

CONIQUES ET CARDIOÏDES DEUX THEMES A EXPLOITER SUR TOUTE L'ANNEE DE SIXIEME.

Parler des coniques ou de la cardioïde en sixième, cela paraît surprenant. Et pourtant non seulement c'est possible, mais en plus on peut en parler à diverses occasions selon la notion abordée, cela surprend et passionne les élèves.

Je présente ici, quelques activités que je pratique depuis des années avec mes élèves de sixième. Certaines de ces activités peuvent être réutilisées en quatrième avec la notion de distance d'un point à une droite par exemple.

Les évaluations nationales nous montrent bien qu'arrivés en sixième beaucoup d'élèves confondent les mots « parallèles » et « perpendiculaires ». Ils ne maîtrisent pas encore le maniement de l'équerre, ne comprennent pas une phrase du genre « tracer la droite h perpendiculaire à la droite d au point M », confondent l'expression « le point M est sur la droite f » avec l'expression « le point M est au-dessus de la droite f », ne distinguent pas le point de son nom qui est marqué juste à côté, etc.

Les activités ci-après, outre le fait de participer à la culture générale des apprenants, présentent l'intérêt de les aider à continuer leur apprentissage du maniement des outils et du vocabulaire, cela dans le plaisir. En effet, le même geste est répété beaucoup de fois sans que ce soit mal vécu et les élèves ont la surprise de voir réapparaître une figure déjà vue à l'occasion de différents chapitres. Autre avantage, les élèves ont intérêt à prendre soin de leur matériel et à fournir un travail soigné s'ils veulent obtenir un joli résultat. Pour finir, certaines de ces activités se prêtent bien à l'utilisation de cabri géomètre, là encore les élèves sont surpris et veulent tous imprimer la figure obtenue.

D'autre part, cette année scolaire 2004-2005 j'ai assuré le suivi d'une jeune collègue stagiaire Melle Virginie MOREL, qui a bien voulu exposer ce qu'elle a expérimenté sur ces thèmes dans sa classe. (Lire page 24)

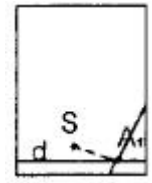
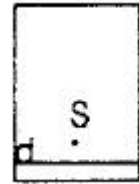
JEAN-DANIEL NOURBY

DES CONIQUES POUR TRACER DES PERPENDICULAIRES

I- LA PARABOLE.

- Trace une droite d en bas de ta feuille.
- A 2cm au dessus de d , dans l'axe de la feuille, marque un point S .
- Marque un point A_1 sur la droite d .
- Trace en trait léger le segment $[SA_1]$.
- Trace la perpendiculaire au segment $[SA_1]$ en A_1 .
- Recommence les étapes c) d) et e) beaucoup de fois, appelle les points A_2, A_3, A_4, \dots , jusqu'à ce que tu vois apparaître une forme "harmonieuse" qui est appelée parabole.

Voir une production d'élève page 11, la parabole avec des perpendiculaires.



II- L'ELLIPSE.

- Trace un cercle de centre O et de rayon $R = 8$ cm.
- Place un point S tel que $OS = 5$ cm.
- Prends un point A_1 sur le cercle.
- Joins en pointillés les points S et A_1 .
- Trace la perpendiculaire au segment $[SA_1]$ en A_1 .
- Reprends les étapes c) d) et e) beaucoup de fois, appelle les points A_2, A_3, \dots , jusqu'à ce que tu vois apparaître une forme "harmonieuse" qui est appelée ellipse.

Voir une production d'élève page 10, l'ellipse avec des perpendiculaires.



III- L'HYPERBOLE

- Trace un cercle de rayon 3 cm au centre de ta feuille.
- Marque un point S à l'extérieur du cercle (pas trop loin).
- Marque un point A_1 sur le cercle.
- Trace d'un trait léger, le segment $[SA_1]$.

e) Trace la droite perpendiculaire à $[SA_1]$ en A_1 .

f) Recommence les tracés effectués pour A_1 avec de nombreux points A_2, A_3, A_4 , etc. choisis sur le cercle jusqu'à ce que tu vois apparaître une forme "harmonieuse" appelée hyperbole.

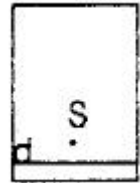
[Voir une production d'élève page 13, l'hyperbole avec des perpendiculaires.](#)

DES CONIQUES AVEC DES CERCLES

I- LA PARABOLE AVEC DES PARALLELES ET DES CERCLES.

(La parabole vue comme un ensemble de point situés à égale distance d'un point et d'une droite) .

- Placer une droite d et un point S comme sur la figure ci-contre. S est à 1,5 cm de d .
- Au dessus de d , tracer des droites parallèles à d régulièrement espacées de 2 cm jusqu'en haut de la feuille.
- Appeler la première droite en bas f_1 , la deuxième f_2 etc. (f_1 est à 2cm de d , f_2 est à 4 cm de d etc.)
- Tracer le cercle C_1 de centre S et de rayon 2cm. Il coupe la droite f_1 en deux points que l'on marquera en rouge.
- Tracer le cercle C_2 de centre S et de rayon 4 cm. Il coupe la droite f_1 en deux points que l'on marquera en rouge.
- Continuer ainsi pour les droites f_3, f_4 , etc. On obtient une série de points qui sont disposés suivant une ligne appelée parabole.
- Pour obtenir le point où cette ligne touche la droite d , on tracera le cercle de centre S et de rayon 1,5 cm.



[Voir une production d'élève page 12, la parabole avec des parallèles](#)

II- L'ELLIPSE ET LES TRIANGLES.

Etant donnés deux points A et B distants de 5 cm, on veut construire point M de façon que le périmètre du triangle ABM soit égal à 12 cm.

On demande aux élèves de proposer chacun une solution.

Ils se rendent compte qu'il y a beaucoup de solutions au problème posé.

Eventuellement on remplira un tableau du genre :

AB en cm	AM en cm	BM en cm	Périmètre du triangle en cm
5	4	3	12
5	2,6	4,4	12

Les points A et B sont marqués au tableau et chacun vient construire «son point M ». On remarque les points obtenus sont disposés suivant une ligne qui est appelée ellipse. Chaque élève complète ensuite sa figure en utilisant ce que les autres auront proposé.

III- L'ELLIPSE AVEC DES CERCLES.

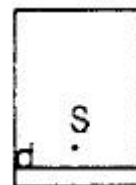
- Placer une feuille dans le sens « paysage ».
- Sur l'axe horizontal de la feuille, placer deux points A et B distants de 13 cm.
- Tracer des cercles de centre A de rayons 0,5 cm, 1cm, 1,5 cm, ..., 15cm.
- Faire de même pour le point B .
- Colorier de façon à faire apparaître la forme d'une ellipse. (Si nécessaire, en projeter l'image pour que les élèves voient comment colorier).

[Voir une production d'élève page 14, l'ellipse avec des cercles](#)

DES CONIQUES AVEC DES MEDIATRICES

I- LA PARABOLE AVEC DES MEDIATRICES.

- Trace une droite d en bas de ta feuille.
- A 2cm au dessus de d , dans l'axe de la feuille, marque un point S ,
- Marque un point A_1 sur la droite d .
- Trace en trait léger le segment $[SA_1]$.
- Construis la médiatrice du segment $[SA_1]$.
- Recommence les étapes c) d) et e) beaucoup de fois, appelle les points A_2, A_3, A_4, \dots , jusqu'à ce que tu vois apparaître une forme "harmonieuse" qui est appelée parabole.



II- L'ELLIPSE AVEC DES MEDIATRICES.

- Marquer deux points E et G distants de 4 cm.
- Tracer le cercle C de centre E de rayon 6 cm.
- Marquer un point M_1 sur le cercle C .
- Tracer le segment $[GM_1]$.
- Construire la médiatrice de $[GM_1]$.
- Tracer le segment $[EM_1]$. Il coupe la médiatrice de $[GM_1]$ en un point que l'on marquera en rouge.
- Recommencer les étapes c) , d) , e) et f) beaucoup de fois. On obtient des points disposés suivant une ligne appelée ellipse.

[Voir une production d'élève page 18, l'ellipse avec des médiatrices](#)

CONSTRUCTIONS DE CONIQUES AVEC DES PLIAGES.

I- LA PARABOLE.

- a) Vers le centre d'une feuille de papier calque, marque un point R.
- b) Trace une droite (f), parallèle au grand côté de la feuille, à environ 6 cm du bord. Cette droite ne passe pas par R. Tous les centimètres, marque sur la droite (f) des points régulièrement espacés. Tu appelleras ces points $B_1, B_2, B_3 \dots$ etc.
- c) En soulevant la feuille de papier, fais coïncider le point R avec B_1 , puis marque le pli avec le papier calque.
- d) Recommence ainsi avec tous les points (B_2, B_3, \dots etc.) que tu as marqués sur la droite (f).

