L'infinité des nombres premiers : La proposition des Éléments d'Euclide dans les manuels de Terminale

Denis DAUMAS,
membre du groupe "Histoire des mathématiques" de l'IREM de Toulouse
Lycée climatique 65 400 Argelès-Gazost

Les introductions aux programmes de mathématiques des classes de lycée demandent d'introduire une vision historique dans notre enseignement des mathématiques. Parions qu'à défaut d'une formation initiale en histoire des mathématiques, et malgré les efforts de l'IREM où un groupe de recherche anime des stages de formation continue, la source d'information des enseignants reste souvent la consultation des manuels. Dans le cadre d'un travail du groupe IREM sur le raisonnement par récurrence (à paraître), j'ai été amené à étudier comment Euclide démontrait des résultats généraux en arithmétique et je me suis intéressé particulièrement à la proposition 20 du livre IX des *Éléments* dont le résultat est au programme de la spécialité de terminale S. J'ai eu la curiosité de consulter quelques manuels …

EUCLIDE *Les Éléments :* Proposition IX-20

Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée.[1]

Cette proposition figure sous des énoncés plus modernes du type : "l'ensemble des nombres premiers est infini", ou "il existe une infinité de nombres premiers" et avec des démonstrations diverses, dans les manuels de Terminale S (éditions 1998), au chapitre d'arithmétique de l'enseignement de spécialité.

De tous les manuels de Terminale S que nous avons consultés, seuls deux font référence explicitement à Euclide. Ce sont les passages correspondants de ces deux manuels que nous allons confronter à la proposition d'Euclide.

1) Pierre-Henri Terracher, Robert Ferachoglou
Math, Enseignement de spécialité, Terminale S
Hachette 1998, page 14 :

[1] EUCLIDE, *Les Éléments*, volume 2, traduction et commentaires de Bernard Vitrac, PUF, Paris, 1994, page 445. Dans cet article, nous noterons les propositions d'Euclide avec le numéro du livre en chiffres romains suivi de celui de la proposition dans l'édition de B. Vitrac en chiffres arabes : IX-20 désigne la 20ème proposition du livre IX, dans cette édition.

Théorème 3

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration

(due à Euclide, III^e siècle av. J.C.).

EUCLIDE a mis à l'honneur un type de raisonnement très puissant, le raisonnement par l'absurde. En voici un exemple à cette occasion.

Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers premiers : p_1, p_2, …, p_n ; considérons l'entier $N = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$. N étant supérieur à 1, il admet un diviseur premier (*théorème* 2[2]) dans la liste précédente ; soit p_i ce diviseur.

Alors $N = p_i \times q = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$. p_i divise p_iq et $p_1 \ldots p_n$, donc doit diviser leur différence, égale à 1. C'est absurde, donc l'hypothèse est fausse.

Note

Est-ce le nom d'un mathématicien de chair et d'os ou celui d'un collectif, d'une école ? Toujours est-il que le nom d'EUCLIDE reste attaché à un pôle scientifique (la mathématique "grecque" d'Alexandrie, au III^e siècle av. J.C.) et à un ouvrage : Les Éléments (13 livres prodigieux dont trois consacrés à l'Arithmétique : les livres VII, VIII et IX).

2°) André Antibi, Raymond Barra

Math, Term. S Spécialité, Nouveau Transmath

Nathan 1998, page 140 :

THÉORÈME 2 Il existe une infinité de nombres premiers.

Nous allons montrer que si l'on choisit un nombre premier quelconque, on trouve toujours un nombre premier qui lui est strictement supérieur. Il en résultera bien que la suite des nombres premiers est infinie.

Démonstration. Supposons donc choisi un nombre premier p, $p > 5$, et formons le produit $2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times p$ de tous les nombres premiers compris entre 2 et p, puis posons :

$$N = (2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times p) + 1$$

N étant supérieur à 2, N admet un diviseur premier. Notons le q.

