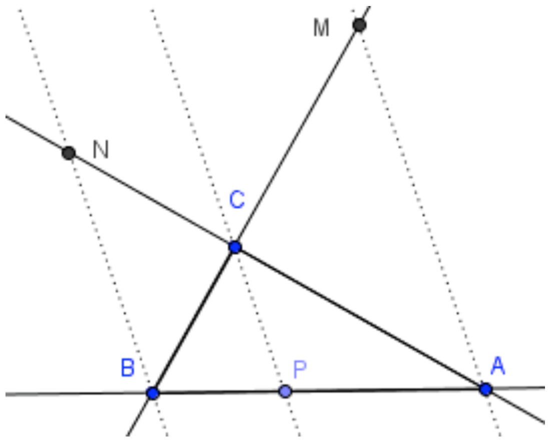
ABC est un triangle, M, N et P des points respectivement situés sur les droites (BC), (CA) et (AB), et distincts des sommets A, B, C. On note α, β, γ les réels tels que : $\overrightarrow{MB} = \alpha.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = \beta.\overrightarrow{NA}$ et $\overrightarrow{PA} = \gamma.\overrightarrow{PB}$.

Le but du problème est de démontrer l'observation faite en en TP informatique :

« Les droites (AM), (BN) et (CP) sont concourantes ou parallèles deux à deux si et seulement si ……………… »

(Le théorème ainsi établi est connu sous le nom de théorème de Ceva (1648-1734)

A. On suppose que les droites (AM), (BN) et (CP) sont parallèles.



On suppose que les droites (AM), (BN) et (CP) sont parallèles.

1.

a. À partir de la relation $\overrightarrow{PA} = \gamma.\overrightarrow{PB}$, exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AP}$.

b. En utilisant la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle ABM, trouver une autre relation entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$.

c. Déduire des questions précédentes que : $\alpha = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma}$.

2.

a. À partir de la relation $\overrightarrow{PA} = \gamma.\overrightarrow{PB}$, exprimer $\overrightarrow{BP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

b. En utilisant la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle ABN, trouver une relation entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP}$.

c. Déduire des questions précédentes que : $\beta = \dfrac{1}{1 - \gamma}$.

3. Déduire des questions précédentes que : Si les droites (AM) , (BN) et (CP) sont parallèles alors $\alpha\beta\gamma = -1$.

B. On suppose que les droites (AM) , (BN) et (CP) sont concourantes.

On note G leur point d'intersection.

Soient a, b et c des réels tels que G soit le barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c) (on notera que d'après l'énoncé les réels a, b, c, a + b, a + c et b + c ne sont pas nuls).

1. Soit P' le barycentre de (A, a) et (B, b).

a. Démontrer que P' appartient à la droite (GC).

b. En déduire que P' = P.

2. Exprimer P comme barycentre de A et de B.

3. Déduire des questions précédentes que $\gamma = -\dfrac{b}{a}$.

4. On admet que par des raisonnements analogues on peut démontrer que : $\alpha = -\dfrac{c}{b}$ et $\beta = -\dfrac{a}{c}$. En déduire que $\alpha\beta\gamma = -1$.

C. **<u>On suppose que $\alpha\beta\gamma = -1$.</u>**

Si les droites (AM), (BN) et (CP) ne sont pas parallèles deux à deux, il en existe au moins deux sécantes.

Supposons, par exemple, que (AM) et (CP) soient sécantes en un point G. On note a, b et c des réels tels que G soit le barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c).

1. En procédant comme dans la partie B on démontre qu'alors : $\alpha = -\frac{c}{b}$ et $\gamma = -\frac{b}{a}$.

a. Démontrer que : $\beta = -\frac{a}{c}$.

b. En déduire que G est le barycentre de (A ; $-\beta$) , (B ; $-\frac{1}{\alpha}$) et (C ; 1).

2. À partir de la relation $\overrightarrow{NC} = \beta.\overrightarrow{NA}$, exprimer N comme barycentre de A et C.

3. Déduire des questions précédentes que la droite (BN) passe aussi par G. Que peut-on dire des droites (AM), (BN) et (CP) ?

D. **<u>Une application du théorème de Ceva.</u>**

Utiliser ce théorème pour démontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.