II- L'ELLIPSE

- a) Sur une feuille de papier calque, trace un cercle C de centre T, de rayon 9 cm. Marque un point R tel que la distance de T à R soit 5 cm.
- b) Partage ce cercle en 32 parties égales. Tu obtiens 32 points sur le cercle C . Appelle tous ces points $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{31}, B_{32}$.
- c) En soulevant ta feuille de papier calque, fais coïncider le point R avec le point B_1 , puis marque le pli avec le papier calque.
- d) Recommence en faisant coïncider le point R avec le point B_2 . Lorsque R est sur B_2 , marque le pli avec le papier calque.
- e) Recommence en faisant coïncider le point R avec le point B_3 , puis le point B_4, \dots puis le point B_{32} .

III- L'HYPERBOLE

- a) Sur une feuille de papier calque trace un cercle C de centre A, de rayon 3,5 cm.
- b) Marque un point R tel que la distance de A à R soit 6 cm.
- c) Divise le cercle en 32 parties égales. Tu obtiens 32 points sur le cercle C . Tu appelleras ces points $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{31}, B_{32}$.
- d) En soulevant la feuille de papier, fais coïncider le point R avec le point B_1 , puis marque le pli avec le papier calque.
- e) Recommence en faisant coïncider le point R avec le point B_2 . Lorsque R est sur B_2 , marque le pli avec le papier calque,
- f) Recommence en faisant coïncider le point R avec le point B_3 , puis le point B_4, \dots puis le point B_{32} .

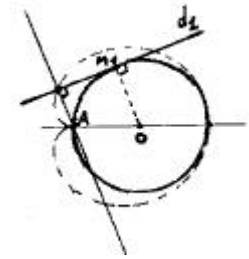
[Voir une production d'élève page 19, l'hyperbole par pliages d'un papier calque](#)

LA CARDIOÏDE, UN THEME QUI PEUT ÊTRE RECURRENT EN SIXIEME

I- LA CARDIOÏDE ET LE TRACE DE PERPENDICULAIRES.

(La cardioïde vue comme podaire d'un cercle relativement à l'un de ses points)

- 1) Tracer un cercle C de centre O et de rayon 3 cm.
- 2) Tracer une droite passant par O .
Cette droite coupe le cercle C en deux points. Appeler A l'un d'eux.
- 3) Tracer en trait léger un rayon $[OM_1]$ du cercle C .
- 4) Tracer la perpendiculaire d_1 à $[OM_1]$ en M_1 .
- 5) Tracer la perpendiculaire à d_1 passant par A .
Elle coupe d_1 en un point que l'on marquera en rouge
- 6) Recommencer les étapes 3), 4) et 5).



Appeler $[OM_2]$ le rayon. Arrivé en 5), on obtient un deuxième point marqué en rouge.

7) En recommençant les étapes 3), 4) et 5) beaucoup de fois, on voit apparaître une forme appelée cardioïde.

(Ce même exercice peut être exploité en quatrième avec la notion de tangente à un cercle en l'un de ses points).

II-LA CARDIOÏDE ET LA NOTION DE DISTANCE PAR RAPPORT A UN POINT.

(La cardioïde vue comme la conchoïde d'un cercle).

- 1) Tracer un cercle C de rayon 4 cm.
 - 2) Choisir un point O sur le cercle C .
 - 3) Tracer une droite d_1 passant par O et recoupant le cercle C en A_1 .
 - 4) Le double de 4 est 8. De part et d'autre de A_1 , sur la droite d_1 , placer en couleur, les points M_1 et N_1 à la distance 8cm du point A_1 . M_1 et N_1 sont deux points de la cardioïde.
 - 5) En traçant d'autres droites d_2, d_3, \dots passant par O , on obtient d'autres points $M_2, N_2, M_3, N_3, \dots$ situés toujours à 8 cm de A_2, A_3, \dots
- Au bout d'un certain nombre de points, apparaîtra une forme "harmonieuse" appelée cardioïde.

III- LA CARDIOÏDE ET LES CERCLES.

(La cardioïde vue comme enveloppe d'une famille de cercles).

- a) Tracer un cercle C de centre S et de diamètre 6 cm.
- b) Choisir un point O sur le cercle C .
- c) Choisir un point M_1 (différent de O) sur le cercle C .
- d) Tracer le cercle de centre M_1 passant par O .
- e) Recommencer les étapes c) et d) beaucoup de fois avec des points M_2, M_3, \dots
- f) Au bout d'un certains nombre de cercles, on voit apparaître un forme "harmonieuse" appelée cardioïde.

[Voir une production d'élève page 15, la cardioïde avec des cercles](#)

[Voir une production d'élève page 16, la cardioïde avec des cercles](#)

IV- LA CARDIOÏDE ET LES ANGLES.

(La cardioïde vue comme caustique d'un cercle pour des rayons issus d'un point du cercle)

Un point O étant choisi sur un cercle C , imaginer des rayons lumineux issus de O qui sont réfléchis sur le cercle. (Le « rayon » incident touche le cercle en un point. L'angle que fait le « rayon incident » avec le rayon du cercle en ce point est égal à l'angle que fait le « rayon » réfléchi avec le rayon du cercle).

(On peut aussi utiliser l'image de la boule de billard.)

LA CARDIOÏDE, UN THEME QUI PEUT ÊTRE RECURRENT EN SIXIEME (suite)




V- LA CARDIOÏDE A PARTIR DES CORDES D'UN CERCLE.

(On utilise la notion de double d'un nombre, les angles)





- a) Dessiner un cercle de 16 cm de diamètre, puis le partager en 36 arcs de cercle de même longueur.
- b) Numéroter les points obtenus de 1 à 36 en tournant dans un sens en utilisant un stylo vert.
- c) Numéroter les points obtenus de 1 à 36 en tournant dans l'autre sens en partant du point 35 et en utilisant un stylo rouge.
- d) En n'utilisant que les numéros vert, joindre le point 1 au point 2, le point 2 au point 4, le point 3 au point 6, etc. (on double le numéro).
- e) Recommencer avec les numéros rouges (on joint le point 1 au point 2, le point 2 au point 4, etc.)

[Voir une production d'élève page 17, la cardioïde à partir des cordes d'un cercle](#)

AVEC CABRI GEOMETRE

- Exercice 1 :**
- a) Tracer un cercle de 2,5 cm de rayon. 
 - b) Placer un point sur ce cercle. 
 - c) Nommer ce point O. 
 - d) Placer un autre point (qu'on appellera M1) sur le cercle.
 - e) Tracer le cercle de centre M1 passant par O.
 - f) Recommencer les étapes c) et d) beaucoup de fois.
 - e) Au bout d'un nombre de fois suffisant, il apparaît une forme harmonieuse appelée **cardioïde**.





[Voir la cardioïde avec cabri géomètre.](#)

- Exercice 2 :**
- a) Tracer un cercle  C de centre O et de rayon 5 cm.
 - b) Placer un point F  à l'intérieur du cercle C.
 - c) Placer un point M₁  sur le cercle C.
 - d) Tracer la droite perpendiculaire  à [FM₁] en M₁.
 - e) Recommencer les étapes c) et d) beaucoup de fois.
 - f) Au bout d'un nombre de fois suffisant, il apparaît une forme harmonieuse appelée **ellipse**.

[Voir page 21, l'ellipse avec cabri géomètre.](#)