---

[2] Le théorème 2 est le suivant : "*Soit a un entier naturel. Alors :*

- *a admet un diviseur premier.*
- *Si a n'est pas premier, il admet un diviseur premier p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{a}$."*

Or, aucun des nombres de la liste 2, 3, 5, …, p n'est diviseur de N car le reste de la division de N par l'un quelconque des nombres premiers de cette liste est toujours 1. Donc q est strictement supérieur à p. […]

POINT D'HISTOIRE

La démonstration ci-dessus est due à Euclide. Il existe plusieurs autres démonstrations de ce théorème. Citons celle d'Euler (1737), de Polya (1920), d'Erdos (1938).

Aucune n'est plus simple que celle d'Euclide.

Certes Euler a le mérite de montrer, pour la première fois, que l'Analyse permet de démontrer des résultats sur des nombres entiers. Cette première incursion de l'Analyse dans l'Arithmétique se mua au XIX^{e} en une véritable invasion pour créer la branche des mathématiques que l'on appelle aujourd'hui la théorie analytique des nombres.

Les énoncés sont identiques dans les deux manuels, mais on doit remarquer que dans celui d'Euclide l'infini n'est pas mentionné. Cette différence est importante et nous consacrerons un paragraphe à la question de l'infini.

Les deux démonstrations sont fondamentalement différentes, bien qu'étant dans les deux cas présentées comme *dues à Euclide*. L'une (Terracher) est une démonstration par l'absurde, l'autre (Antibi) ne l'est pas ; dans l'une (Terracher) il est fait appel à n nombres premiers distincts mais non spécifiés, dans l'autre (Antibi) on prend *tous les nombres premiers entre 2 et p*.

Comme le dit la chanson :

Y-a quéqu'chose qui cloch' là dedans,
À Euclide retournons immédiat'ment !

Nous présentons à la page suivante à la suite de l'énoncé de la proposition et de la figure, la démonstration d'Euclide en trois colonnes :

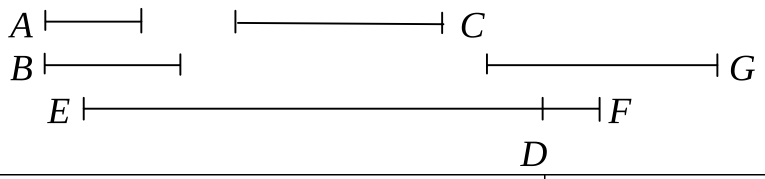
- dans la première colonne et en italiques, le texte d'Euclide (plus exactement, sa traduction par Bernard Vitrac[3]),
- dans une deuxième colonne une transcription plus moderne accompagnée de quelques commentaires explicatifs,
- dans une troisième colonne une rédaction plus générale de cette démonstration.

[3] Il existe d'autres éditions des *Éléments* d'Euclide en langue française :

- celle de Peyrard reproduite en 1966 (Blanchard, Paris), date du début du XIX^{e} : le français est parfois désuet, mais surtout cette traduction est basée sur un texte antérieur à l'édition du texte grec par Heiberg (1883-1888),
- celle de Kayas (Paris, 1978) est assez éloignée du texte, en langage methématique moderne, mais nous la signalons car elle donne le texte grec,
- celle d'Itard ne concerne que les livres arithmétiques (Jean Itard, *Les livres arithmétiques d'Euclide*, Hermann, Paris, 1961)

Nous avons choisi celle de Vitrac parce qu'elle est la plus récente, qu'elle est complète (le dernier volume est en cours de publication) et contient des commentaires très précis.

Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée.



