puisque G est Bar(A,α)
(B,β), (C,γ)

COORDONNÉES du BARYCENTRE. (espace)

Repère : $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$A(x_A, y_A, z_A)$ $B(x_B, y_B, z_B)$ $C(x_C, y_C, z_C)$

G Baryc de (A,α) (B,β) (C,γ) a pour coordonnées :

$\alpha+\beta+\gamma \neq 0$

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} ; \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} ; \frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

Preuve :

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OC} = x_C\vec{i} + y_C\vec{j} + z_C\vec{k}$$

M en O

$$\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{OG}$$

Donc : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left[\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}\right]$ d'où les coordonnées de G.

70 p 352. G Bar : A_1 B_{-2} C_{-1} $\underbrace{1-2-1}_{\boxed{-2}} \neq 0$

a) $A(0;0)$ $B(-1;0)$ $C(5;0)$

$$G\left(-\frac{1}{2}\left(1\times 0-2\times(-1)+(-1)\times 5\right);-\frac{1}{2}\left(1\times 0-2\times 0-1\times 0\right)\right)$$

$$G\left(\frac{3}{2};0\right)$$

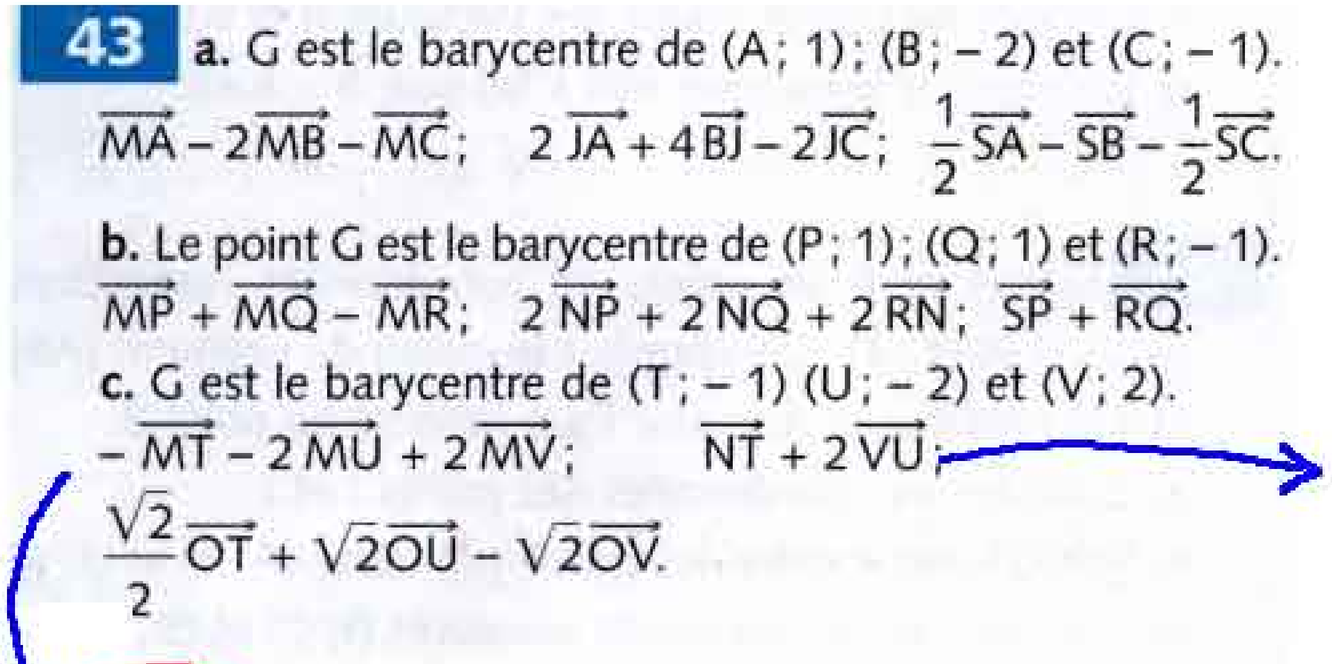
b) $A(1;1)$ $B(-3;1)$ $C(2;1)$

$$G\left(-\frac{1}{2}\left(1\times 1-2\times(-3)-1\times(2)\right);-\frac{1}{2}\left(1\times 1-2\times 1-1\times 1\right)\right)$$

$$G\left(\frac{3}{2};1\right)$$

20100423-BarycentreCours5

$\forall M \in \mathcal{P}, \; -1\,\overrightarrow{MT} - 2\,\overrightarrow{MU} + 2\,\overrightarrow{MV} = -1\,\overrightarrow{MG}$ ⊛



43 **a.** G est le barycentre de (A ; 1) ; (B ; − 2) et (C ; − 1).

$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$; $2\,\overrightarrow{JA} + 4\overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{JC}$; $\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$.

b. Le point G est le barycentre de (P ; 1) ; (Q ; 1) et (R ; − 1).

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MR}$; $2\,\overrightarrow{NP} + 2\,\overrightarrow{NQ} + 2\,\overrightarrow{RN}$; $\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{RQ}$.

c. G est le barycentre de (T ; − 1) (U ; − 2) et (V ; 2).

$-\overrightarrow{MT} - 2\,\overrightarrow{MU} + 2\,\overrightarrow{MV}$; $\overrightarrow{NT} + 2\,\overrightarrow{VU}$;

$\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OT} + \sqrt{2}\overrightarrow{OU} - \sqrt{2}\overrightarrow{OV}$.

$\boxed{-\overrightarrow{MG}}$

M en N :

$-\overrightarrow{NT} - 2\overrightarrow{NU} + 2\overrightarrow{NV} = -\overrightarrow{NG}$

$-\overrightarrow{NT} - 2\big(\underbrace{\overrightarrow{NU} + \overrightarrow{VN}}\big) = -\overrightarrow{NG}$

$-\overrightarrow{NT} - 2\,\overrightarrow{VU} = -\overrightarrow{NG}$

$\times(-1)$

$\overrightarrow{NT} + 2\,\overrightarrow{VU} = \boxed{\overrightarrow{NG}}$

M en O :

⊛ $\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OT} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{OU} - \sqrt{2}\,\overrightarrow{OV} = \boxed{-\overrightarrow{OG}}$

Ex 30 page 348 A et B 2 pts ≠ du plan.

$\Gamma = \{ M \in \mathcal{P} ; \|2\vec{MA} + 1\vec{MB}\| = AB \}$

1) $A \in \Gamma$: en effet $2\vec{AA} + \vec{AB} = \vec{AB}$ donc

$\|2\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{AB}\| = AB$

2) Soit G Bar de A_2 B_1

Pr tt M du plan : $2\vec{MA} + 1\vec{MB} = 3\vec{MG}$

$M \in \Gamma$ ssi $\|3\vec{MG}\| = AB$

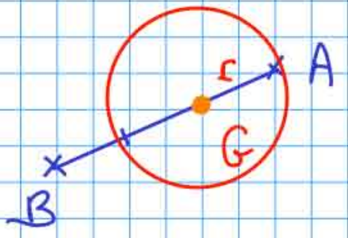
$3\|\vec{MG}\| = AB$

$3MG = AB$

D'où $\boxed{MG = \frac{1}{3}AB}$

$M \in \mathcal{C}_{G, \frac{1}{3}AB}$

$\Gamma = \mathcal{C}_{G, \frac{1}{3}AB}$



b) $\Gamma = \{ \|2\vec{MA} + (-1)\vec{MB}\| = MB \}$

$2 - 1 \neq 0$

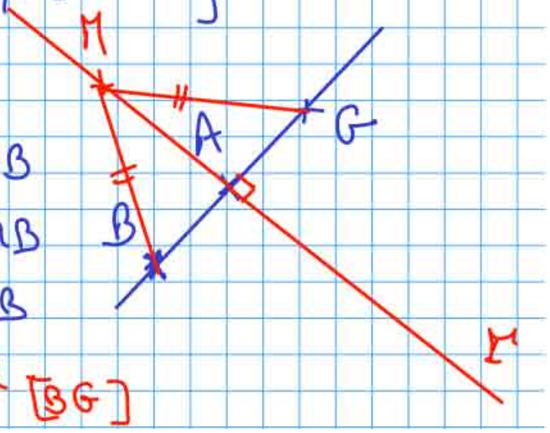
Soit G Bar A_2 B_{-1}

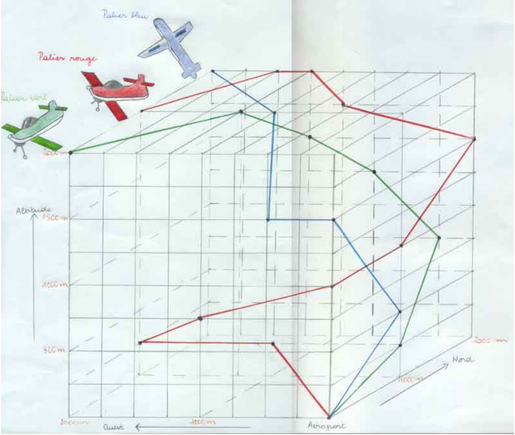
$M \in \Gamma$ ssi $\|(2-1)\vec{MG}\| = MB$