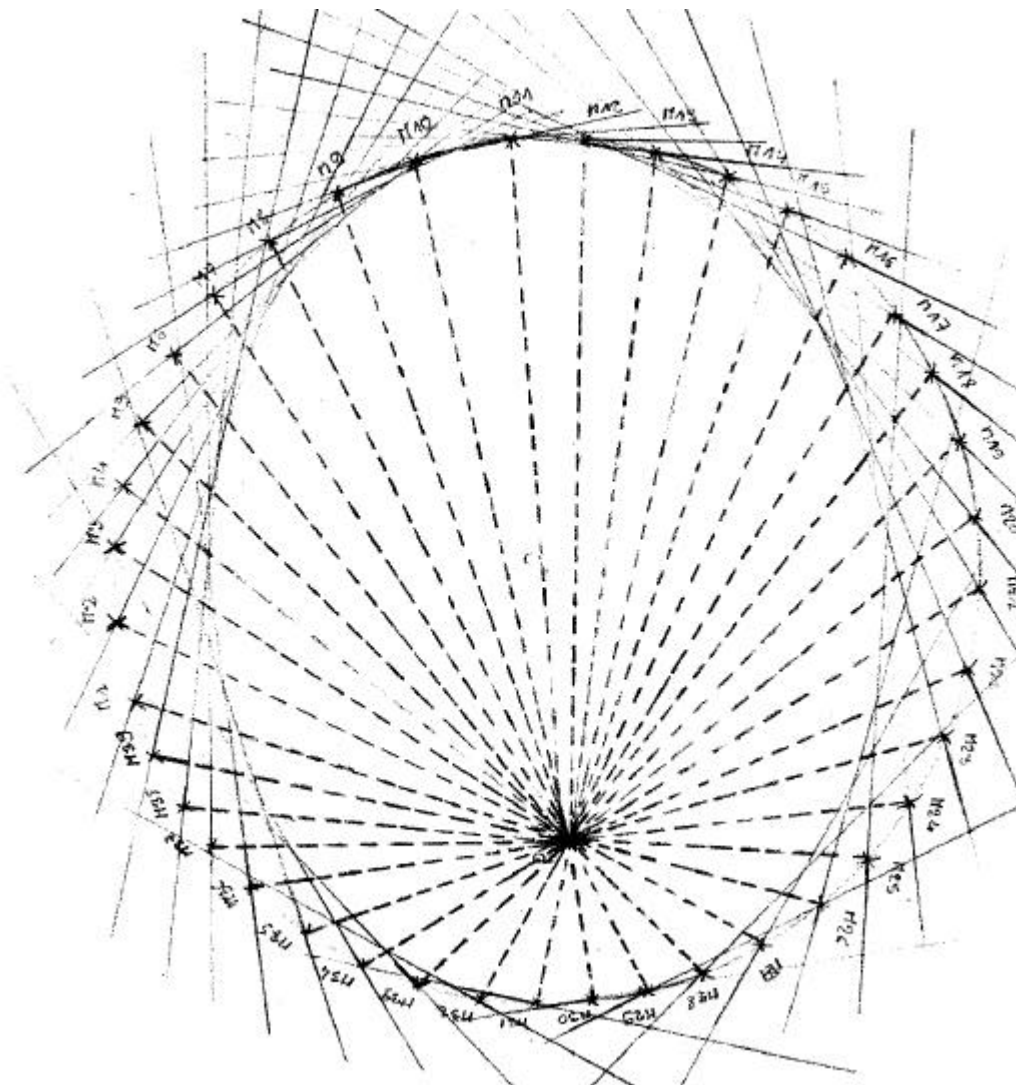
- Exercice 3 :**
- a) Tracer une droite d parallèlement au bord inférieur de la feuille.
 - b) Placer un point F au dessus de cette droite à environ 1 cm et dans l'axe vertical de la feuille.
 - c) Placer un point M1 sur la droite d.
 - d) Tracer le segment [FM₁].
 - e) Tracer la perpendiculaire à [FM₁] en M₁.
 - f) Recommencer les étapes d) et e) beaucoup de fois.
 - g) Au bout d'un nombre de fois suffisant, il apparaît une forme harmonieuse appelée **parabole**.

[Voir page 22, la parabole avec cabri géomètre.](#)

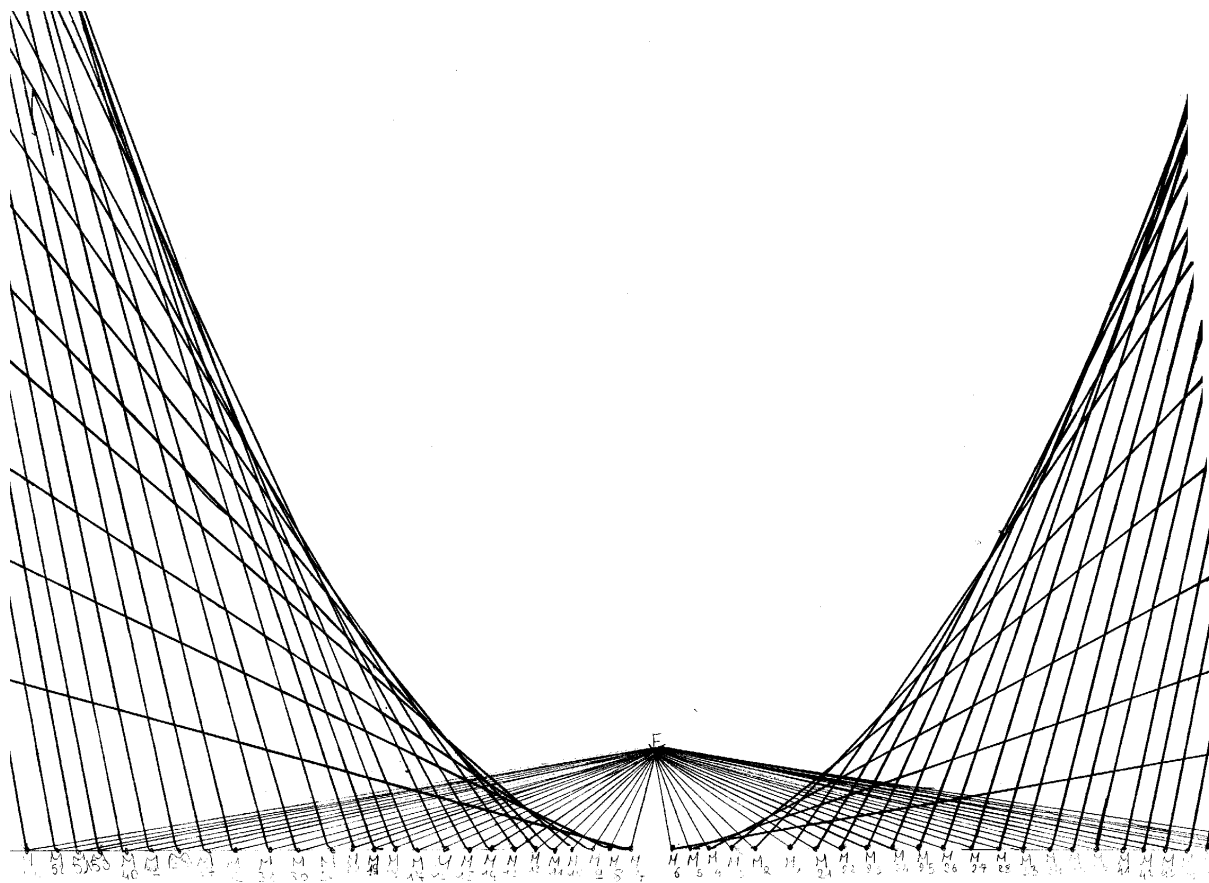
- Exercice 4 :**
- a) Tracer un cercle  C de centre O et de rayon 3 cm.
 - b) Placer un point F  à l'extérieur du cercle C.
 - c) Placer un point M₁  sur le cercle C.
 - d) Tracer la droite perpendiculaire  à [FM₁] en M₁.
 - e) Recommencer les étapes c) et d) beaucoup de fois.
 - f) Au bout d'un nombre de fois suffisant, il apparaît une forme harmonieuse appelée **hyperbole**.

[Voir page 23 l'hyperbole avec cabri géomètre.](#)

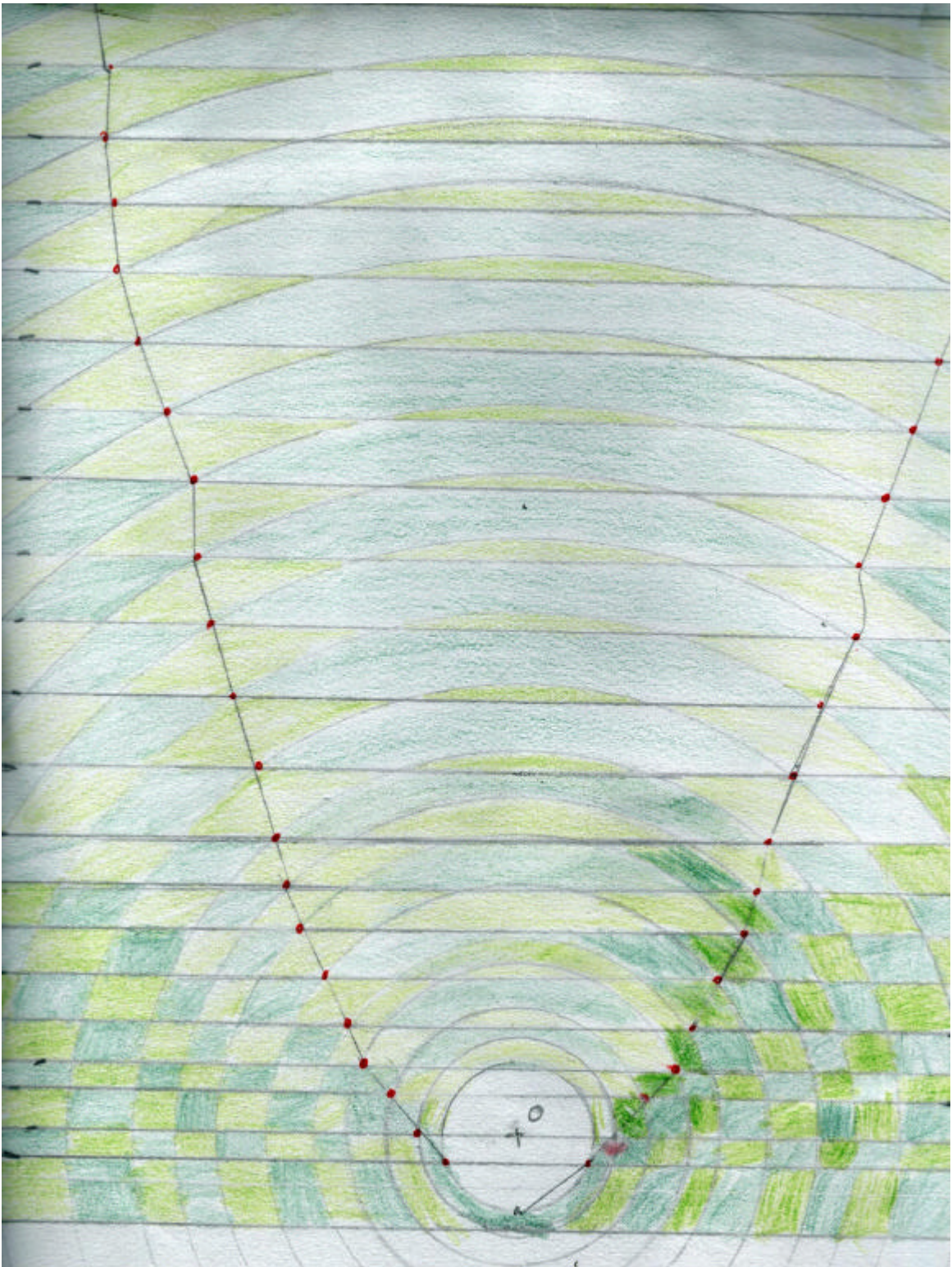
L'ellipse avec des perpendiculaires : production d'élève.