Soient les nombres premiers proposés A, B, C. Je dis que les nombres premiers sont plus nombreux que A, B, C. *En effet, que soit pris le plus petit [nombre] mesuré par A, B, C, et que ce soit DE et que l'unité DF soit ajoutée à DE. Alors ou bien EF est premier ou bien non.* *D'abord qu'il soit premier ; donc sont trouvés les nombres premiers A, B, C, EF plus nombreux que A, B, C.* *Mais alors que EF ne soit pas premier ; il est donc mesuré par un certain nombre premier (VII.32). Qu'il soit mesuré par le [nombre] premier G. Je dis que G n'est pas le même que l'un quelconque des A, B, C.*	Soient A,B,C trois nombres premiers (distincts). Je dis qu'il y a plus de trois nombres premiers. Le plus petit nombre mesuré par A,B,C (nous disons aujourd'hui le plus petit commun multiple de A,B,C) est le produit ABC car ces trois nombres sont premiers. Posons D = ABC + 1. 1) si D est premier, D étant par construction distinct de A, de B et de C (Euclide n'éprouve pas le besoin de préciser ce point), nous avons maintenant quatre nombres premiers distincts : A, B, C et D. 2) si D n'est pas premier, D admet au moins un diviseur premier (Euclide démontre cela aux propositions VII-31 et 32). Soit donc G un diviseur premier de D : démontrons, par l'absurde, que G est distinct de A, de	Soient A_1, A_2, …,A_n n nombres premiers (distincts), je dis qu'il y a plus de n nombres premiers. Soit $X = A_1 \times A_2 \times\ldots\times A_n + 1$. 1) Si X est premier, on a les nombres premiers A_1, A_2, …,A_n, X, plus nombreux que les nombres premiers A_1, A_2, …,A_n puisque X est distinct de chacun des nombres A_1, A_2, …,A_n. 2) Si X n'est pas premier, il a au moins un diviseur premier Y. De plus, Y n'est aucun des nombres premier A_1, A_2, …,A_n

En effet, si c'est possible, qu'il le soit. Or A, B, C mesurent DE ; donc G mesurera aussi DE. Mais il mesure aussi EF : il mesurera aussi l'unité DF restante tout en étant un nombre ; ce qui est absurde. G n'est donc pas le même que l'un des A, B, C. Et il est supposé premier. *Donc sont trouvés les nombres premiers A, B, C, G, plus nombreux que la multitude proposée des A, B, C.* *Ce qu'il fallait démontrer.*	B et de C. Supposons en effet que G = A ou G = B ou G = C. Le nombre G est alors un diviseur de ABC et de D, et par conséquent un diviseur de la différence D - ABC qui vaut 1. Or un nombre premier G ne peut diviser 1, on a donc $G \neq A$ et $G \neq B$ et $G \neq C$. Donc A, B, C et G sont quatre nombres premiers distincts. Partant des trois nombres premiers A, B, C, nous avons trouvé dans les deux cas quatre nombres premiers distincts : il y a donc plus de trois nombres premiers.	En effet, si Y est un des nombres A_1, A_2, …,A_n, Y divise à la fois X et $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Donc Y divise $X - A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ qui vaut 1, ce qui est impossible puisque Y est premier. Nous avons donc dans les deux cas n+1 nombres premiers distincts : il y a donc plus de n nombres premiers.

Quelques remarques :

1) L'énoncé est un énoncé général, comme l'indique sa formulation : *toute multitude de nombres premiers proposée*. Euclide, en ne prenant que trois nombres, fait une démonstration en apparence particulière, mais implicitement générale. Nous avons montré en ajoutant la troisième colonne que cette démonstration se généralise sans difficulté en numérotant les nombres premiers.

2) Dans la deuxième colonne, nous avons fait remarquer que le produit ABC est le plus petit nombre mesuré par A, B et C puisque A, B et C sont des nombres premiers. Pourquoi Euclide ne fait-il pas appel à ce produit dont l'accès est plus direct ?

La définition de la multiplication des nombres figure dans les définitions qui ouvrent le Livre VII des *Éléments* :

> *Un nombre est dit multiplier un nombre quand, autant il y a d'unités en lui, autant de fois le multiplié est ajouté [à lui-même], et qu'il est produit un certain [nombre].*[4]

Autrement dit : la somme de p termes égaux à n est n × p.

Mais Euclide ajoute aussitôt

> *Et quand deux nombres, s'étant multipliés l'un l'autre, produisent un certain [nombre], le produit est appelé plan, et les nombres qui se sont multipliés l'un l'autre, ses côtés.*
>
> *Et quand trois nombres, s'étant multipliés l'un l'autre, produisent un certain [nombre], le produit est solide, et les nombres qui se sont multipliés l'un l'autre [sont] ses côtés.*[5]

Le produit a donc une nature géométrique qui est un obstacle à sa généralisation : on peut multiplier deux nombres, multiplier le produit par un troisième nombre, puis à nouveau ce produit par un quatrième, et ainsi de suite, mais on ne peut pas envisager directement le produit de plus de trois nombres dans un espace qui n'a que trois dimensions.