$\|1\vec{MG}\| = MB$

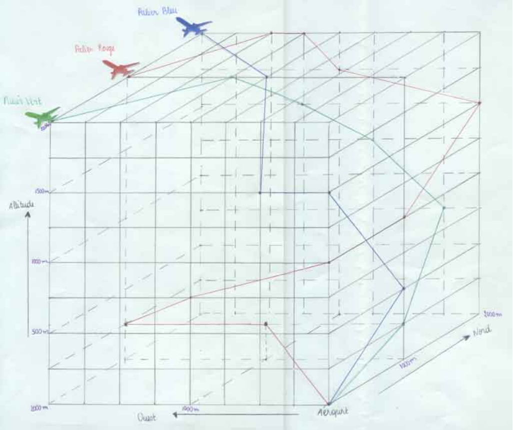
$MG = MB$

$M \in Med_{[BG]}$

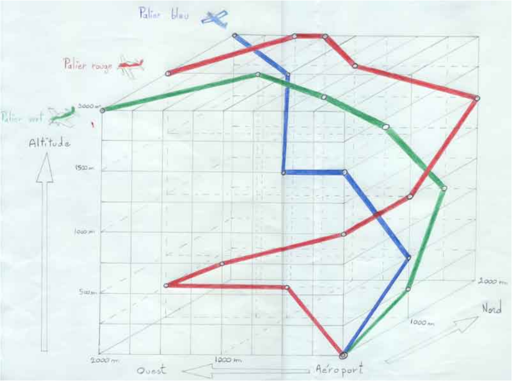




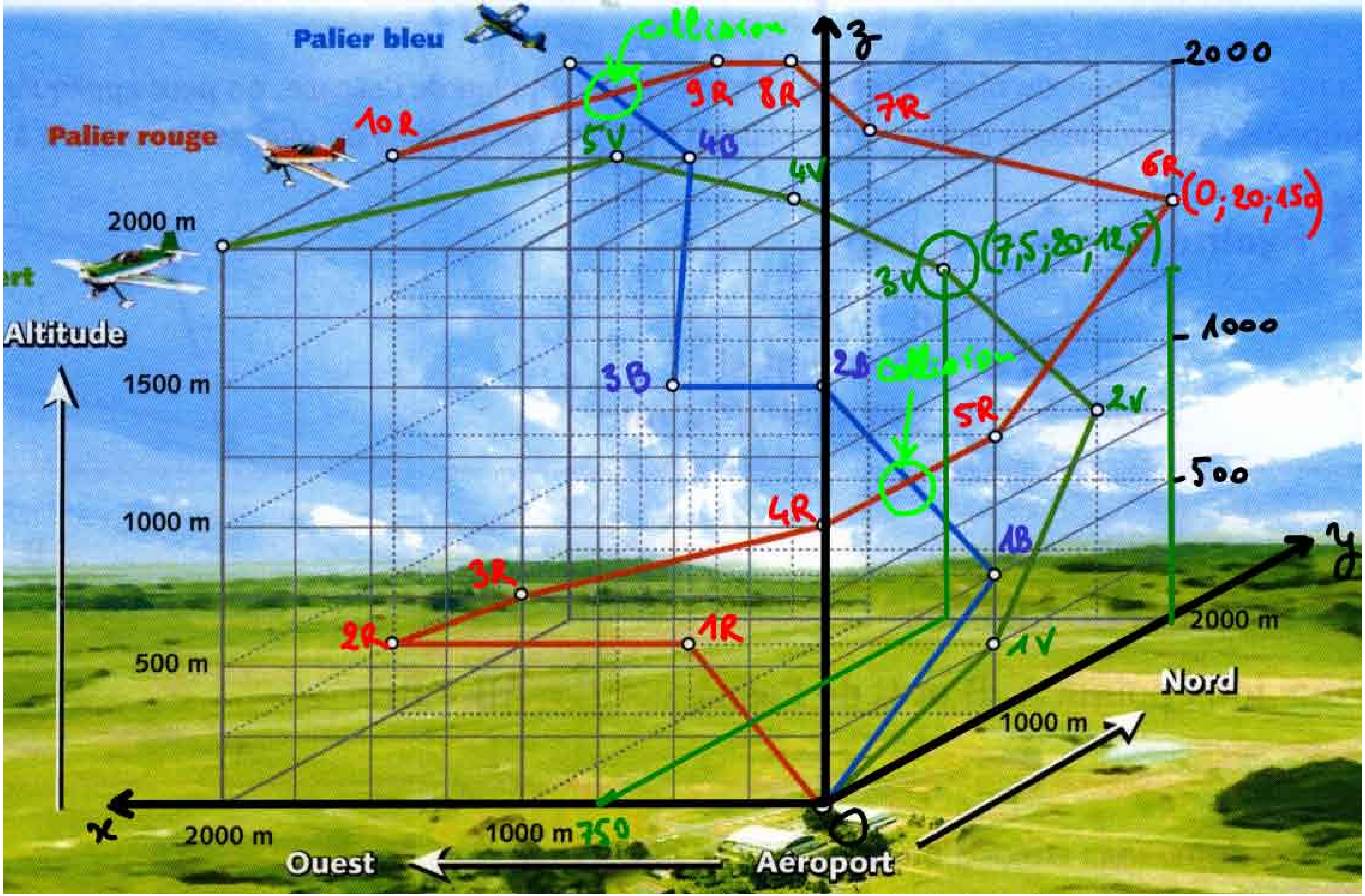
20100426-CubeAquila800-600



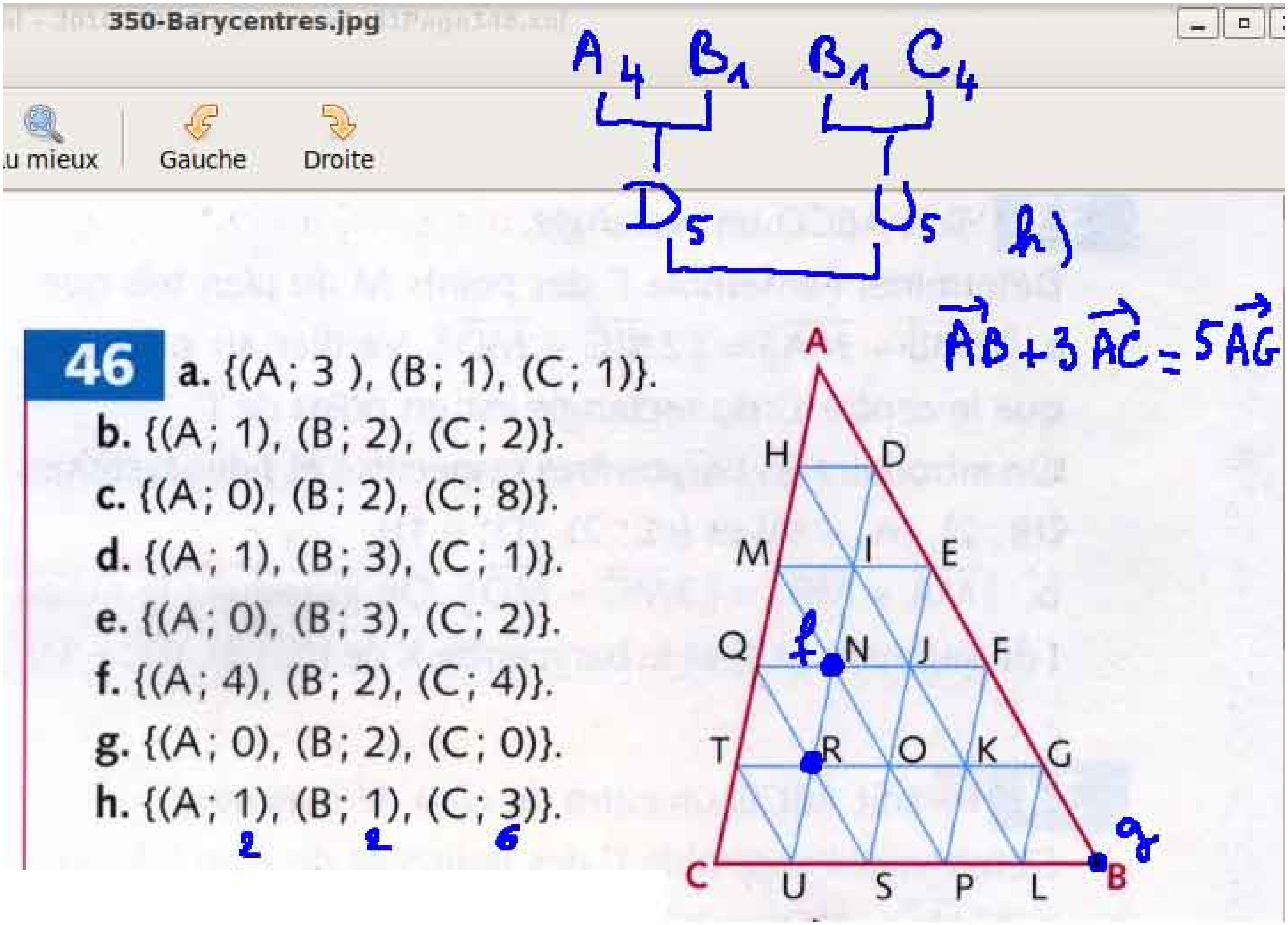
20100426-CubeHawah800-600



20100426-CubeOlivier800-600



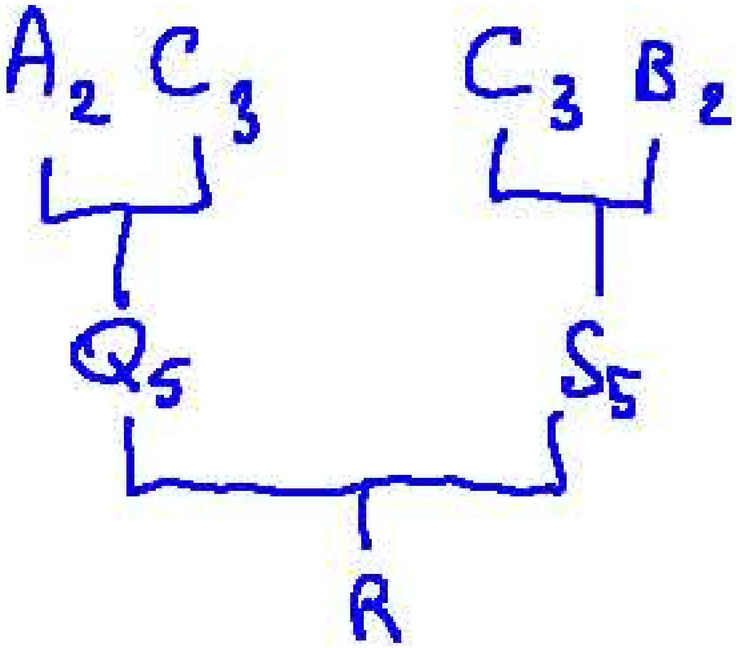
20100430-EspaceAct2Page321



h)

$\vec{AB} + 3\vec{AC} = 5\vec{AG}$

46 **a.** {(A ; 3), (B ; 1), (C ; 1)}.
b. {(A ; 1), (B ; 2), (C ; 2)}.
c. {(A ; 0), (B ; 2), (C ; 8)}.
d. {(A ; 1), (B ; 3), (C ; 1)}.
e. {(A ; 0), (B ; 3), (C ; 2)}.
f. {(A ; 4), (B ; 2), (C ; 4)}.
g. {(A ; 0), (B ; 2), (C ; 0)}.
h. {(A ; 1), (B ; 1), (C ; 3)}.
2 2 6



20100503-BarycentreEx46Page350

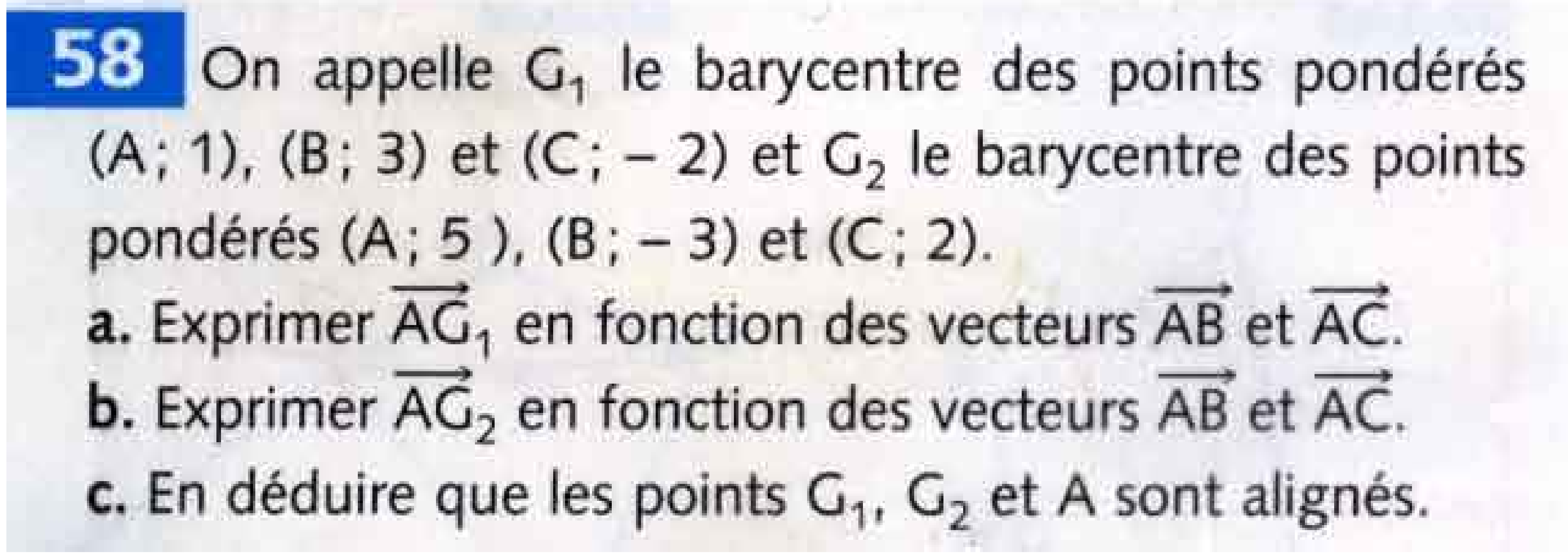
a) Pr ∀ M du plan : $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_1}$

M en A $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG_1}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AG_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \\ \text{b) } \overrightarrow{AG_2} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{array}\right\} \quad \overrightarrow{AG_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AG_1}$$

Les vct $\overrightarrow{AG_1}$ et $\overrightarrow{AG_2}$ sont colinéairs,

Dc A, G_1, G_2 st alignés.