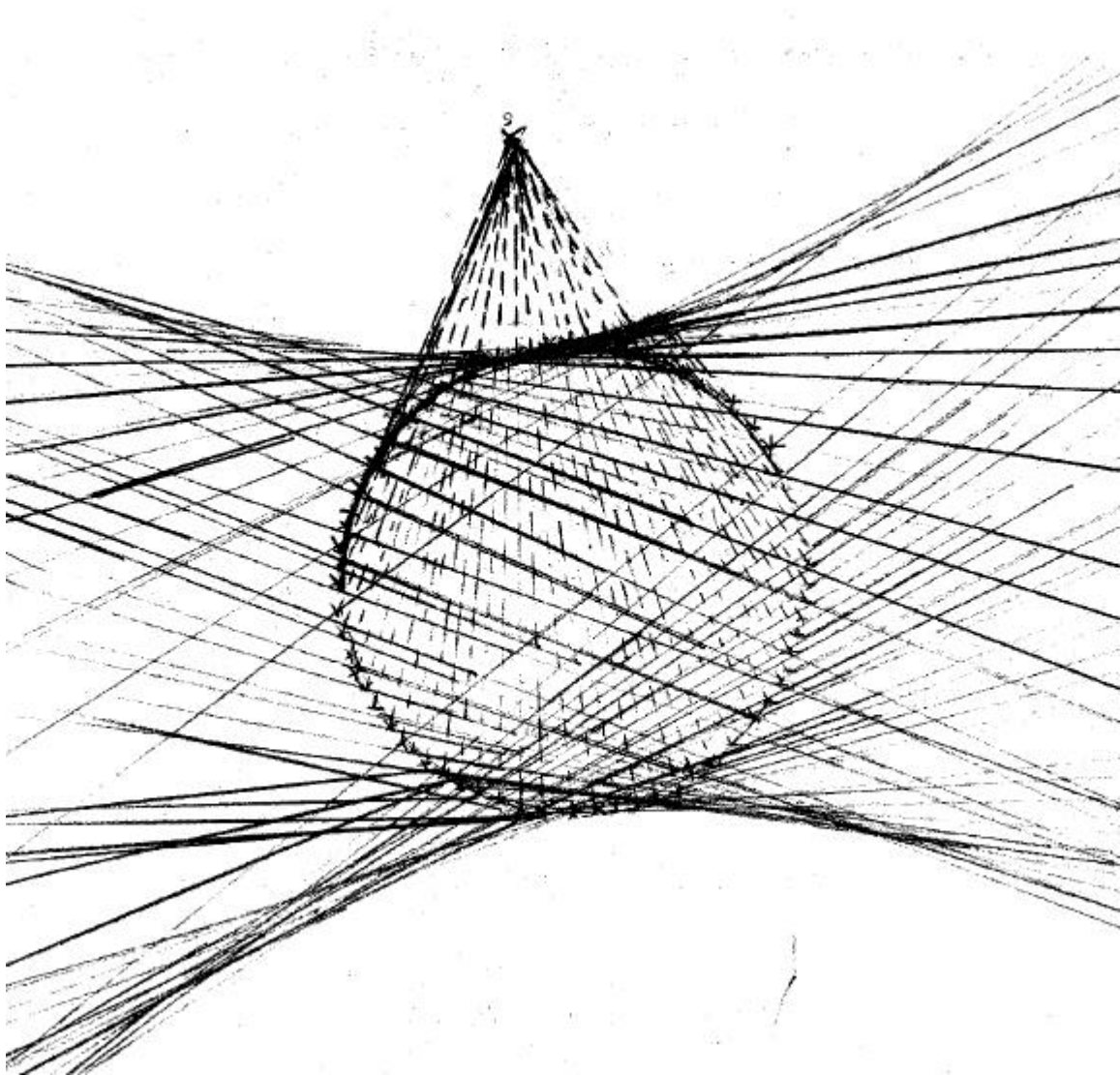
La parabole avec des perpendiculaires : production d'élève.



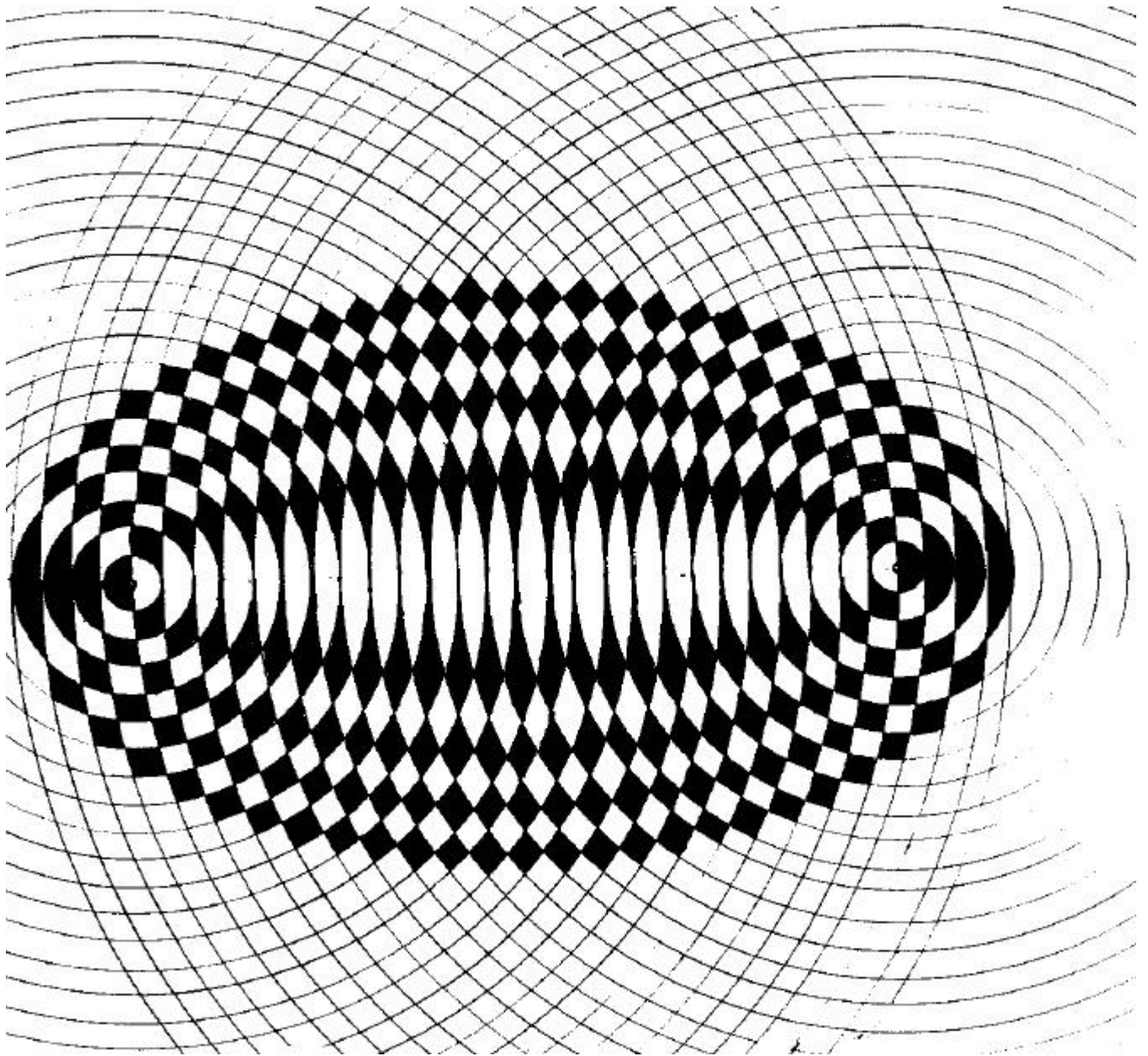
La parabole avec des parallèles : production d'élève.