Par contre, le Plus Petit Nombre Mesuré (PPNM) par deux nombres A et B est un nombre qui échappe à cette interprétation géométrique. Et même si sa construction (proposition VII-34) fait intervenir un produit (A × B lorsque A et B sont premiers entre eux ; dans le cas contraire, on détermine les termes E et F du rapport irréductible égal au rapport de A à B et le résultat est A×F ou B×E), rien n'empêche de procéder à partir de là de proche en proche pour déterminer le PPNM par trois nombres ou plus. Euclide procède ainsi pour trois nombres à la proposition VII-36[6], mais c'est à une généralisation du résultat de cette dernière proposition qu'il fait appel dans la démonstration de IX-20.

---

[4] Euclide, *Les Éléments,* volume 2, page 259. On pourra se reporter à la même référence pour un commentaire sur le dernier membre de phrase de cette définition : *et qu'il est produit un certain [nombre].*

[5] Euclide, *Les Éléments*, volume 2, page 261.

[6] L'énoncé de cette proposition est : *Étant donnés trois nombres, trouver le plus petit nombre qu'ils mesurent.* Euclide, *Les Éléments*, volume 2, page 348

3) Bilan de la confrontation : aucun des deux manuels cités au début de cette étude ne donne la démonstration d'Euclide ! Cette dernière contient bien une démonstration par l'absurde, mais seulement pour établir un résultat intermédiaire. Elle ne fait appel à aucun nombre premier particulier, et ne consiste pas à construire un nombre premier supérieur à d'autres. Peut-être pourrait-on, en combinant les démonstrations de Terracher et d'Antibi produire une version s'approchant de celle d'Euclide !

4) Il reste qu'il faut interpréter le début de la démonstration d'Euclide : "*soient les nombres premiers proposés A, B, C*". L'énoncé nous invite à lire "soient n nombres premiers distincts", où n désigne un entier quelconque. Cela ne signifie pas que l'on sait que la réserve de nombres premiers est illimitée (que resterait-il à démontrer ?), mais que l'on va démontrer que si l'on a n nombres premiers, alors on peut en produire un de plus.

Pour plus de cohérence, il faudrait donc présenter l'énoncé de la proposition sous la forme :

"S'il existe au moins n nombres premiers ($n \geq 2$), alors il en existe au moins n + 1".

Nous savons aujourd'hui que pour conclure pour tout naturel n l'existence d'au moins n nombres premiers, il reste à démontrer qu'il existe au moins deux nombres premiers. Mais la définition des nombres premiers et leur existence était loin d'être un nouveauté à l'époque d'Euclide !

Nous voici en train de réécrire la démonstration d'Euclide à la manière d'une démonstration par récurrence … et la question de l'infini, qu'Euclide avait laissée à la porte, revient par la fenêtre !

5) Allons cependant jusqu'au bout et construisons une démonstration par récurrence.

Il nous faut pour commencer changer l'énoncé de la proposition et faire intervenir un entier quelconque. On peut proposer, pour éviter d'utiliser les notions d'ensemble et de cardinal d'un ensemble :

" Pour tout naturel non nul n, il y a plus de n nombres premiers".

Démonstration :

a) C'est vrai pour $n = 1$, car il y a au moins deux nombres premiers : 2 et 3 sont des nombres premiers distincts.
b) Pour tout naturel n, démontrons que s'il y a plus de n nombres premiers, alors il y en a plus de n+1.

S'il y a plus de n nombres premiers, on peut choisir n+1 nombres premiers distincts : $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Soit alors le nombre $X = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n+1} + 1$.

X est un entier, et donc il est soit premier, soit composé.

- dans le cas où X est premier, pour tout i, $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $X \neq A_i$ et X est premier, donc nous avons n+2 nombres premiers : $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}, X$.