58 On appelle G_1 le barycentre des points pondérés (A ; 1), (B ; 3) et (C ; – 2) et G_2 le barycentre des points pondérés (A ; 5), (B ; – 3) et (C ; 2).

a. Exprimer $\overrightarrow{AG_1}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. Exprimer $\overrightarrow{AG_2}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

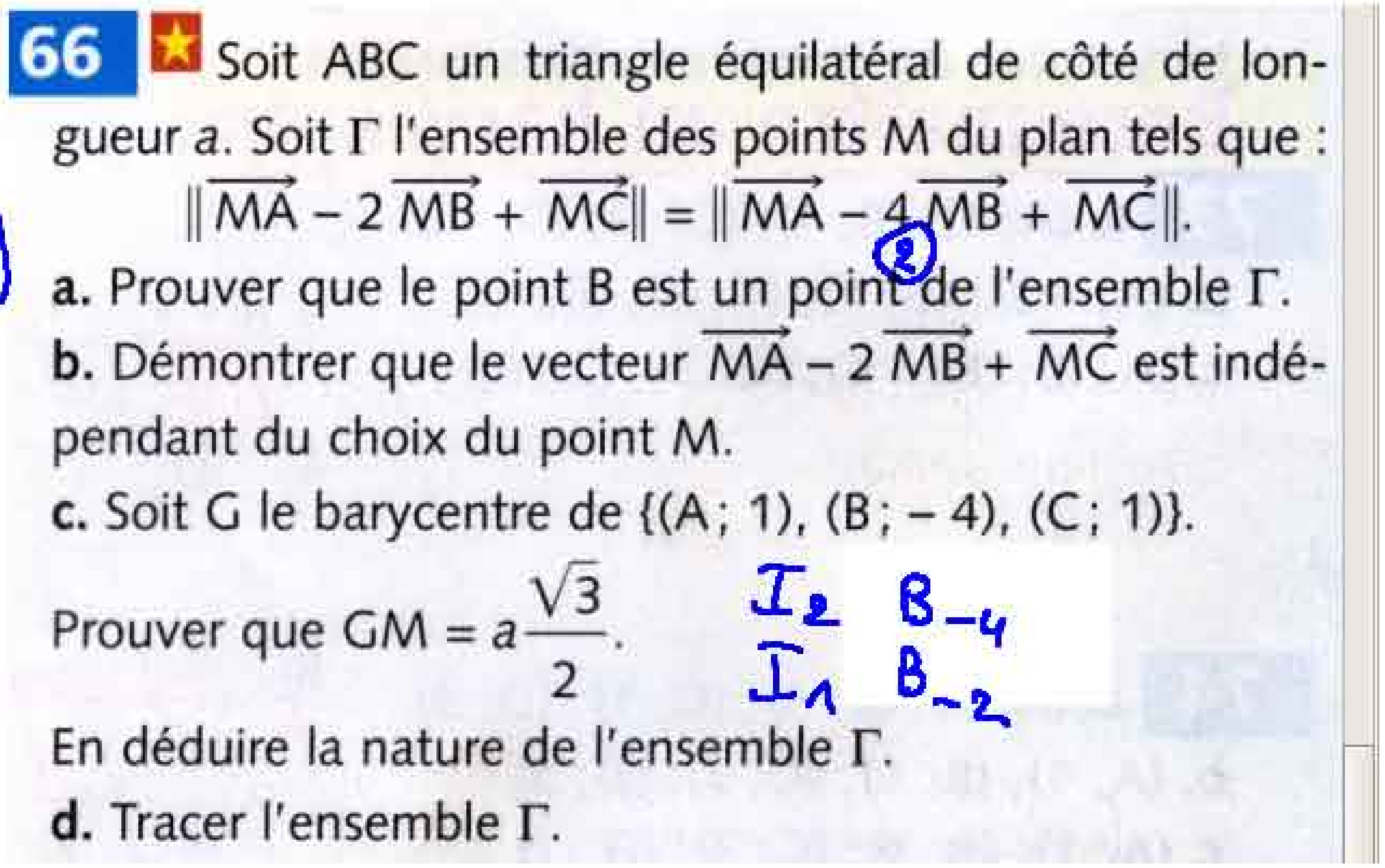
c. En déduire que les points G_1, G_2 et A sont alignés.

a) $B \in \Gamma$: $\|\vec{BA} - 2\vec{BB} + \vec{BC}\| = \|\vec{BA} + \vec{BC}\|$

$\|\vec{BA} - 4\vec{BB} + \vec{BC}\| = \|\vec{BA} + \vec{BC}\|$

b) $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MB} + \vec{MC} = (\vec{MA} + \vec{BM}) + (\vec{MC} + \vec{BM})$

$= \vec{BA} + \vec{BC}$ vect. indpt de M



66 ★ Soit ABC un triangle équilatéral de côté de longueur a. Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|\vec{MA} - 2\,\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \overset{②}{4}\,\vec{MB} + \vec{MC}\|.$$

a. Prouver que le point B est un point de l'ensemble Γ.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{MA} - 2\,\vec{MB} + \vec{MC}$ est indépendant du choix du point M.

c. Soit G le barycentre de {(A ; 1), (B ; – 4), (C ; 1)}.

Prouver que $GM = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$I_2 \quad B_{-4}$

$I_1 \quad B_{-2}$

En déduire la nature de l'ensemble Γ.

d. Tracer l'ensemble Γ.

c) ② : $-2\vec{MG}$

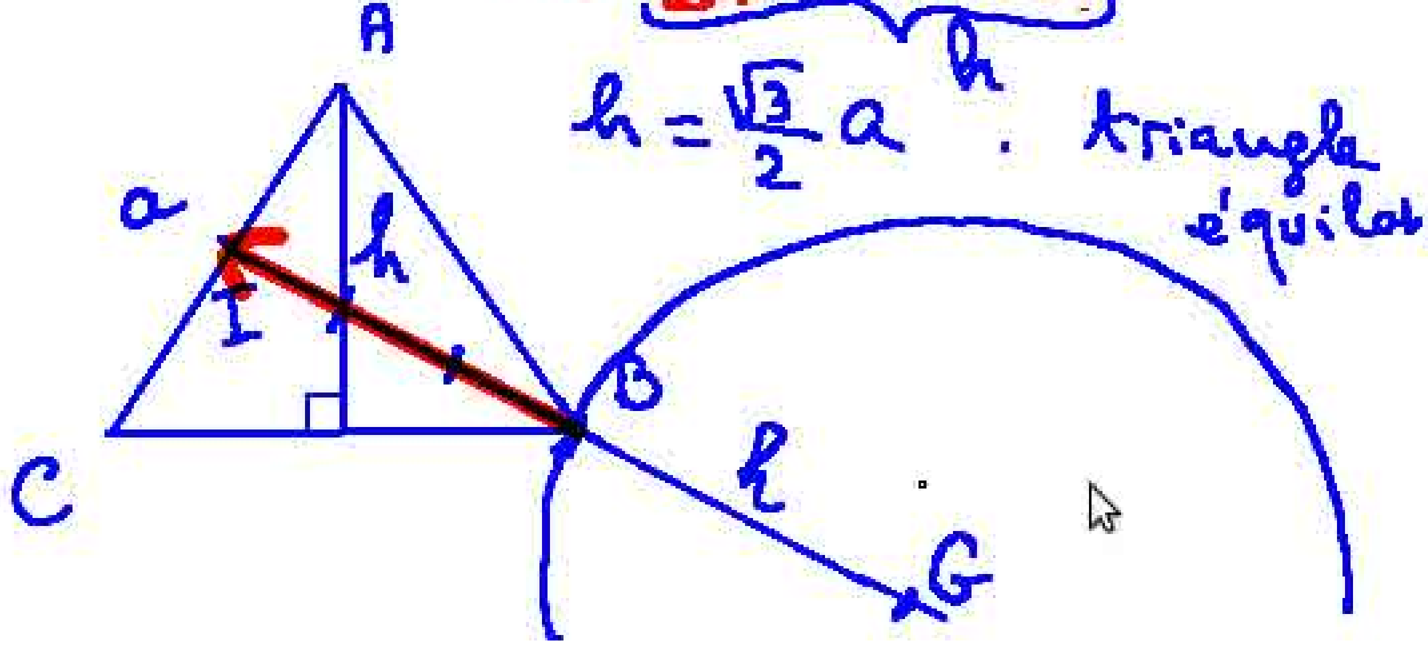
$M \in \Gamma$ ssi $\|\vec{BA} + \vec{BC}\| = \|-2\vec{MG}\|$

$2MG = \|\vec{BA} + \vec{BC}\|$

$$\boxed{MG = \frac{1}{2}\|\vec{BA} + \vec{BC}\|}$$

$$M \in \mathcal{C}_{G,\ \underbrace{\frac{1}{2}\|\vec{BA} + \vec{BC}\|}_{h}}$$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. triangle équilatéral



Ex 10 page 154

a) $u_n = 2n\sqrt{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(2n) = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$ Donc la suite u tend vers $+\infty$.

b) $v_n = -\left(2n+3\right)^2$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+3) = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+3)^2 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -(2n+3)^2 = -\infty$.

Ex 14 page 154

a) $u_n = \dfrac{-3}{(2n-3)^2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n-3)^2 = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{(2n-3)^2} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b) $u_n = -\dfrac{1}{n^2} + 2$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$

dc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{n^2}\right) = 0$ Finalement la suite tend vers 2.

Ex 16 page 254

a) $u_n = 3 + \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)^2 = +\infty$

dc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2} = 0$

Finalement la suite u tend vers 3.

b) $u_n = \dfrac{2}{n+\sqrt{n}} - 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\sqrt{n}) = +\infty$ Dc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n+\sqrt{n}} = 0$

Finalement la suite u tend vers -1.

Ex 26 page 154

$u_n = -\dfrac{2}{5n^3}$ n_0 ? à partir duquel $u_n \in \left]-10^{-3}; 0\right[$

$u_n < 0$ pr tt n.

Pr avoir $-\frac{2}{5n^3} > -10^{-3}$, il suffit d'avoir :

$\times(-1) \downarrow$

$\frac{2}{5n^3} < 10^{-3}$, donc il suffit d'avoir :

$2 < 5 \times 10^{-3} \times n^3$, "

$\frac{2}{5 \times 10^{-3}} < n^3$, "

$n^3 > 400$

$n > \sqrt[3]{400}$

$(400) \wedge \left(\frac{1}{3}\right) \simeq 7,37$ → Il suffit de choisir $n_0 = 8$

et on a :

Pour tt $n \geqslant 8$,

$^3 \downarrow$

$n^3 \geqslant 512$

$\times 5 \downarrow$

$5n^3 \geqslant 2560$

$a \leq b$
alors $f(a) \geqslant f(b)$

Fonction inverse qui est ↘ ↓

$\frac{1}{5n^3} \leqslant \frac{1}{2560}$

$\times(-2) \downarrow$

$\frac{-2}{5n^3} \geqslant -\frac{2}{2560}$

$-\frac{2}{5n^3} \geqslant -\frac{1}{1280} > -\frac{1}{1000}$ cqfd.

Exercice 33 p155

$u_n = \dfrac{1}{n^2+3}$ $\qquad v_n = \dfrac{1}{n^2}$ $\qquad n \in \mathbb{N}^*$

1) Pour tout $n > 0$, on a : $\quad n^2 + 3 \geqslant n^2$ on applique la f° $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui est ↘

$$0 < \frac{1}{n^2+3} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

$$0 < u_n \leqslant v_n$$

2) Pour avoir $v_n \leqslant 2.10^{-8}$, il suffit d'avoir :

on applique $x \longmapsto \frac{1}{x}$ ↘

$$\frac{1}{n^2} \leqslant 2.10^{-8}$$

$$n^2 \geqslant \frac{1}{2.10^{-8}}$$

$$n^2 \geqslant 0{,}5\,.\,10^8$$

$$n^2 \geqslant 5.10^7$$

$$n \geqslant \sqrt{5.10^7}$$

$\boxed{n_0 = 7072}$ Dès que $n \geqslant n_0$, $n^2 \geqslant 5.10^7$

et finalement $v_n \leqslant 2.10^{-8}$.

et Dès que $\overline{n \geqslant n_0}$, on a aussi :

$0 < u_n \leqslant v_n$ d'aprè (1)

Donc $\quad 0 < u_n \leqslant v_n \leqslant 2.10^{-8}$.

