Deux approches pour dériver valeur absolue

Marc Jambon, décembre 2012

Première S, B.O. spécial n° 9 du 30 sept 2010

1. Dérivée ponctuelle

C'est le point de vue du programme officiel, classe de première S. En respectant la conception de dérivée ponctuelle en x, on définit pour chaque x et pour chaque $h \neq 0$ le taux d'accroissement :

$$f_h(x) = \frac{|x+h| - |x|}{h}$$

1° Pour $x < 0$, x fixé, et $|h| < -x$, réécrire $f_h(x)$ sans utiliser $|\ |$. En déduire :

$f_h(x)$ tend vers – 1 lorsque h tend vers 0.

Ainsi, la fonction valeur absolue : $x \mapsto |x|$, restreinte à $x < 0$, admet – 1 comme dérivée.

2° Pour $x > 0$, x fixé, et $|h| < x$, réécrire $f_h(x)$ sans utiliser $|\ |$. En déduire :

$f_h(x)$ tend vers + 1 lorsque h tend vers 0.

Ainsi, la fonction valeur absolue : $x \mapsto |x|$, restreinte à $x > 0$, admet + 1 comme dérivée.

3° Pour $x = 0$ et $h < 0$, réécrire $f_h(x)$ sans utiliser $|\ |$. En déduire :

$f_h(0)$ tend vers – 1 lorsque h tend vers 0 par valeurs strictement négatives.

Pour $x = 0$ et $h > 0$, réécrire $f_h(x)$ sans utiliser $|\ |$. En déduire :

$f_h(0)$ tend vers + 1 lorsque h tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Ainsi, on peut dire qu'on a une *dérivée à gauche* égale à – 1, une *dérivée à droite* égale à + 1, et, par voie de conséquence, absence de limite pour, h tend vers 0, $h \neq 0$,
il n'y a pas de dérivée ponctuelle pour $x \mapsto |x|$ au point 0.

4° Dessiner un repère orthonormé, avec 5 cm comme unité, les axes étant représentés par un tracé extra fin. Représenter, dans ce repère, la fonction dérivée, ainsi obtenue, sur son ensemble de définition, on utilisera un tracé en noir plus fort que celui des axes.

2. Dérivée globale graphique

Nous proposons ci-dessous une autre approche. Comme précédemment formons le taux d'accroissement, que l'on considère désormais, pour chaque $h \neq 0$ fixé, comme une fonction f_h de la variable x :

$$f_h(x) = \frac{|x+h| - |x|}{h}$$

1° Pour $h < 0$, réécrire, sans utiliser $|\ |$, $f_h(x)$ en distinguant trois intervalles :

$x \leq 0$
$0 \leq x \leq -h$
$-h \leq x$

Pour $h > 0$, réécrire, sans utiliser $|\ |$, $f_h(x)$ en distinguant trois intervalles :

$x \leq -h$
$-h \leq x \leq 0$
$0 \leq x$

2° Représentez graphiquement dans un nouveau repère orthonormé identique à celui de 1.4°, f_h pour quelques valeurs de h de plus en plus petites en valeur absolue, par exemple :

$h = -0{,}5$ et $h = +0{,}5$
$h = -0{,}2$ et $h = +0{,}2$
$h = -0{,}1$ et $h = +0{,}1$

$h = -0{,}02$ et $h = +0{,}02$
Utiliser, si possible, quatre couleurs différentes, autres que le noir, correspondant à chacune des lignes précédentes.
Constater que lorsque h se rapproche de 0, le graphe de f_h se rapproche d'une ligne brisée (L) constituée d'un segment de droite "vertictal" et deux demi-droites "horizontales".
[Cette question peut avantageusement être animée en géométrie dynamique, ce devrait être assez convaincant.]

3° On propose d'exprimer formellement ce qui précède en termes de limite.
Comment est faite la région du plan située entre le graphe de f_h et (L) ? Evaluer son aire et montrer qu'elle tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

4° (L) peut-être considérée comme la "*dérivée globale graphique*"[1] de $x \mapsto |x|$. Tracer cette ligne brisée en trait noir fort et remarquer quelle peut être tracée sans lever le crayon, en ce sens :
la dérivée globale graphique de $x \mapsto |x|$ est "continue".
Comparer avec ce qu'on a obtenu en 1.4°.

[1] terminologie qui m'est propre