- dans le cas où X est composé, X admet au moins un diviseur premier Y. Démontrons que Y est distinct des A_i. Raisonnons par l'absurde :

  Supposons qu'il existe un naturel i, $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, tel que $Y = A_i$. Y divise alors X et $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n+1}$, Y divise donc leur différence 1, donc Y = 1. Ce résultat est en contradiction avec Y est un nombre premier, par conséquent, pour tout i, $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $Y \neq A_i$. Mais Y est premier, et nous avons n+2 nombres premiers : $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, Y.

  Dans les deux cas, il y a plus de n+1 nombres premiers.

  c) Conclusion : pour tout naturel n, il y a plus de n nombres premiers.

6) La distance entre une démonstration par récurrence et la démonstration d'Euclide se mesure avec tout ce qu'il a fallu changer (en particulier l'énoncé) ou ajouter (la partie a)) à une démonstration générale correspondant à celle d'Euclide (3ème colonne du tableau de la page 4) pour obtenir notre démonstration par récurrence. Il n'en demeure pas moins que la partie b) de la démonstration par récurrence est très proche de la 3ème colonne du tableau.

La question de l'infini.

En fait, Euclide démontre de nombreuses propositions que l'on pourrait aujourd'hui démontrer par récurrence en procédant de proche en proche : ayant démontré comment on peut passer de deux termes à trois termes, Euclide laisse le soin au lecteur de poursuivre, avec parfois une formule comme *semblablement nous démontrerons alors que tous ceux …*[7].

Ici, Euclide s'y prend différemment et pour commencer ne part pas de deux nombres premiers pour passer à trois et, en continuant, arriver à une quantité donnée de nombres premiers. Son point de départ est au contraire une "multitude" de nombres premiers. Cette multitude est certes représentée par trois de ces nombres, mais nous avons dit que cette représentation est une pratique courante dans les *Éléments*.

On peut imaginer quelques scénarios qui permettent d'envisager ce point de départ. Par exemple, en restant dans le domaine grec, on peut se placer dans le contexte du crible d'Eratosthène et se demander si à partir d'un certain rang on peut encore trouver des nombres qui échappent à l'élimination. Ainsi, le problème n'est plus de chercher une quantité donnée de nombres premiers, mais de savoir si la réserve est limitée ou pas.On peut aussi franchir plus de vingt siècles et signaler à nos élèves la difficulté d'établir la primarité de très grands nombres, ou évoquer la loi de raréfaction des nombres premiers.

---

[7] Voir la proposition IX-8 : *si des nombres en quantité quelconque sont continûment en proportion à partir de l'unité, d'une part le troisième à partir de l'unité sera un carré ainsi que ceux [qu'on prend] en en sautant un [sur deux] ; d'autre part le quatrième sera un cube ainsi que tous ceux [qu'on prend] en en sautant deux, et le septième à la fois cube et carré, ainsi que ceux [qu'on prend] en en sautant cinq.* Euclide, *Les Éléments*, volume 2, page 419.

Dans ce contexte, on peut comprendre :

- que le problème n'est pas de démontrer qu'il existe au moins deux nombres premiers,
- que la question de l'infini est sous-jacente, même si Euclide, pour éviter certains paradoxes et conformément aux indications d'Aristote, reste dans le domaine de l'infini potentiel,

> [Les mathématiciens] *ne font point usage de l'infini, mais seulement de grandeurs aussi grandes qu'ils voudront, mais limitées.*[8]

Les *multitudes* d'Euclide ne sont pas infinies ou illimitées, mais relèvent du nombre, fini. Cela apparaît dans sa définition du nombre :

un nombre est la multitude composée d'unités [9].

Un autre auteur grec, Nicomaque de Gérase (néopythagoricien du premier siècle de notre ère) introduit avec le terme "flux" le côté ordinal du nombre et une idée de mouvement qui peut conduire à l'illimité : *le nombre est une multiplicité définie, ou un système d'unités, ou encore un flux de quotité constitué d'unités.*[10] C'est un peu cette idée de "flux" qui vient à l'idée après la démonstration d'Euclide, quand on voit qu'on peut toujours ajouter un (nombre premier) à toute multitude : c'est sans fin !

Il arrive pourtant à Euclide de faire référence plus nettement à l'infini. C'est le cas dans la démonstration de la proposition VII-31[11]

Tout nombre composé est mesuré par un certain nombre premier.