EX 46 p155

- $u_n = 3 - 2n$

$u_{n+1} = 3 - 2(n+1)$
$= 3 - 2n - 2$
$= 1 - 2n$

$u_{n+1} - u_n = (1 - 2n) - (3 - 2n)$
$= 1 - 2n - 3 + 2n$
$= -2$ prtt $n \in \mathbb{N}$.

La suite est bien 1 S.A. de raison -2, de 1er terme $u_0 = 3$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (2n) = +\infty$ dc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-2n) = -\infty$

Final^{mt} $\lim\limits_{n \to +\infty} (3 - 2n) = -\infty$.

- $v_n = \frac{n+2\pi}{100}$

$v_n = \frac{1}{100} n + \frac{2\pi}{100}$

v est 1 SA de raison $\frac{1}{100}$ et de 1er terme :

$v_0 = \frac{2\pi}{100}$

Ex 56 p 156   S G $u_1 = -2$ $q = 2$

$u_n = u_1 \times q^{n-1}$ $u_n = -2 \times 2^{n-1}$

a)

$$S_{10} = u_1 \times \frac{1-q^{10}}{1-q}$$

$$S_{10} = -2 \times \frac{1-2^{10}}{1-2}$$

$$S_{10} = 2(1-2^{10})$$
$$= 2 \times (1-1024)$$
$$= 2 \times (-1023)$$
$$\boxed{S_{10} = -2046}$$

$$S_n = -2 \frac{1-2^n}{1-2} \qquad S_n = 2(1-2^n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} -2^n = -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}(1-2^n) = -\infty \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty}$$

Ex 67 page 157

$$u_n = \frac{2^n-3}{2^n+1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$u_n = \frac{\cancel{2^n}\left(1-\frac{3}{2^n}\right)}{\cancel{2^n}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)} \qquad u_n = \frac{1-\frac{3}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}$$

$$u_n = \frac{1-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in \left]-1;1\right[$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1$

Final^{mt} - $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

Exercice Wins.

$$v_n = \frac{4}{u_n+6}$$

$$v_{n+1} = \frac{4}{u_{n+1}+6}$$

$$v_{n+1} = \frac{4}{\frac{2}{3}u_n - 2 + 6} = \frac{4}{\textcircled{\frac{2}{3}}u_n + 4}$$

$\boxed{v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n}$ $$= \frac{\frac{3}{2}\times 4}{u_n + \frac{3}{2}\times 4}$$

$v_n = -5\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$ $$= \frac{6}{u_n+6} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}\times\overset{v_n}{\boxed{\frac{4}{u_n+6}}}$$

$$v_n = \frac{4}{u_n+6} \qquad v_n \times (u_n+6) = 4$$

$$v_n u_n + 6 v_n = 4$$

$$v_n u_n = 4 - 6 v_n$$

$$u_n = \frac{4 - 6\times\left(-5\times\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)}{-5\times\left(\frac{3}{2}\right)^n} \longleftarrow \boxed{u_n = \frac{4-6v_n}{v_n}}$$

$$u_n = -\frac{4+30\,\frac{3^n}{2^n}}{5\times\frac{3^n}{2^n}} \quad \begin{matrix}(\times 2^n)\\(\times 2^n)\end{matrix}$$

$$\boxed{u_n = -\frac{4\times2^n+30\times3^n}{5\times3^n}}$$

$$u_n = -\frac{\cancel{3^n}\left(4\times\overset{\to 0}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}+30\right)}{\cancel{3^n}\times 5}$$

on met 3^n en facteur en haut et en bas

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{30}{5} = \boxed{-6}$

$$\overrightarrow{CG_1} = \frac{3}{4}\overrightarrow{C\underset{G_1}{A}}$$ exprimer G_1 cô bar de A et C

$$\overrightarrow{CG_1} - \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{CG_1}+\overrightarrow{G_1A}\right) = \vec{0}$$

×4

$$4\,\overrightarrow{CG_1} - 3\overrightarrow{CG_1} - 3\,\overrightarrow{G_1A} = \vec{0}$$

$$1\,\overrightarrow{CG_1} - 3\,\overrightarrow{G_1A} = \vec{0}$$

$$-1\,\overrightarrow{G_1C} - 3\,\overrightarrow{G_1A} = \vec{0}$$

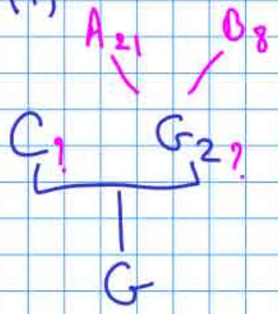
G_1 est Bar (A; 3) (C; 1)

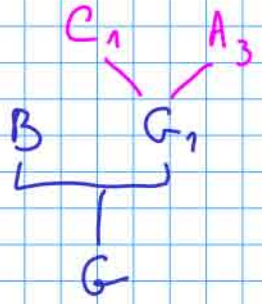
$\overrightarrow{AG_2} = \frac{8}{29}\,\overrightarrow{AB}$ G_2 est Bar (A; 21) B; 8)

$$\{G\} = [CG_2] \cap [BG_1]$$

Dc G peut s'exprimer cō bar de C et G_2 d'1 part
et cō bar de B et G_1 d'autre part

$$\underbrace{C_1 \quad A_3}_{G_1 (4)} \qquad \underbrace{A_{21} \quad B_8}_{G_2 (29)} \qquad \underbrace{A_a \quad B_b \quad C_c}_{G}$$



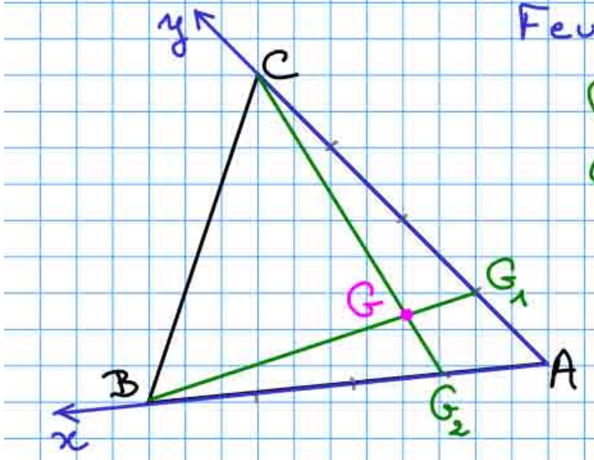


Exercice de WIMS sur le barycentre

Feuille de travail n° 13 sur Wims.

G_1 est barycentre de A_3 C_1

G_2 est barycentre de A_{21} B_8



Il s'agit d'exprimer G comme barycentre de A, B et C.

$1^{\text{ère}}$ Méthode

Choix du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Dans ce repère $G_1\left(0 ; \frac{1}{4}\right)$ $G_2\left(\frac{8}{29} ; 0\right)$

$B(1;0)$ $C(0;1)$

- Équation de la droite (BG_1) $y = ax + \frac{1}{4}$

$B \in (BG_1)$ donc : $0 = a \times 1 + \frac{1}{4}$

d'où $a = -\frac{1}{4}$

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}}$$

- Équation de la droite (CG_2) $y = ax + 1$

$G_2 \in (CG_2)$ donc : $0 = a \times \frac{8}{29} + 1$

d'où $a = -\frac{29}{8}$

$$\boxed{y = -\frac{29}{8}x + 1}$$

G est le point d'intersection de (BG_1) et de (CG_2).

Ses coordonnées vérifient donc : $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = -\frac{29}{8}x + 1$

soit : $-2x + 2 = -29x + 8$

$27x = 6$ $x = \frac{6}{27}$

$y = -\frac{1}{4} \times \frac{6}{27} + \frac{1}{4} = \frac{21}{108}$

$G\left(\frac{6}{27} ; \frac{21}{108}\right)$

On a donc :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{6}{27}\overrightarrow{AB} + \frac{21}{108}\overrightarrow{AC}$$

$$108\overrightarrow{AG} = 24\overrightarrow{AB} + 21\overrightarrow{AC}$$

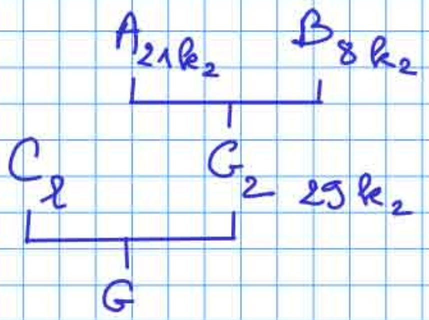
$$108\overrightarrow{AG} - 24(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) - 21(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$$

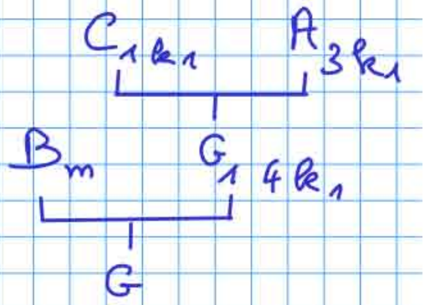
$$63\overrightarrow{GA} + 24\overrightarrow{GB} + 21\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$21\overrightarrow{GA} + 8\overrightarrow{GB} + 7\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

G est donc barycentre de A_{21} B_8 C_7.

2ème Méthode





G est donc barycentre de :

C_l A_{21k_2} B_{8k2} d'une part,

et de B_m C_{1k_1} A_{3k_1} d'autre part.

On en tire les égalités suivantes :

$$\begin{cases} m = 8k_2 \\ l = k_1 \\ 21k_2 = 3k_1 \end{cases}$$

G est donc barycentre de :

C_{k_1} A_{3k_1} $B_{\frac{8}{7}k_1}$

G est donc barycentre de

C_7 A_{21} B_8 .

91 page 163 $I = [1;+\infty[$

① a) Sur I $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$= \frac{-(x+1)^2 + x^2}{x^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} < 0 \quad \text{car } x \geqslant 1 \ (x \in I)$$

$\left(x \geqslant 1 \Rightarrow 2x \geqslant 2,\ -2x \leqslant -2,\ -2x-1 \leqslant -3 < 0 \right)$ f est strictement décroissante sur I.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ Donc $f \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

② a) $u \downarrow$ car $f \downarrow$ $\left(u(n) = f(n) \text{ pour tt } n \in \mathbb{N}^* \right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

c) $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ pour tt $n \geqslant 1$. Donc $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \boxed{>0}$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \boxed{<1} \quad \text{car } n(n+1) > 1$$

On a donc $0 < u_n < 1$ pr tt $n \in \mathbb{N}^*$

③ ⓐ $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \cancel{\dots} + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2} > 1 - \frac{1}{n+1}$$

car $n+1 < n+2$
$\dfrac{1}{n+1} > \dfrac{1}{n+2}$
$-\dfrac{1}{n+1} < -\dfrac{1}{n+2}$

$S_{n+1} > S_n$ pour tout $n \geqslant 1$

La suite S est ↗

ⓑ $u_1 + u_2 + u_3 = S_3 = 1 - \dfrac{1}{3+1} = 1 - \dfrac{1}{4} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$

$S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ donc $S_n = \dfrac{n+1-1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$

ⓒ $S_{99} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{99}$

mais $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

Donc $S_{99} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{99\times 100}$

Finalement, $S_{99} = \frac{99}{99+1}$ d'aprs le b)

$S_{99} = \frac{99}{100}$ $\boxed{S_{99} = 0,99}$

ⓓ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\underset{\to 0}{\frac{1}{n}}} = \boxed{1}$

RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

- Ex de logique 1 page 162.

Montrer que : $\sqrt{2}$ est irrationnel

Ⓗ $\sqrt{2}$ n'est pas irrationnel, c'est à dire qu'il est rationnel.

Il existe a et b premiers entre eux, avec $b \neq 0$ tel que

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

① $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$ équivaut $2 = \frac{a^2}{b^2}$ càd $a^2 = 2b^2$ (*)

a^2 est donc un nombre pair. D'après le lemme, a est pair.

Donc il existe un réel a' tel que $a = 2a'$. 1

On en déduit $a^2 = \underbrace{4a'^2 = 2b^2}_{2a'^2 = b^2}$ d'après (*)

Donc

C'est à dire que b^2 est pair. D'après le lemme, b est pair.