L'hyperbole avec des perpendiculaires : production d'élève.



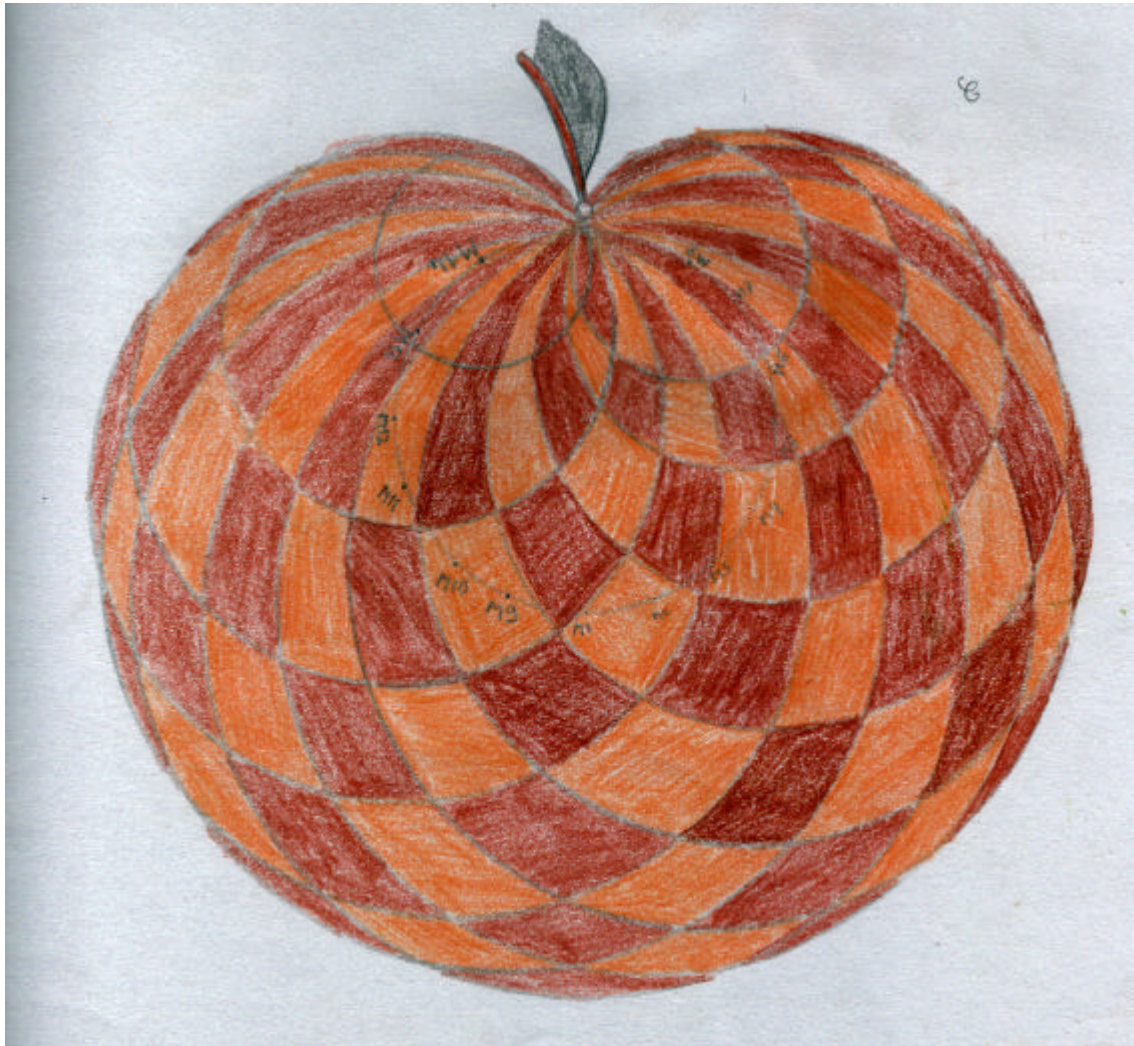
L'ellipse avec des cercles.



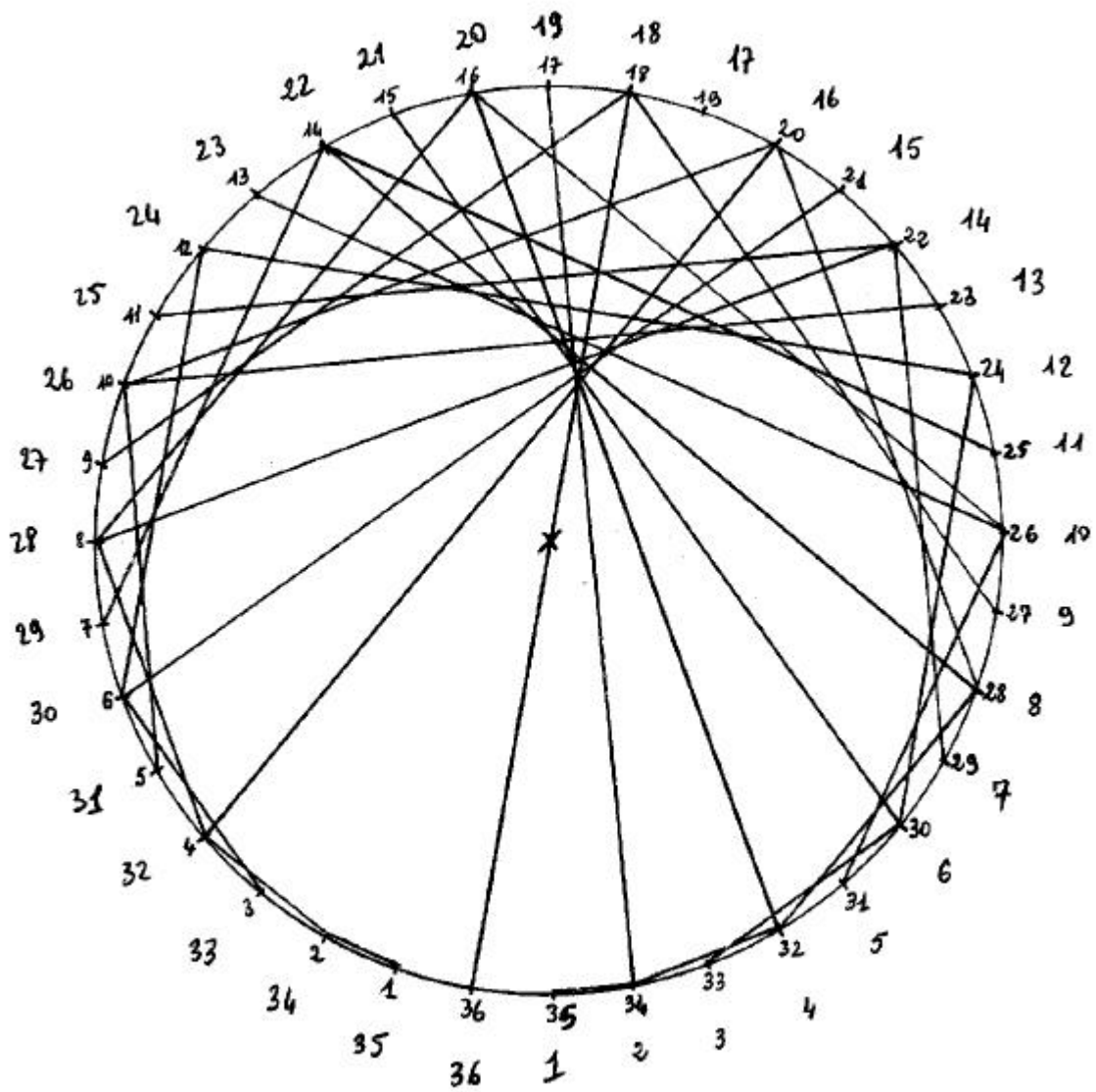
La cardioïde avec des cercles: production d'élève.



