

## Devoir à la maison

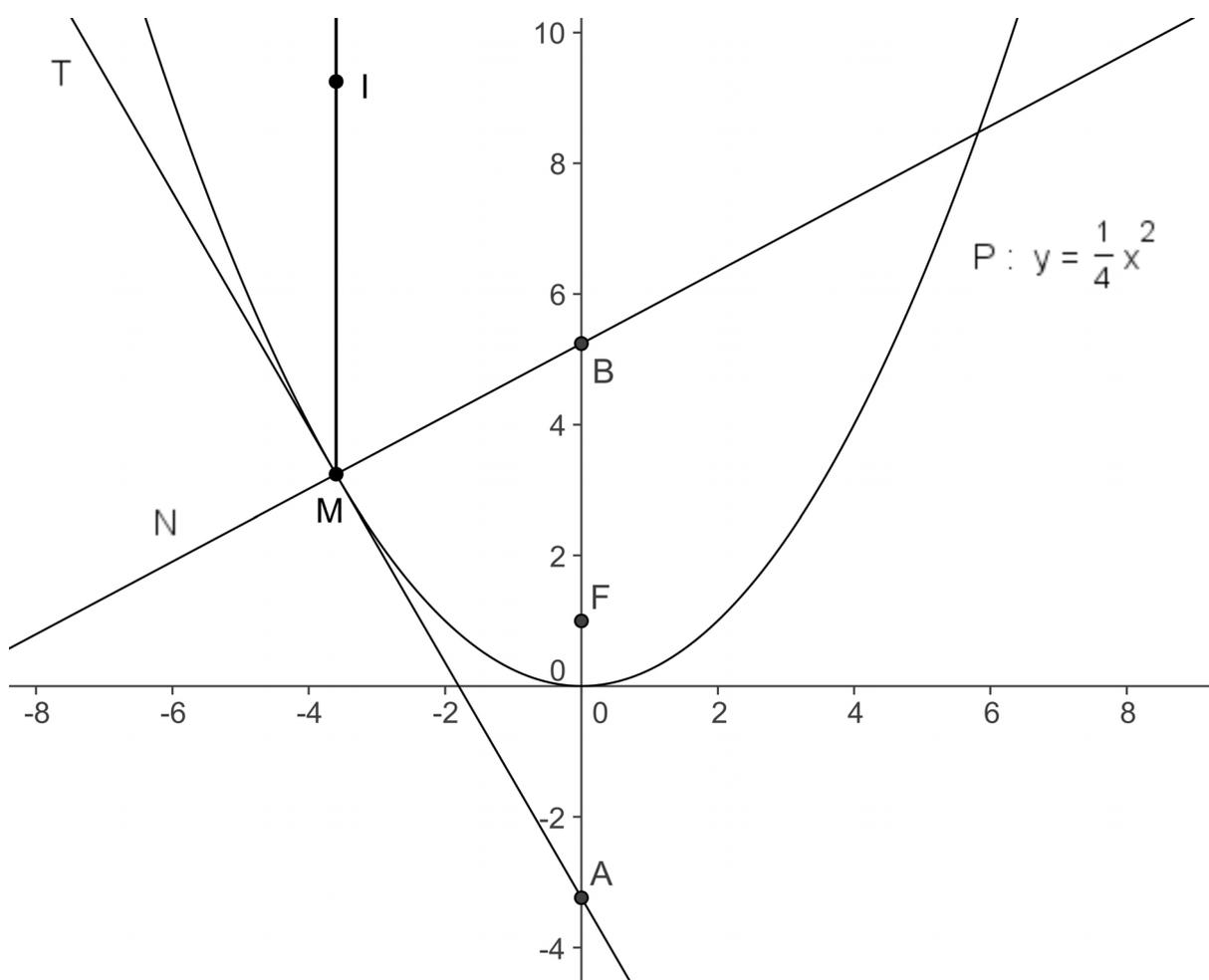
Ce devoir fait suite au TP « Trajectoire d'un rayon lumineux réfléchi par un réflecteur parabolique ».

Le but est de prouver la conjecture sur les rayons réfléchis émise à la fin du TP.

Rappels des données :

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  $P$  est la parabole d'équation  $y = \frac{1}{4}x^2$ ,  $M$  est un point de  $P$ ,  $T$  et  $N$  sont respectivement la tangente au point  $M$  et la normale à  $P$  en  $M$ .

Un rayon incident  $(IM)$  parallèle à l'axe de symétrie de  $P$  se réfléchit en un rayon  $(MR)$  symétrique de  $(IM)$  par rapport à  $N$ ,



### I. Foyer de la parabole $P$

On considère les points  $A$  et  $B$  d'abscisses  $0$ , respectivement des droites  $T$  et  $N$ .

Par construction le triangle  $MAB$  est rectangle en  $M$ . Soit  $F$  le milieu de son hypoténuse.

1. Montrer que les droites  $(MF)$  et  $(IM)$  sont symétriques par rapport à  $N$ . En déduire que  $(MR)$  passe par  $F$ .

2. Soit  $k$  l'abscisse d'un point  $M$  de  $P$  distinct de l'origine du repère.

Déterminer en fonction de  $k$  :

- une équation de la droite  $T$

- une équation de la droite  $N$

En déduire que  $F$  ne dépend pas de la position du point  $M$ .

3. Conclure.

## II. Directrice de la parabole $P$

1. a. Soit  $k$  l'abscisse d'un point  $M$  de  $P$  et  $H$  le point de coordonnées  $(k; -1)$ .

Démontrer que  $H$  est le symétrique de  $F$  par rapport à la droite  $T$ .

b. En déduire que le lieu des symétriques de  $F$  par rapport à la droite  $T$  lorsque  $M$  décrit  $P$  est la droite  $\Delta$  d'équation  $y = -1$ .

2. a. En remarquant que  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\Delta$ , démontrer que pour tout point  $M$  de  $P$ , on a :  $MF = MH$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\Delta$ .

b. Réciproquement, on suppose que  $MF = MH$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\Delta$ . Démontrer que  $M$  est un point de  $P$ .

La parabole  $P$  est donc l'ensemble des points  $M$  tel  $MF = MH$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\Delta$ . On dit que  $F$  et  $\Delta$  sont respectivement le foyer et la directrice de  $P$ .