Dans la démonstration, Euclide considère des diviseurs composés successifs B, C, … d'un nombre composé A. Mais ces diviseurs composés mènent nécessairement à un diviseur premier,

> *car s'il ne s'en trouvait pas, des nombres <u>en quantité illimitée</u> mesureraient le nombre A, dont chacun serait plus petit que le précédent ; <u>ce qui est impossible dans les nombres</u>*[12].

En termes d'aujourd'hui, on dirait que s'il n'y avait pas de nombre premier au bout d'un nombre fini de diviseurs successifs, il existerait une suite <u>infinie</u>

---

[8] Aristote, *Physique*, III 7, 207 b 30-31, traduction d'Henri Carteron, Les Belles Lettres, Paris, 1983, p.108.

[9] Euclide, *Les Éléments*, volume 2, page 247

[10] Nicomaque de Gérase, *Introduction arithmétique*, traduction et notes de Jeanne Bertier, VRIN, Paris, 1978, page 60.

[11] Nous avons vu dans le texte de IX-20 une référence à VII-32, qui n'est qu'une conséquence directe de VII-31.

[12] Euclide, *Les Éléments*, page 340. C'est nous qui soulignons.

strictement décroissante d'entiers naturels, ce qui est impossible (d'où le nom de "descente infinie" pour caractériser ce type de démonstration).

Il n'est pas interdit de penser qu'Euclide se permet dans ce dernier cas de parler de "quantité illimitée" parce qu'il rejette aussitôt cette situation comme impossible : une suite strictement décroissante d'entiers naturels est nécessairement finie. Il évite par contre de parler de "quantité illimitée de nombres premiers" car cela le mènerait beaucoup trop près de l'infini actuel que nous abordons aujourd'hui dans des énoncés tels que : "l'ensemble des nombres premiers est infini".

On comprend alors pourquoi Euclide ne formule pas davantage sa proposition par "les nombres premiers ne sont pas en quantité finie", la négation du fini étant l'infini. C'est pourtant ce type d'énoncé négatif qui amène à raisonner par l'absurde, comme le propose Terracher, en supposant que les nombres premiers soient en quantité finie et en démontrant par le chemin emprunté par Euclide que cela mène à une contradiction.

Dans les huit lignes de la partie "démonstration" de l'ouvrage d'Antibi, il n'est pas question d'infini. Si ce sont ces lignes, à l'exclusion de l'énoncé, qu'Antibi attribue à Euclide, la critique précédente pourrait tomber. Cependant Euclide ne parle pas de *tous les nombres premiers compris entre 2 et p*, mais se contente de considérer un produit de nombres premiers donnés. C'est beaucoup plus simple et on évite d'introduire l'ordre des nombres premiers[13]. Par ailleurs, qui peut affirmer aujourd'hui qu'il connaît tous les nombres premiers compris entre 2 et certains très grands nombres premiers connus ? La *suite des nombres premiers* pose des problèmes de construction qui méritent d'être évoqués lorsqu'on l'utilise.

De plus, avec un énoncé faisant état de *l'infinité des nombres premiers*, on comprend mal l'intérêt qu'il y a à gommer la question de l'infini de la partie "démonstration". D'autant que ce gommage pose problème : suffit-il de dire "il en résultera bien" pour démontrer que si on trouve un nombre premier strictement supérieur à un nombre premier quelconque, la "suite des nombres premiers" est infinie ? Quelle définition d'un ensemble infini a-t-elle été posée ? Encore une fois, si infini est la négation de fini, la proposition prend un caractère négatif et la démonstration par l'absurde de Terracher est plus naturelle. Il en est de même s'il s'agit de démontrer que l'ensemble des nombres premiers n'a pas de borne supérieure.

Pourquoi ne pas présenter la démonstration et l'énoncé d'Euclide, homogènes en ce qu'ils restent sur le terrain du fini, en abordant avec les élèves quelques aspects du problème de l'infini, implicite dans la proposition mais incontournable ?

---

[13] Pour prouver qu'il existe un nombre premier strictement supérieur à tout nombre entier n, le plus simple est de considérer n! + 1, ce que font de nombreux manuels.

En conclusion .