Donc il existe un réel b' tel que $b = 2b'$ 2

② $\frac{a}{b} = \frac{\cancel{2}a'}{\cancel{2}b'}$ d'après 1 et 2.

donc $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. La fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible.

Il y a contradiction (a et b ne sont pas premiers entre eux).

La propriété de départ est donc vraie : $\sqrt{2}$ est IRRATIONNEL.

20100528-LogiqueEx1Page162

Probabilités

Ω { résultats possibles
- issues possibles
- éventualités

{ - l'ensemble des possibles
- l'ensemble des événements élémentaires.

A- Loi de probabilité

1- Univers

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. L'ensemble des résultats possibles, aussi appelés éventualités, est l'univers associé à l'expérience aléatoire. Ω

Exemples :

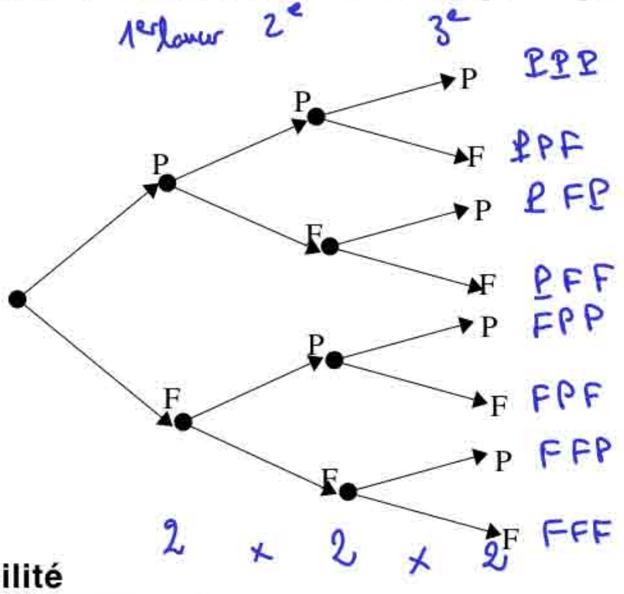
- jeu de Pile ou Face : on a deux résultats possibles, Pile ou Face, l'univers est U={Pile,Face}
- lancer un dé : on a six résultats possibles, l'univers est U={1, 2, 3, 4, 5, 6} card U = 6
- lancer deux dés : l'univers est formé par l'ensemble des couples (x,y) où x et y sont des entiers pris entre 1 et 6, il contient 6x6=36 éléments, on peut le représenter par le tableau suivant :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

• autre exemple : lancer de 2 dés, je note la somme des pts obtenus.

$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

- lancer de trois pièces : l'univers est formé de l'ensemble des triplets formés des lettres P (pour Pile) et F (pour face); il contient 2x2x2=8 éventualités que l'on peut représenter à l'aide d'un arbre.



$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$

card $\Omega = 2^3$ (dénombrement)

2- Loi de probabilité

On définit une loi de probabilité sur un univers U={e_1, e_2, e_3, ..., e_n}en associant à chacune des éventualités e_i de U un réel positif ou nul p_i, ces réels vérifiant la relation **$p_1+p_2+p_3+......+p_n = 1$**

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $0 \leq p_i \leq 1$

$1 \leq i \leq n$

et $i \in \mathbb{N}$

Cette loi peut être notée dans un tableau :

éventualités	e_1	e_2	e_3	......	e_n
probabilités	p_1	p_2	p_3	......	p_n

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, les fréquences d'apparition des éventualités e_i tendent vers les p_i .

(voir simulations de 2nde)

3- Equiprobabilité

Lorsque tous les p_i d'une loi de probabilité sont égaux, on est en situation d'équiprobabilité, on dit que la loi est équirépartie.

hypothèse

Si l'univers de la loi contient n éléments, on a $\boxed{p_i = \frac{1}{n}}$ quel que soit i. d'équiprobabilité.

Exemples

- Jeu de Pile ou Face
  Avec une pièce équilibrée, les deux faces ont la même probabilité de sortie, on a une loi équirépartie.

Pile	Face
1/2	1/2

- Lancement d'un dé
  Avec un dé équilibré, toutes les faces ont la même probabilité de sortie, on a une loi équirépartie.

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

B- Evènements = un ensemble d'éventualités

On considère une expérience aléatoire et son univers $U=\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$muni d'une loi de probabilité P.

1- Probabilité d'un évènement

Un événement est une partie de l'univers. On dit qu'un événement est réalisé lorsque le résultat obtenu à l'issue d'une expérience est une éventualité contenue dans l'évènement.
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de ses éventualités.

Exemple

On tire un dé, on appelle A l'évènement consistant à obtenir au moins 5.
On a alors $A=\{5\ , 6\}$. Comme les probabilités d'obtenir 5 et 6 sont égales à 1/6, on aura

$$P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\ .$$

2- Propriétés

- L'ensemble vide noté $\emptyset$ est appelé événement impossible, $P(\emptyset) = 0$. par définition.
- L'univers U est appelé événement certain, $P(U) = 1$.
- Pour tout événement A, on a $\underset{\text{imp.}}{0} \leqslant P(A) \leqslant \underset{P(U)}{1}$.
- Dans le cas d'une loi équirépartie, si l'univers U contient n éventualités et si l'évènement A

contient *k* éventualités, alors $P(A)=\frac{k}{n}$.

On dit que $\boxed{P(A)=\frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}}$

Exemple
Une urne contient 10 boules bleues et 5 boules rouges indiscernables au toucher. Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue ?
Les boules étant indiscernables au toucher, on est dans un cas d'équiprobabilité.
Comme il y a 15 boules au total, l'univers contient 15 éventualités.
L'évènement « tirer une boule bleue » contient 10 éventualités.
La probabilité de tirer une boule bleue est donc $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

3- Réunion et intersection d'évènements

La **réunion** des évènements *A* et *B* est l'évènement $A \cup B$ formé de toutes les éventualités appartenant à *A* **ou** à *B*. (il s'agit du **ou** inclusif, les éventualités peuvent appartenir aux deux évènements en même temps)
L'**intersection** des évènements *A* et *B* est l'évènement $A \cap B$ formé de toutes les éventualités appartenant à la fois à *A* **et** à *B*.
Lorsque $A \cap B = \emptyset$, *A* et *B* n'ont aucune éventualité commune, on dit que ce sont des évènements disjoints ou incompatibles.

> Si *A* et *B* sont deux évènements quelconques, $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.
> Si *A* et *B* sont deux évènements disjoints, $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

$\hookrightarrow A \cap B = \phi$

4- Evènements contraires

Le contraire de l'évènement *A* est l'évènement $\overline{A}$ formé par toutes les éventualités de l'univers qui ne sont pas dans *A*.

> $P(\overline{A})=1-P(A)$.

$p(\Omega)=1$ $\Omega = A \cup \bar{A}$ $A \cap \bar{A} = \phi$

$p(\Omega)=p(A)+p(\bar{A})$
$1 = p(A)+p(\bar{A})$

C- Variables aléatoires

1- Définition

$X : U \longrightarrow \mathbb{R}$
$e_i \longmapsto x_i$

$X(e_i)=x_i$ (x_i est le réel image de l'éventualité e_i par la f° X) .

Une variable aléatoire sur l'univers $U=\{e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots, e_n\}$ est une fonction *X* définie sur *U*.
On note $(X=x_i)$ l'ensemble des éventualités e_i vérifiant $X(e_i) = x_i$.
Si *P* est la loi de probabilité de *U*, la loi de probabilité de *X* est donnée par l'ensemble des probabilités des évènements $(X=x_i)$.

Exemple
On lance un dé. On perd 2 euros si on tire 1 ou 2, on gagne 0,5 euros si on tire 3 et enfin on gagne 1euro si on tire 4, 5 ou 6. On appelle *X* la variable aléatoire qui donne le gain associé à un tirage. Ainsi :
$X(1)= X(2) = -2$; $X(3) = 0{,}5$; $X(4) = X(5) = X(6) = 1$.
On a $(X=-2) = \{1,2\}$, $(X=0{,}5) = \{3\}$ et $(X=1) = \{4,5,6\}$, d'où
$P(X=-2) = 2/6 = 1/3$, $P(X=0{,}5) = 1/6$ et $P(X=1) = 3/6 = 1/2$.

$\hookrightarrow$ équiprobabilité .

$(X=-2) = \{ e_i \in U, X(e_i)=-2 \}$
$= \{1 ; 2\}$

Valeurs prises par la variable aléatoire

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

X	- 2	0,5	1
***P*(*X*=*x*i)**	1/3	1/6	1/2

probabilités associées

2- Espérance, variance et écart type.

On considère une variable aléatoire *X* dont la loi de probabilité *P* est donnée par le tableau :

X	x_1	x_2	x_3	……	x_n
***P*(*X*=*x*i)**	p_1	p_2	p_3	……	p_n

> On appelle espérance mathématique de *X* le nombre réel
>
> $E(X)=x_1\,p_1+x_2\,p_2+\cdots+x_n p_n=\sum p_i x_i$ Moyenne pondérée.
>
> On appelle variance de *X* le nombre réel
>
> $V(X)=(x_1-E(X))^2\,p_1+(x_2-E(X))^2\,p_2+\cdots+(x_n-E(X))^2\,p_n=\sum (x_i-E(X))^2\,p_i$
>
> $V=\sigma^2$
>
> On appelle écart type de *X* le nombre réel $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

Exemple

Reprenons le jeu décrit au 1) et la variable aléatoire *X* dont la loi de probabilité est donnée par le tableau :

X	- 2	0,5	1
***P*(*X*=*x*i)**	1/3	1/6	1/2

On a alors $E(X)=-2\times\frac{1}{3}+0{,}5\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}=\frac{-4}{6}+\frac{0{,}5}{6}+\frac{3}{6}=\frac{-0{,}5}{6}=\frac{-1}{12}$.

Comme l'espérance mathématique est négative, on peut penser que lors d'un grand nombre de parties le joueur sera perdant.

Ex 30 page 209. $\Omega = \{ n \in \mathbb{N} ,\ 0 \leq n \leq 20 \}$

A : « n est pair »

B : « n est mult de 3 »

C : « $n \geqslant 10$ »

$A \cap B$: « n est pair et mult de 3 »

$A \cap B$: « nombres pairs mult de 3 »

$\overline{A \cap B}$: « n n'est pas pair ou n n'est pas mult de 3 ».

$\overline{A \cap B}$: « n est impair ou n n'est pas mult de 3 »

$A \cup B$: « n est pair ou mult de 3 »

$\overline{A \cup B}$: « n est impair et n n'est pas mult de 3 ».

$(A \cap B) \cap C$: « n est pair, mult de 3, supérieur ou égal à 10 ».

$(A \cap B) \cap C = \{12 ; 18\}$.

$(A \cup B) \cup C$: « n est pair, ou bien mult de 3, ou $\geqslant 10$ }.

$(A \cup B) \cup C = \Omega \setminus \{1 ; 5 ; 7\}$

$\overline{A} \cap \overline{B}$: « n impair et n n'est pas mult de 3 »

$\overline{A} \cup \overline{B}$: « n impair ou bien n n'est pas mult de 3 ».

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$$

① 1) si $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, alors $x \in \overline{A \cap B}$

2) si $x \in \overline{A \cap B}$, alors $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Pour montrer l'égalité de 2 ensembles, on doit montrer la double inclusion.

② $\overline{A} \cup \overline{B} = \{ x \in \Omega \ / \ x \notin A \text{ ou } x \notin B \}$

$A \cap B = \{ x \in \Omega \ / \ x \in A \ \boxed{\text{et}} \ x \in B \}$

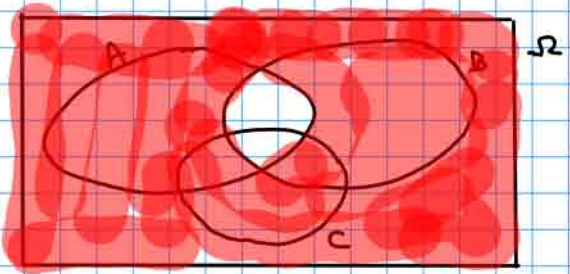
$\overline{A \cap B} = \{ x \in \Omega \ / \ x \notin A \cap B \}$

$$\overline{A \cap B} = \{ x \in \Omega \ / \ x \notin A \text{ ou } x \notin B \} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Le contraire de l'intersection, c'est la réunion des contraires.