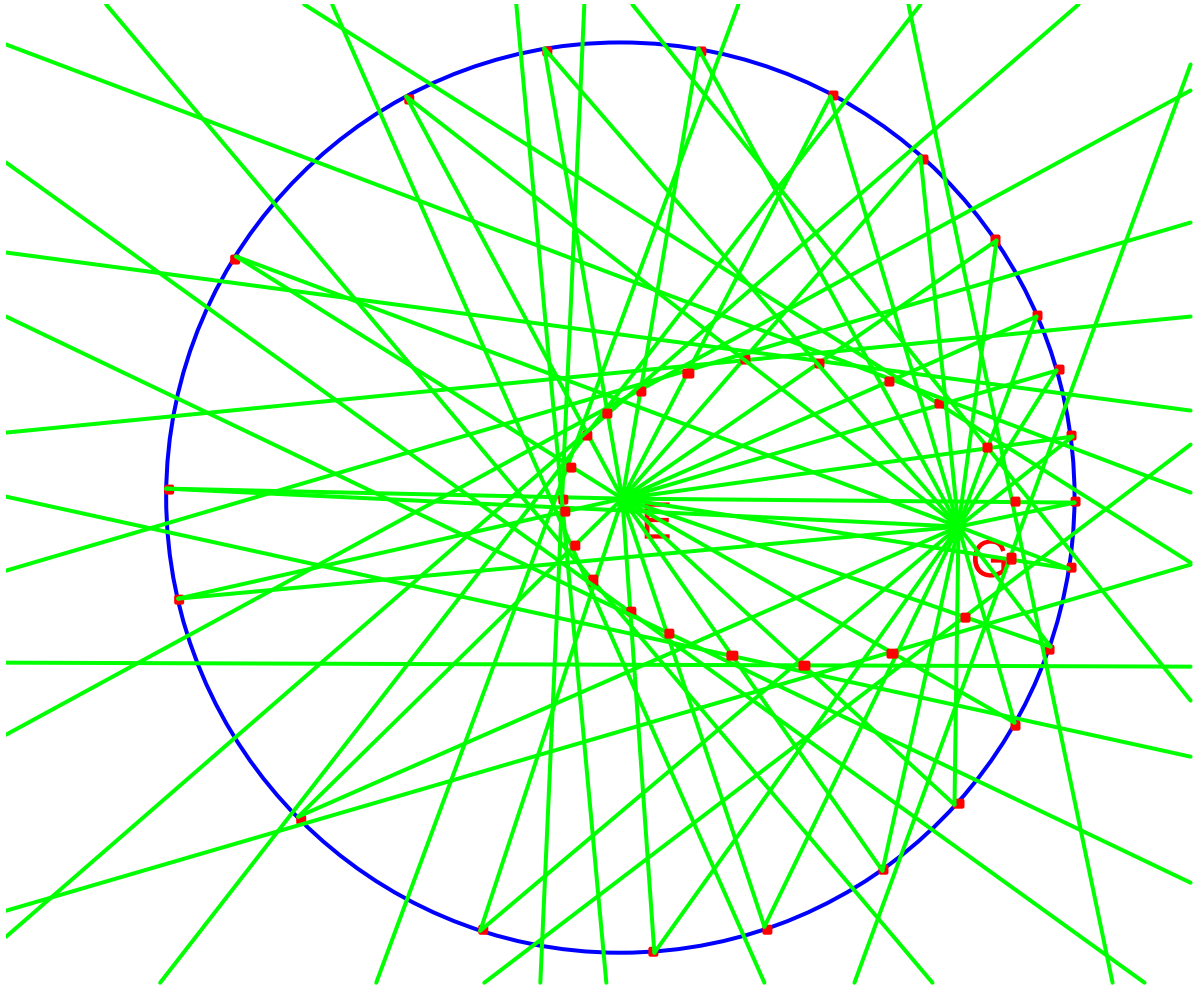
**La cardioïde avec des cercles : production d'élève.
La façon de colorier change tout, évidemment !**



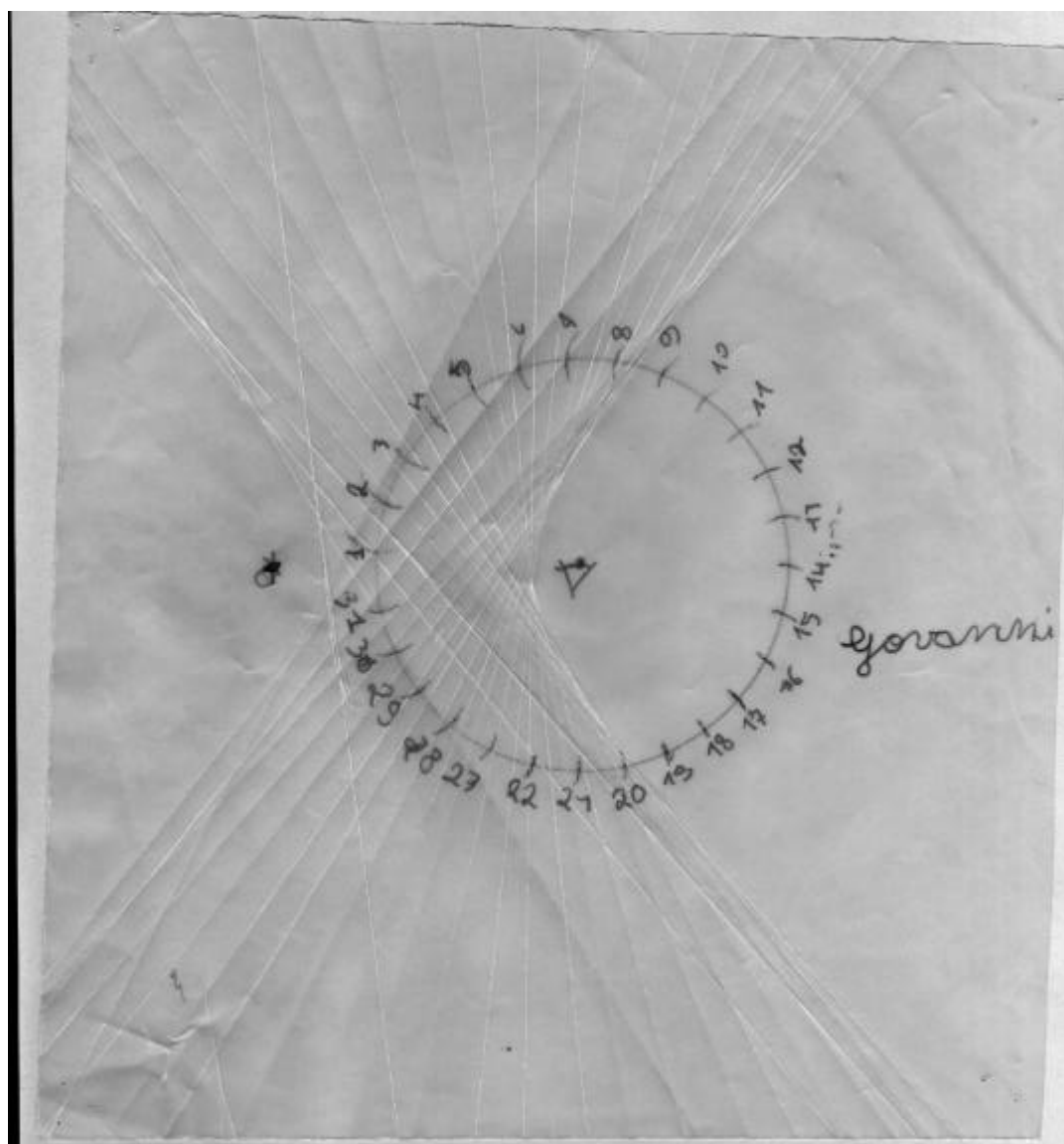
La cardioïde à partir des cordes d'un cercle.



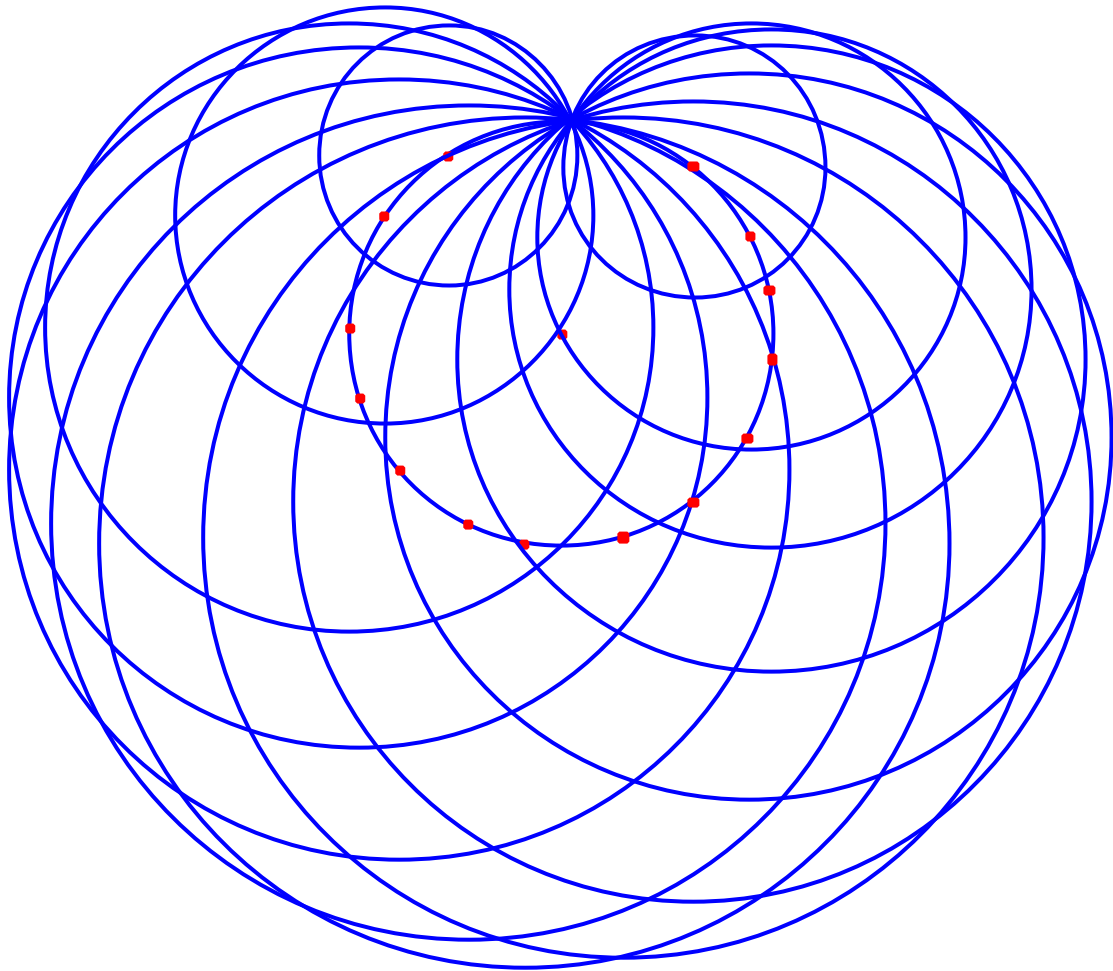
L'ellipse avec des médiatrices.