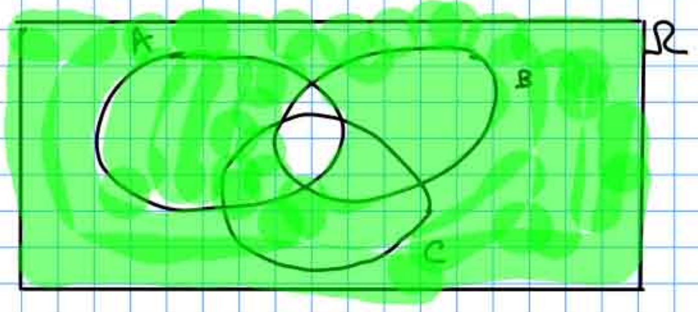
20100531-ProbabilitesEx30Page209b

Ex 32 page 209



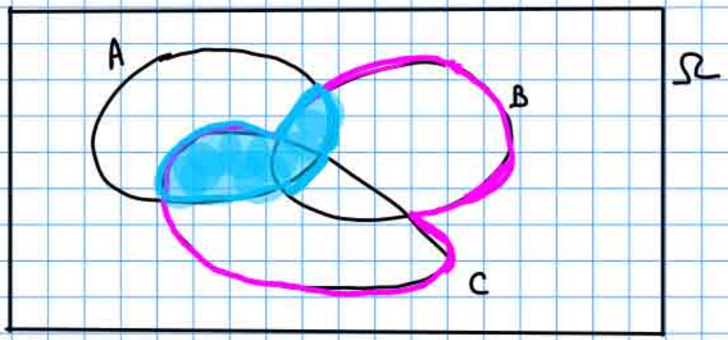
$\overline{A \cap B}$

20100531-ProbabilitesEx32Page209



$\bar{A} \cup \bar{B}$

On a $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$



🟦 E

— B∪C

$E = \left\{ x \in A \underset{\cap}{\text{et}} \left(x \in B \text{ ou } x \in C \right) \right\}$

$E = \left\{ \left(x \in A \text{ et } x \in B \right) \text{ ou } \left(x \in A \text{ et } x \in C \right) \right\}$

$E = \left\{ \left(x \in A \cap B \right) \text{ ou } \left(x \in A \cap C \right) \right\}$

$E = \left(A \cap B \right) \cup \left(A \cap C \right)$

$E = F$.

Ex 40 page 209

$$\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

probabilités des événements élémentaires. $(p_i)_{1 \le i \le 4}$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\ p_1 = 0,05 \\ p_2 = \dfrac{p_1 + p_3}{2} \\ p_3 = \dfrac{p_2 + p_4}{2} \end{cases}$$

$p_1 = 0,05$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} p_2 + p_3 + p_4 = 0,95 \\ 2p_2 - p_3 = 0,05 \\ -p_2 + 2p_3 - p_4 = 0 \end{cases}$$

$L_2 : \quad p_3 = 2p_2 - 0,05$

$L_1 : \quad p_2 + 2p_2 - 0,05 + p_4 = 0,95$

$L_3 : \quad -p_2 + 4p_2 - 0,1 - p_4 = 0$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} 3p_2 + p_4 = 1 \\ 3p_2 - p_4 = 0,1 \end{cases}$$

Syst d'éq linéaire de 2 éq. à 2 inconnues

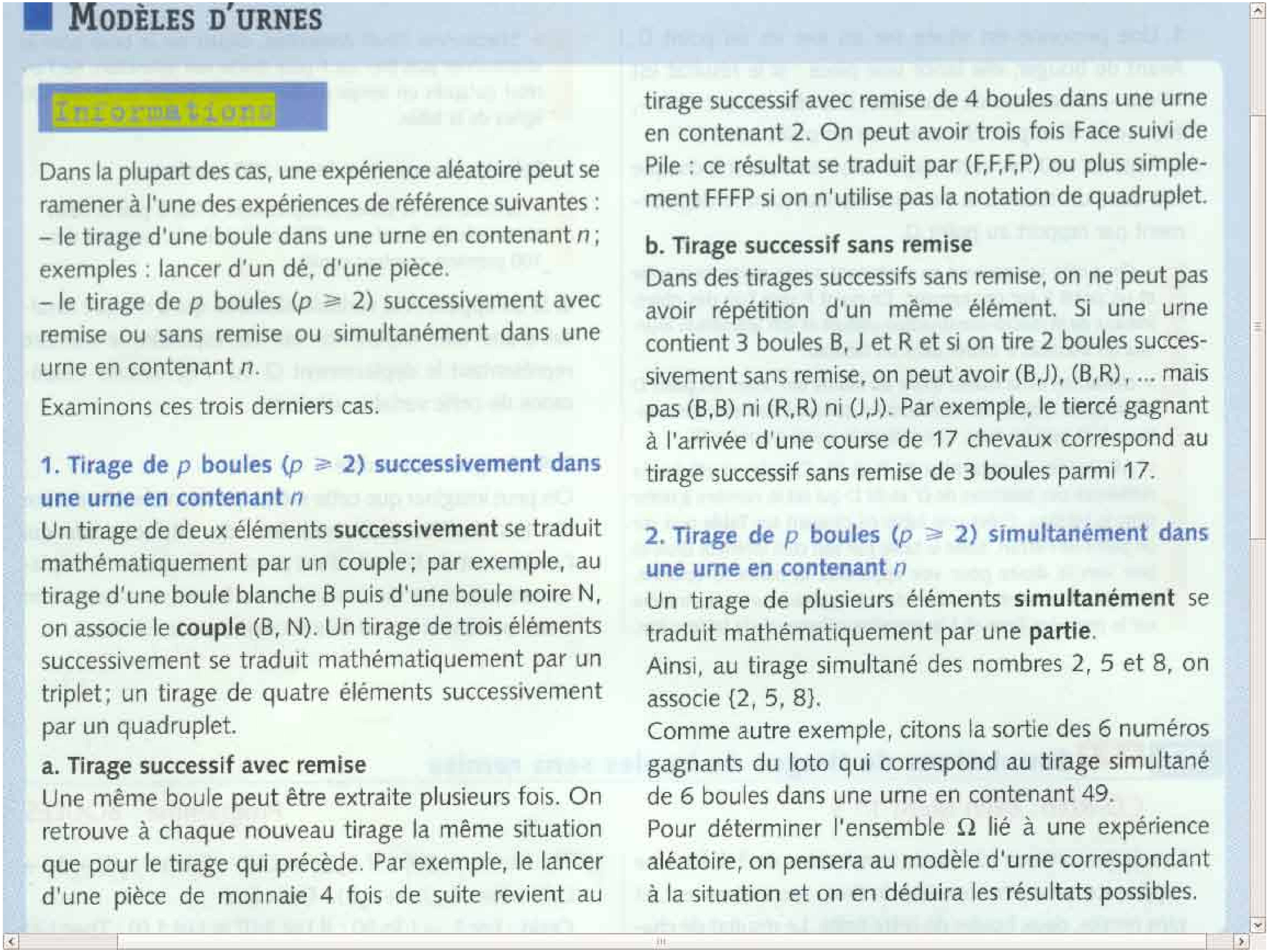
$L_1 + L_3 \qquad 6p_2 = 1,1$

$\boxed{p_2 = \frac{1,1}{6} = \frac{11}{60}}$

→ Calculer p_4 . (avec L_3)
puis p_3 (avec L_2)

$\boxed{p_3 = \frac{19}{60}}$

$\boxed{p_4 = \frac{9}{20}}$



MODÈLES D'URNES

Informations

Dans la plupart des cas, une expérience aléatoire peut se ramener à l'une des expériences de référence suivantes :

– le tirage d'une boule dans une urne en contenant n ; exemples : lancer d'un dé, d'une pièce.

– le tirage de p boules ($p \geqslant 2$) successivement avec remise ou sans remise ou simultanément dans une urne en contenant n.

Examinons ces trois derniers cas.

1. Tirage de p boules ($p \geqslant 2$) successivement dans une urne en contenant n

Un tirage de deux éléments **successivement** se traduit mathématiquement par un couple ; par exemple, au tirage d'une boule blanche B puis d'une boule noire N, on associe le **couple** (B, N). Un tirage de trois éléments successivement se traduit mathématiquement par un triplet ; un tirage de quatre éléments successivement par un quadruplet.

a. Tirage successif avec remise

Une même boule peut être extraite plusieurs fois. On retrouve à chaque nouveau tirage la même situation que pour le tirage qui précède. Par exemple, le lancer d'une pièce de monnaie 4 fois de suite revient au tirage successif avec remise de 4 boules dans une urne en contenant 2. On peut avoir trois fois Face suivi de Pile : ce résultat se traduit par (F,F,F,P) ou plus simplement FFFP si on n'utilise pas la notation de quadruplet.

b. Tirage successif sans remise

Dans des tirages successifs sans remise, on ne peut pas avoir répétition d'un même élément. Si une urne contient 3 boules B, J et R et si on tire 2 boules successivement sans remise, on peut avoir (B,J), (B,R), ... mais pas (B,B) ni (R,R) ni (J,J). Par exemple, le tiercé gagnant à l'arrivée d'une course de 17 chevaux correspond au tirage successif sans remise de 3 boules parmi 17.

2. Tirage de p boules ($p \geqslant 2$) simultanément dans une urne en contenant n

Un tirage de plusieurs éléments **simultanément** se traduit mathématiquement par une **partie**.

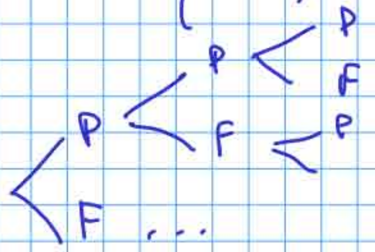
Ainsi, au tirage simultané des nombres 2, 5 et 8, on associe {2, 5, 8}.

Comme autre exemple, citons la sortie des 6 numéros gagnants du loto qui correspond au tirage simultané de 6 boules dans une urne en contenant 49.

Pour déterminer l'ensemble Ω lié à une expérience aléatoire, on pensera au modèle d'urne correspondant à la situation et on en déduira les résultats possibles.

Ex 31 page 209 .   3 fois 1 pièce

$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$



card $\Omega = 8$

2^3

$A = \{PPF, PFP, FPP\}$

$B = \{PPP, FFF\}$

$C = \{PPF, PPP, FPP, PFP\}$

$D = \{PFP, FPF\}$

$A \cap B$: « Face apparait une seule fois et les résultats sont identiques »

$A \cap B$: Impossible $A \cap B$ est vide $\emptyset$

$B \cap C$: « Pile apparait 3 fois ».

$\overline{B}$: « les 3 résultats sont $\neq$ ».

$\overline{C}$: « on a 0 ou 1 pile » $\overline{C} = \{FFF, FFP, FPF, PFF\}$

|| Le contraire de " au moins 2 " est " au plus 1 "

$x \geqslant 2$ $x < 2$

N° 33 page 209

- Montrons que $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

$x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ si et seulement si $(x \notin A$ et $x \notin B)$

$x \in \overline{A \cup B}$ ssi $x \notin A \cup B$

ssi $x \notin \{y \in \Omega, y \in A$ ou $y \in B\}$

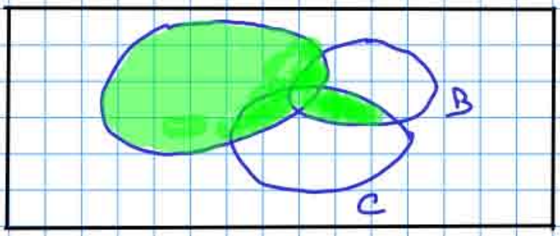
ssi $x \notin A$ et $x \notin B$.