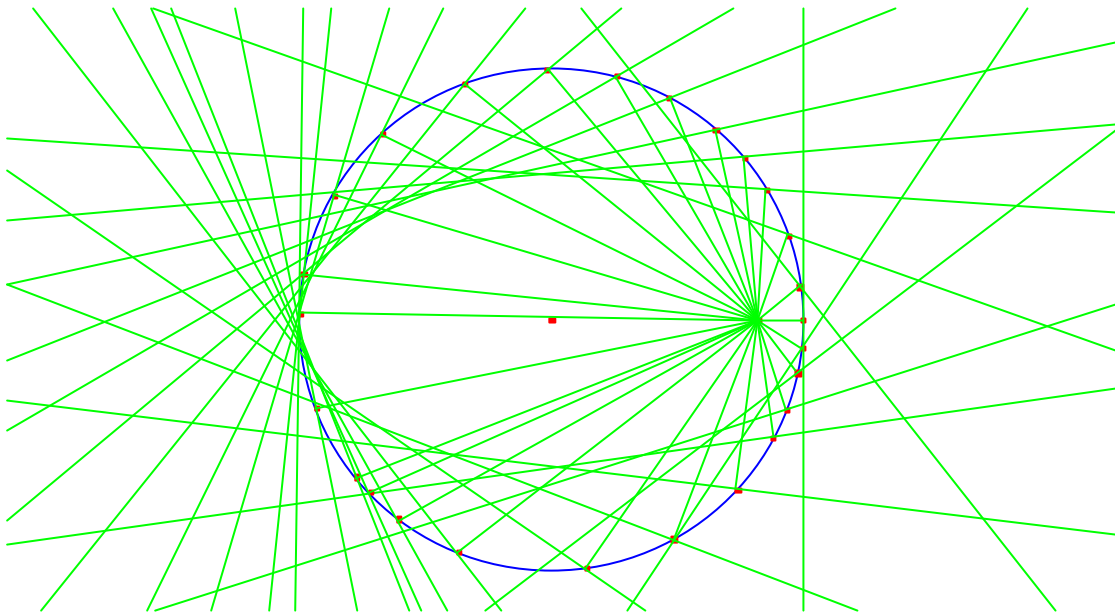
L'hyperbole par pliages d'un papier calque : production d'élève.



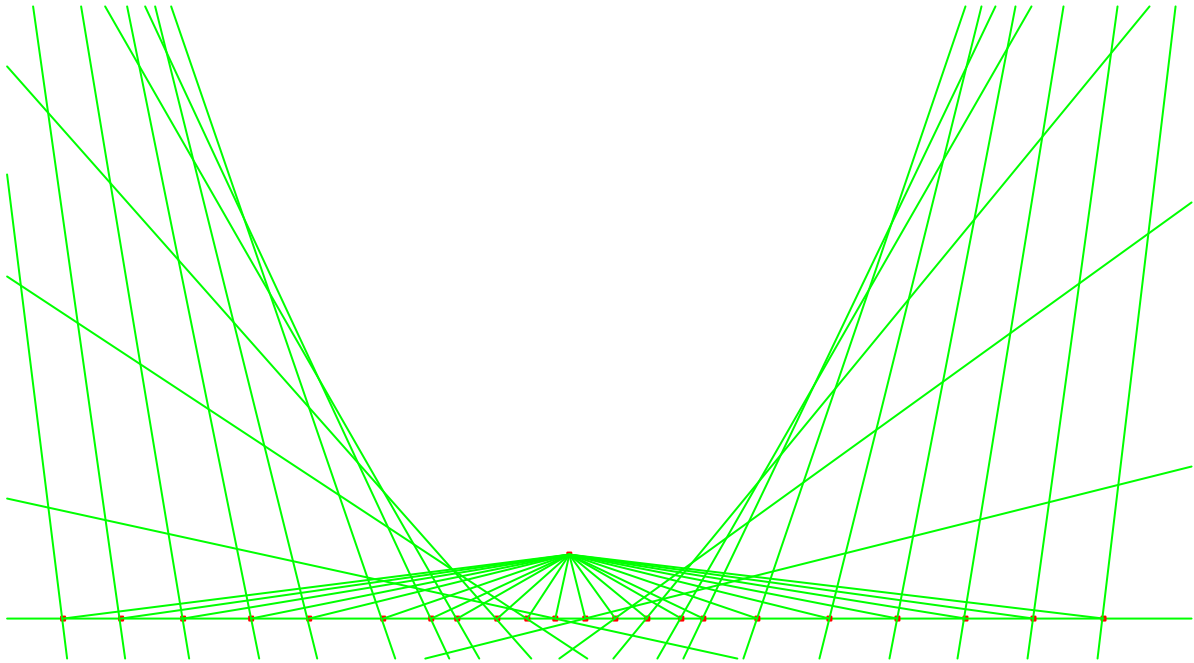
La cardioïde avec cabri géomètre.



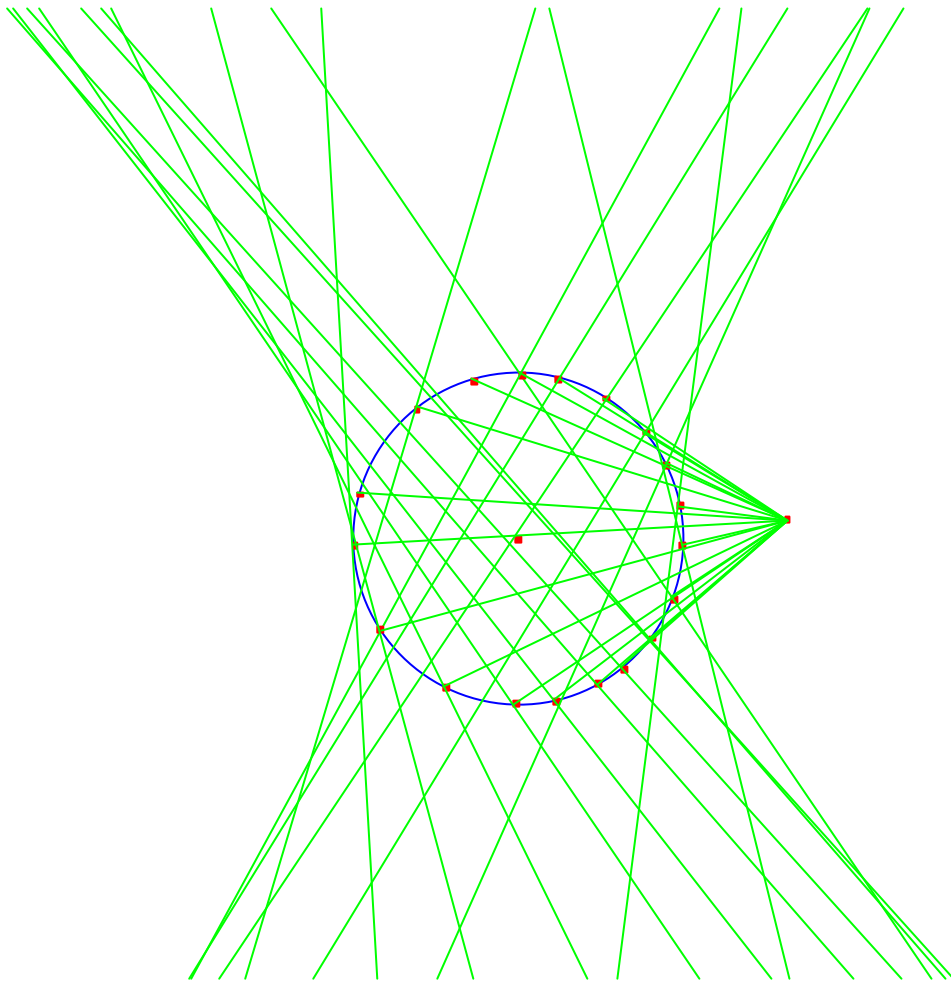
L'ellipse avec cabri géomètre.