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité)

$x \in A \cup (B \cap C)$ ssi $x \in A$ ou $(x \in B$ et $x \in C)$

ssi $(x \in A$ ou $x \in B)$ et $(x \in A$ ou $x \in C)$

ssi $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$



Ex 72 page 213

$\Omega = \{$flacon 1, flacon 2, ..., flacon 100$\}$

X

x_i	10%	20%	30%	40%	50%	Σ
$p(X=x_i)$	5/100	30/100	40/100	20/100	5/100	$= \frac{100}{100}$
	1/20	3/10	2/5	1/5	1/20	

A : « Tirer 1 flacon à 10% » card Ω = 100

équiprobabilité $\rightarrow$ $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{5}{100}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i \times p(X = x_i)$$

$$= \frac{10}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{20}{100} \times \frac{30}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{40}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{50}{100} \times \frac{5}{100}$$

$$= \boxed{29}$$

$E(X) = 29,2$ $\longrightarrow$ si on modifie les flacons dosés à 50% on en prend 54.

MODÈLES D'URNES

Une urne contient n boules

les expériences aléatoires possibles sont :

Tirages **successifs** de p boules parmi n

① Avec Remise (R, R, R) $_{1\ 2\ 3}$ 1^e 2^e 3^e

② Sans Remise (R, R, B) $_{1\ 2\ 3}$

TIERCE (3 parmi 17)

(R, B, R) est 1 issue ≠.

③ Tirages **simultanés** de p boules parmi n

B_B_B

LOTO (6 parmi 49)

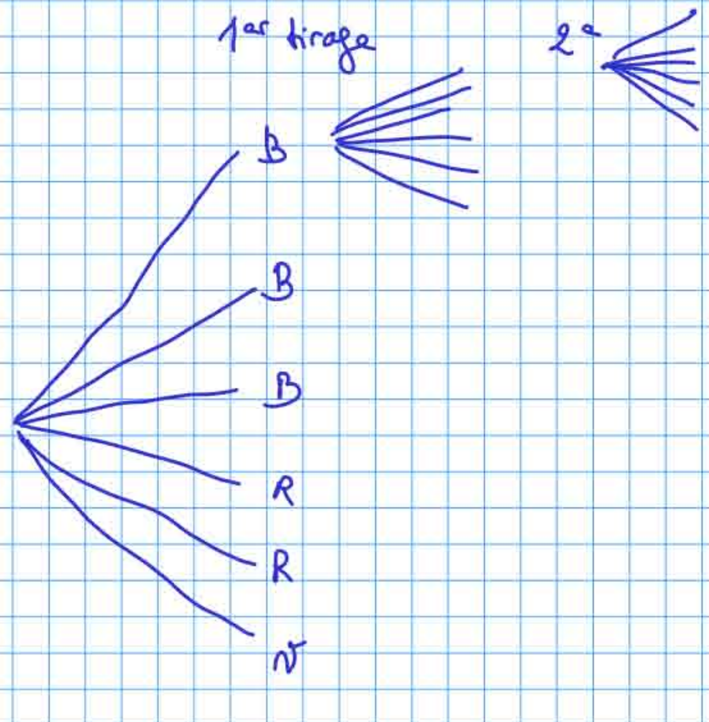
l'ordre n'intervient pas ds 1 tirage simultané

$p = 3$

L'urne contient : $\{3B, 2R, 1V\}$

6 boules dans mon urne.

1. Successif avec remise



$\text{Card }\Omega = 6^3$

216

2 - Tirage sans remise

triplet d'issues possibles

(couleur de la boule au 1er tirage, couleur 2e tir, Couleur 3e tir)

1ère coordonnée   2e coord.   3e coord

$\boxed{120} = \underset{\downarrow}{6} \times 5 \times 4$

3 - Tirage simultané

Coul 1 - Coul 2 - Coul 3

on compare au 1.

Coul 1 - Coul 3 - Coul 2

Coul 2 - Coul 1 - Coul 3

Coul 2 - Coul 3 - Coul 1

Coul 3 - Coul 1 - Coul 2

Coul 3 - Coul 2 - Coul 1

6 qui donnent le même résultat.

$$\text{card}\,\Omega = \frac{216}{6}$$

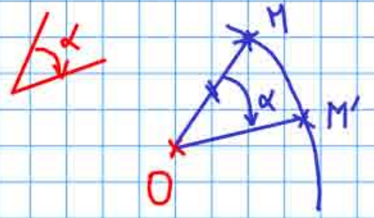
nbs obtenus ds l'exp^{ce} 1.

LES TRANSFORMATIONS DU PLAN ou DE L'ESPACE

I Les transformations à connaître.

$\mathcal{C}$: le plan ou l'espace

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ M & \longmapsto & M' = f(M) \end{array}$$

Nom de la transformation	Données	Définition	Schéma
– translation	Vecteur $\vec{u}$ $t_{\vec{u}}$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	
– symétrie centrale	Point O s_O	O milieu de [MM'] $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$	
– symétrie axiale	Droite Δ s_Δ	Δ est médiatrice de [MM'].	
– rotation	1 point O 1 angle α $r_{O,\alpha}$	$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$ et $OM = OM'$ cas particulier : • $\alpha = 0$ $Id_{\mathcal{C}}$ • $\alpha = \pi$ s_O	
– homothétie	1 point O 1 rapport d'homothétie $k \in \mathbb{R}$ $h_{O,k}$	$\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$ cas particulier • $k = 1$ $Id_{\mathcal{C}}$ • $k = -1$ s_O	

II Propriétés des transformations

1. Image d'un couple de points.

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$M \longmapsto M'$$
$$N \longmapsto N'$$

$t_{\vec{u}}$ $\quad s_O$ $\quad s_\Delta$ $\quad r_{O,\alpha}$ $\quad h_{O,k}$

1) Translation.
$t_{\vec{u}}$

$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}$

$= \cancel{-\vec{u}} + \overrightarrow{MN} + \cancel{\vec{u}}$

$\boxed{\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}}$

2) Symétrie centrale
s_O

$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{ON}$

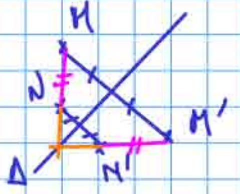
$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'}$

$= \overrightarrow{OM} + (-\overrightarrow{ON})$

$= \overrightarrow{NM}$

$\boxed{\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}}$

3) Symétrie axiale
s_Δ



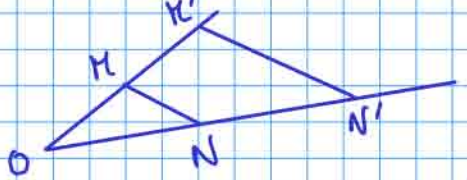
$M'N' = MN$
et (MN) et $(M'N')$ se coupent en 1 pt de Δ.

4) Rotation
$r_{O,\alpha}$

$(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{MN}) = \alpha$

$M'N' = MN$

5) homothétie
$h_{O,k}$



Configuration de Thalès

$\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{ON'} = k\,\overrightarrow{ON}$

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'}$

$= -k\,\overrightarrow{OM} + k\,\overrightarrow{ON}$

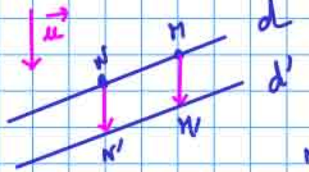
$= k\,(-\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = k\,\overrightarrow{MN}$

$\boxed{\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}}$

$M'N' = |k|.MN$

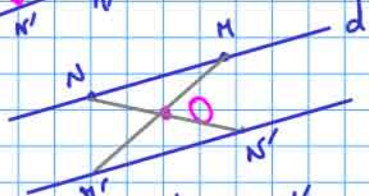
2. Image d'une droite.

1) Translation $t_{\vec{u}}$



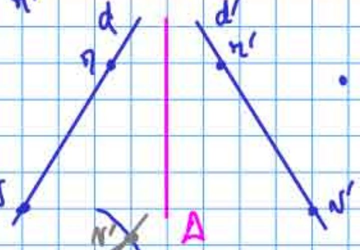
$d // d'$

2) Symétrie centrale s_O



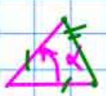
$d // d'$

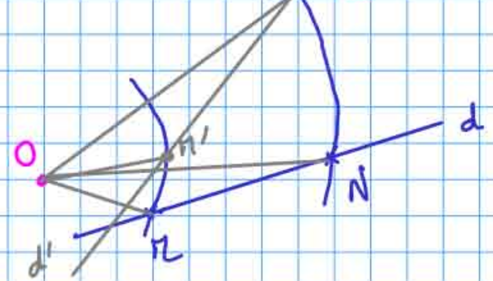
3) Symétrie axiale



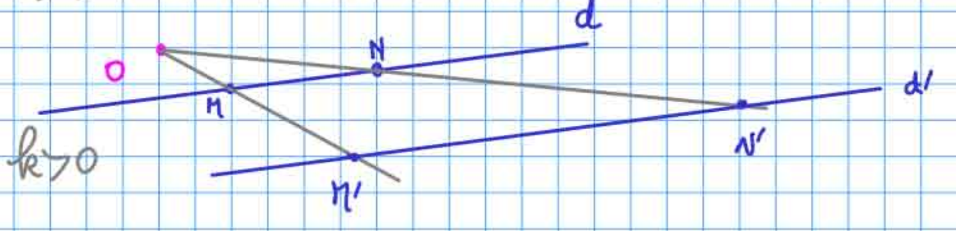
- si $d \not\parallel \Delta$
  $d \cap d' = \{I\}$
  avec $I \in \Delta$
- si $d // \Delta$ alors,
  $d' // \Delta$.

4) Rotation $r_{O,\alpha}$





5) Homothétie. $h_{O,k}$



3 - Conservation

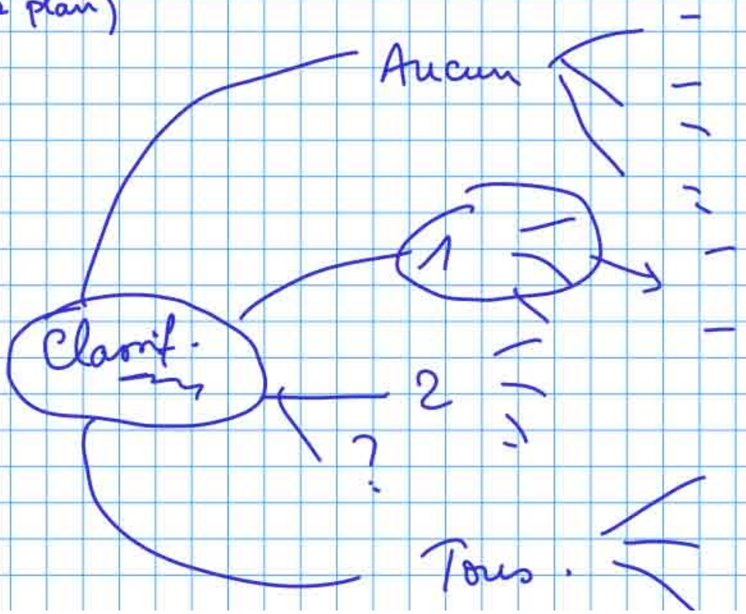
	Parallélisme	Distance	Alignement	Aires	Barycentre
$t_{\vec{u}}$	oui	oui	oui	oui	oui
s_O	oui	oui	oui	oui	oui
s_Δ	oui	oui	oui	oui	oui
$r_{O,\alpha}$ $\alpha \neq 0$ et π	oui	oui	oui	oui	oui
$h_{O,k}$ $k \neq 1$ et -1	oui	non $\times \lvert k \rvert$	oui	non $\times k^2$	oui

$|k|<1$ Réduction

$|k|>1$ Agrandiss^t

Ex 51 p379

4 - Classification des transformations par points invariants (dans le plan)



Ex 58 page 370.   Carré ABCD de centre O

- $r_{O,\alpha}$: $D \rightarrow C$, $F \rightarrow E$

1) $O \in \text{Med}\,[DC]$
2) $O \in \text{Med}\,[FE]$

conclusion

$\{O\} = \text{Med}_{[DC]} \cap \text{Med}_{[FE]}$

$r_{O,-\frac{\pi}{2}}$

- r : $B \rightarrow J$, $D \rightarrow E$

$\text{Med}_{[BJ]} \cap \text{Med}_{[DE]} = \{A\}$

$r_{A,\frac{\pi}{3}}$

ADE est 1 triangle équilatéral positif

Ex. 55 p 380

- translation $t_{\vec{AE}}$: $A \rightarrow E$, $B \rightarrow F$, $C \rightarrow G$, $D \rightarrow H$
- symétrie centrale   I milieu de [DF]

s_I : $A \rightarrow G$, $B \rightarrow H$, $C \rightarrow E$, $D \rightarrow F$

- symétrie axiale $\Delta = \text{Med}\,[DF]$

s_Δ : $A \rightarrow E$, $B \rightarrow H$, $C \rightarrow G$, $D \rightarrow F$

- Rotation $r_{\Omega,\alpha}$ $\alpha \neq 0$ et π.

1) r : G isobarycentre de ABCD $\longrightarrow$ G' isobarycentre EFGH.

Donc $\Omega \in \text{Med}\,[GG']$

Ex 72 p 213

d). X prend les valeurs correspondant au dosage des flacons en %.

$X = x_i$	10%	20%	30%	40%	50%
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{40}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{5}{100}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 10 \times \frac{5}{100} + 20 \times \frac{30}{100} + 30 \times \frac{40}{100} + 40 \times \frac{20}{100} + 50 \times \frac{5}{100}$$

$$= 29\ \%$$

Comment modifier le dosage d'1 flacon pour avoir $E(X) = 29{,}2\%$?

Par exemple le flacon à 20%, soit x son nouveau dosage:

$$10 \times \frac{5}{100} + x \times \frac{30}{100} + 30 \times \frac{40}{100} + 40 \times \frac{20}{100} + 50 \times \frac{5}{100} = 29{,}2$$

$$50 + 30x + \underbrace{1200 + 800}_{2000} + 250 = 2920$$

$$30x = 2920 - 2300$$

$$30x = 620$$

$$x = \frac{620}{30} \qquad \boxed{x = 20{,}67\%}$$

Exercice WIMS sur les probabilités

A et B sont 2 évènements incompatibles

$$A \cap B = \emptyset$$

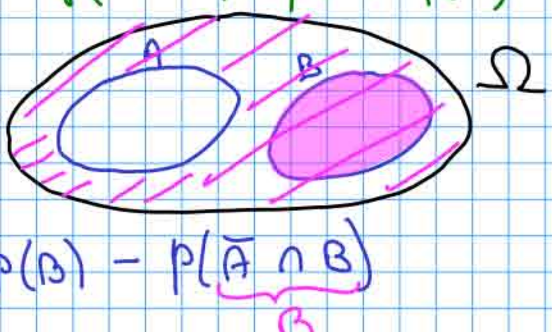
$p(A) = 0{,}02$ $\quad p(B) = 0{,}22$ $\quad$ Calculer $p(A \cap \bar{B})$

——— o ———

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Dans le cas d'évts incompatibles : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

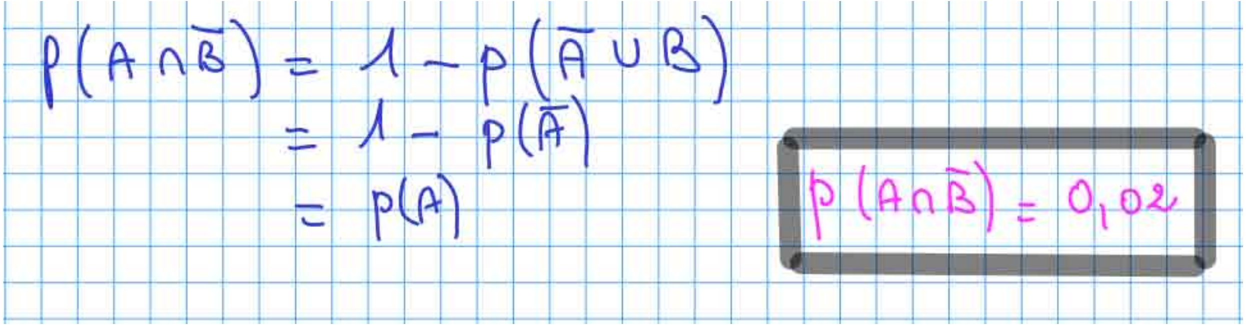
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$



$$\overline{A \cap \bar{B}} = \bar{A} \cup B$$

$$p(\bar{A} \cup B) = p(\bar{A}) + p(B) - p(\underbrace{\bar{A} \cap B}_{B})$$

$$= p(\bar{A})$$



$$p(A \cap \overline{B}) = 1 - p(\overline{A} \cup B)$$

$$= 1 - p(\overline{A})$$

$$= p(A)$$

$$\boxed{p(A \cap \overline{B}) = 0{,}02}$$

20100608-Probabilites2

Ex 61 p. 380

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M(x;y) & \longmapsto & M'(x+3\,;\,y-1) \end{array}$$

- Recherche d'éventuels points invariants :

M est 1 pt invariant ssi $M' = M$.

ssi $\begin{cases} x+3 = x \\ y-1 = y \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 3 = 0 \\ -1 = 0 \end{cases}$ c'est impossible.

Aucun pt invariant.

$\boxed{\text{Dc}}$ c'est 1 translation. $t_{\vec{u}}$

a) $A(2;-1)$ $\quad A'(2+3\,;\,-1-1)$ $\quad A'(5;-2)$

$B(-1;3)$ $\quad B'(-1+3\,;\,3-1)$ $\quad B'(2;2)$

$\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ $\quad \vec{u}(3\,;-1)$ $\quad t_{\vec{u}(3;-1)}$

c) $\overrightarrow{MM'}(x+3-x\,;\,y-1-y)$

$\overrightarrow{MM'}(3\,;-1)$ $\quad \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ $\quad \forall M \in \mathcal{P}$

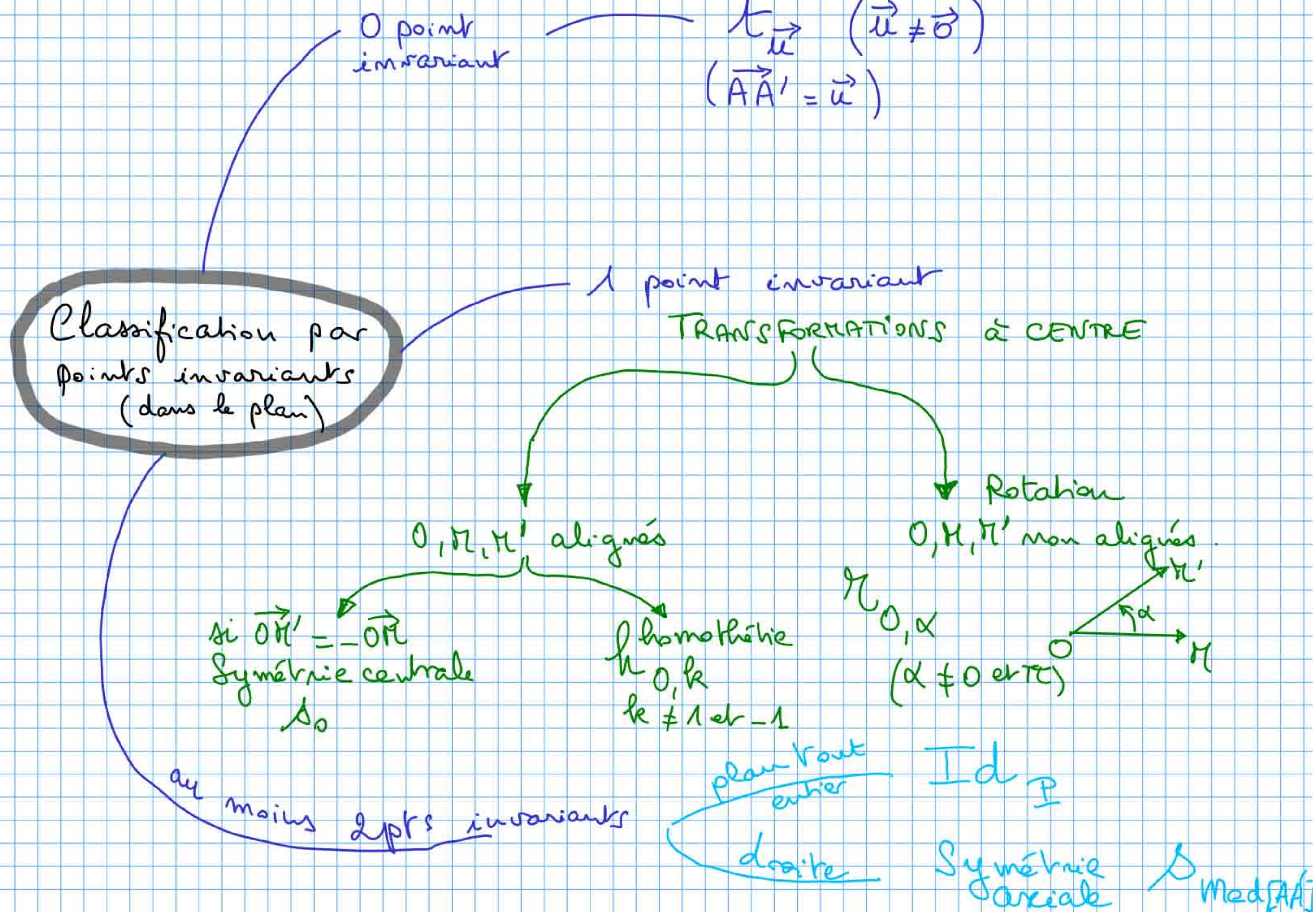
(c'est bien 1 translation)

Ex 62 page 380 $\quad f : M(x,y) \mapsto M'(-x+1\,;\,-y-1)$

Charchons s'il existe Ω tq $f(\Omega) = \Omega$.

$\boxed{s_\Omega}$ $\Omega(x_\Omega\,;\,y_\Omega)$ vérifie s'il existe : $\begin{cases} -x_\Omega + 1 = x_\Omega \\ -y_\Omega - 1 = y_\Omega \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_\Omega = 1 \\ 2y_\Omega = -1 \end{cases}$

$\Omega\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$ $\quad \underset{=\vec{0}\,.}{\overrightarrow{\Omega M'} + \overrightarrow{\Omega M}}$ $\quad \left(\left(-x+1-\frac{1}{2}\right) + \left(x-\frac{1}{2}\right)\,;\,\left(-y-1+\frac{1}{2}\right) + \left(y+\frac{1}{2}\right)\right)$



Classification par points invariants (dans le plan)

0 point invariant — $t_{\vec{u}}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$ $(\overrightarrow{AA'} = \vec{u})$

1 point invariant

TRANSFORMATIONS à CENTRE

O, M, M' alignés

si $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ Symétrie centrale s_O

homothétie $h_{O,k}$ $k \neq 1$ et -1

Rotation

O, M, M' non alignés

$r_{O,\alpha}$ $(\alpha \neq 0$ et $\pi)$

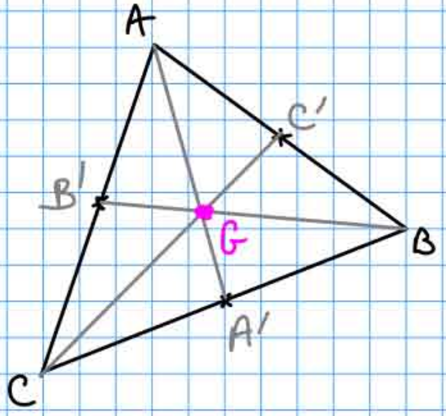
au moins 2 pts invariants

plan tout entier — Id_{P}

droite — Symétrie axiale $s_{med[AA']}$

Ex 38 page 378

	Ω	k	M	M'	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$
1	A	2	B'		
2	B			G	
3	A'		A		
4			A	B	
5	B			A'	
6			B'	B	
7	C			C'	
8	G		C		
9			G	A	



20100608-Transformations8