La parabole avec cabri géomètre.



L'hyperbole avec cabri géomètre.



Travaux de constructions de figures géométriques.

Mr NOURBY m'a proposé diverses activités de constructions de figures géométriques au tout début de l'année scolaire 2004/2005 pour ma première prise en charge de la classe dans le cadre du stage de deuxième année de l'I.U.F.M. N'ayant pas beaucoup d'idées des connaissances et des difficultés des élèves en classe de sixième, cela a été pour moi l'opportunité de découvrir les compétences de mes élèves au travers d'une activité déjà expérimentée.

Il s'agissait d'une activité de travaux dirigés contenant un programme de construction géométrique. Le programme aboutissait à la construction d'une parabole (Parabole [Figure 1](#)) à partir de son foyer, de sa droite directrice et de ses tangentes sans toutefois les nommer ainsi. Après la lecture de l'énoncé, nous avons démarré la construction au tableau avec un premier élève pour clarifier la méthode avec toute la classe. Ensuite les élèves ont travaillé seul ou à deux sur leurs cahiers pendant que j'observais leurs méthodes de travail et découvrais leurs difficultés à manipuler le matériel (règle graduée, équerre).

Dans le programme de construction il s'agissait de répéter plusieurs fois la construction de droites et de droites perpendiculaires passant par un point. Lors du travail, les élèves ont pu s'entraîner à tracer de nombreuses perpendiculaires et à améliorer les tracés. Entre autre comme on pouvait le constater lors des évaluations de sixièmes, pour certains élèves tracer une droite perpendiculaire revenait à tracer une droite verticale (parallèle aux colonnes du cahier). L'intérêt de cette activité était de mettre en échec cette perception et de faire évoluer leur conceptualisation.

Par la suite, j'ai participé à des séances dans les classes de Mr NOURBY pour la construction d'autres coniques utilisant d'autres propriétés géométriques. Une de ses activités par exemple avait pour but de tracer une parabole (Parabole [Figure 2](#)) à l'aide de droites parallèles à la droite directrice et de cercles de centre le foyer et de rayon la distance entre chaque droite parallèle et la droite directrice. On a pu ainsi effectuer une mise au point sur l'utilisation du compas. Lors de cette activité, les élèves avaient déjà en tête le résultat qu'ils devaient obtenir ce qui leur donnait une certaine autonomie et plus de recul pour pouvoir rectifier d'eux même les erreurs de construction.

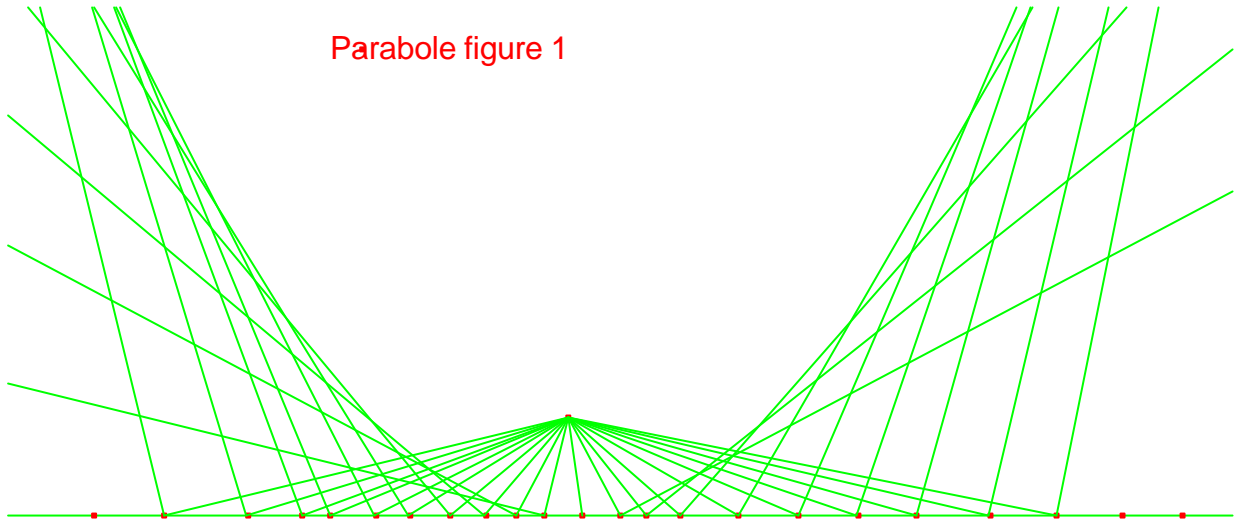
D'un point de vue pédagogique, j'ai trouvé ses séances très intéressantes. Elles m'ont permis d'avoir un premier aperçu des réactions des élèves et des moyens pédagogiques à mettre en œuvre pour faire avancer la classe et la compréhension des élèves. L'activité ayant évolué différemment dans les deux classes dont Mr NOURBY a la responsabilité. Par la suite j'ai testé les mêmes séances avec mes élèves avec plus d'assurance puisque j'avais déjà une expérience du travail à faire en classe. J'ai pu constater que cela a permis aux élèves de prendre conscience de l'importance de la précision dans le tracé, ainsi que dans la manipulation des instruments.

Enfin, ces activités très riches ont été l'occasion d'introduire aux élèves l'outil informatique. Puisqu'ils ont pu réaliser ses figures à l'aide du logiciel Cabri Géomètre. Ces activités étant étalées sur toute l'année, cela donne une continuité dans le travail. Tout en apprenant les compétences exigibles du programme de sixième, les élèves acquièrent déjà une culture mathématique qui leur servira jusque dans l'enseignement supérieur.

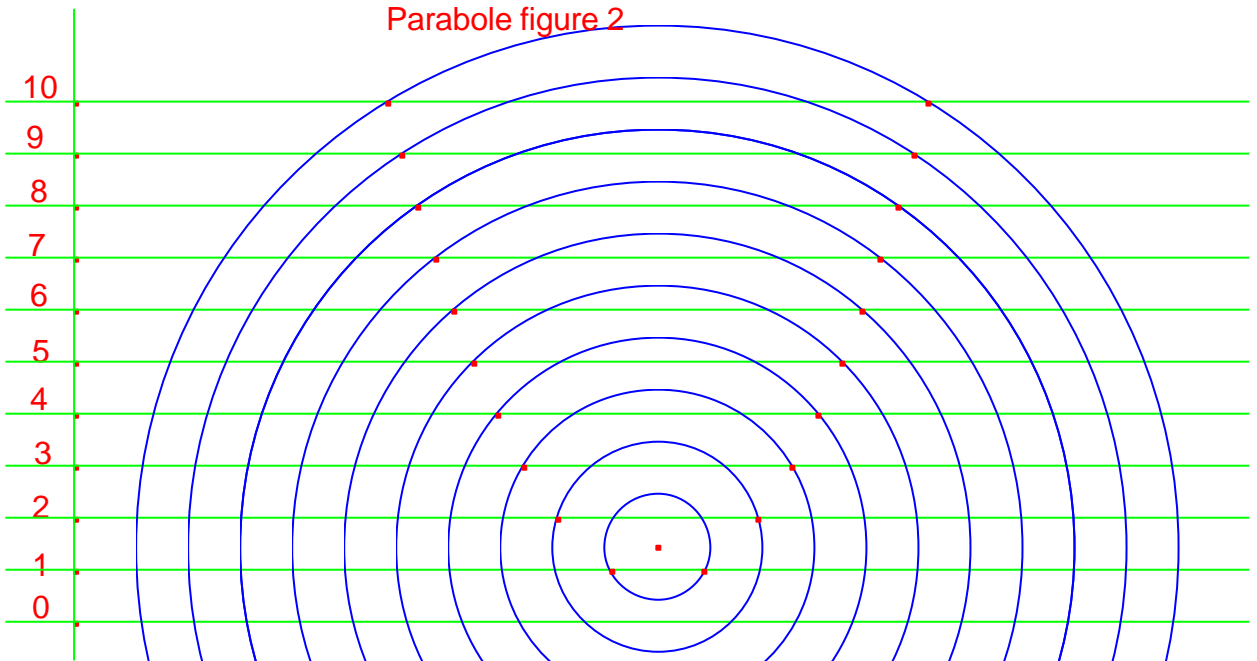
MOREL Marie Virginie

Figures 1 et 2

Parabole figure 1



Parabole figure 2



BIBLIOGRAPHIE

1. "CINQ SUR CINQ" SIXIEME HACHETTE 1994
2. "ACTIVITES GEOMETRIQUES EN SIXIEME ET EN CINQUIEME"
IREM DE GRENOBLE CRDP 1987
3. "DE POINTS EN COURBES" C.R.D.P. DIJON 1987