Finalement, on peut penser que construire une activité autour de la proposition d'Euclide et de sa démonstration aurait été plus rentable :
- en évitant des erreurs sur le cadre historique euclidien,
- en restituant l'élégance et la rigueur de la démonstration d'Euclide,
- en développant à partir de là quelques idées sur la question de l'infini.

Développons un peu ce dernier point. Il ne s'agit pas d'aborder l'infini avec les outils de la théorie des ensembles en TS. Mais il est possible de citer quelques paradoxes apparus dés l'antiquité sur la question de l'infini. Les plus cités sont ceux de Zénon d'Élée, mais ils sont difficiles à interpréter et portent plutôt sur le problème du continu[14].

La notion commune n°8 des *Éléments* d'Euclide,

Et le tout est plus grand que la partie[15]

ne pose aucun problème quand on reste dans le domaine du fini, mais a été une source inépuisable de paradoxes lorsqu'on s'est situé dans le domaine de l'infini. Nous pouvons citer Proclus (Vème siècle de notre ère) qui, après avoir constaté qu'un diamètre coupe un cercle en deux demi-cercles, écrit :

> *Si par le centre on peut mener une infinité de diamètres, il en résultera que les demi-cercles sont doublement infinis quant au nombre. Cette difficulté a été invoquée par certains contre l'infini divisibilité des grandeurs. Nous répondrons qu'une grandeur est divisible à l'infini, mais non pas en une infinité de parties.* […]
>
> *Avec un diamètre sont donc engendrés deux demi-cercles et les diamètres ne sont jamais infinis en nombre, même si on peut indéfiniment en prendre.*[16]

Au VIème siècle, un autre auteur, Jean Philopon, s'oppose à l'idée d'un monde sans commencement :

> *Si le monde était sans commencement, le nombre (des hommes) engendrés jusqu'au temps de Socrate, par exemple, serait infini, mais si on ajoutait à ce nombre celui des hommes engendrés depuis Socrate jusqu'au temps présent, alors quelque chose serait plus grand que l'infini, ce qui est impossible. Et le nombre des hommes engendrés étant infini, celui des chevaux engendrés étant infini, l'infini serait*

---

[14] Lire à ce sujet : M. Caveing, *Zénon d'Élée. Prolégomènes aux doctrines du continu. Étude historique et critique des Fragments et témoignages*, Vrin, Paris, 1982.

[15] Euclide, *Les Éléments*, volume 1, page 179.

[16] Cité par Tony Levy dans : T. Levy, *Figures de l'infini, les mathématiques au miroir des cultures*, Le Seuil, Paris, 1987, page 74.

donc doublé ; si l'on y ajoute le nombre des chiens, l'infini serait triplé (…). Voilà qui est impossible à l'extrème. Car il n'est rien plus grand que l'infini …[17]

Citons enfin Galilée :

Salviati : Si je dis que les nombres pris dans leur totalité, en incluant les carrés et les non-carrés, sont plus nombreux que les carrés seuls, j'énoncerais, n'est-ce pas une proposition vraie.

Simplicio : Très certainement.

Salviati : Si je demande maintenant combien il y a de nombres carrés, on peut répondre sans se tromper, qu'il y en a autant que de racines correspondantes, attendu que tout carré a sa racine et toute racine son carré, qu'un carré n'a pas plus de racine, et une racine pas plus d'un carré.

Simplicio : Exactement.

Salviati : Mais si je demande combien il y a de racines, on ne peut nier qu'il y en a autant que de nombres, puisque tout nombre est la racine d'un carré ; cela étant, il faudra donc dire qu'il y a autant de nombres carrés qu'il y a de nombres, puisqu'il y a autant de racine, et que les racines représentent l'ensemble des nombres ; et pourtant nous disions au début qu'il y a beaucoup plus de nombres que de carrés, étant donné que la plus grande partie des nombres ne sont pas des carrés […]

Simplicio : Qu'en conclure dans ces conditions ?

Salviati : À mes yeux la seule issue possible est de dire que l'ensemble des nombres est infini, que le nombre des carrés est infini, et le nombre de leurs racines pareillement ; que le total des carrés n'est pas inférieur à l'ensemble des nombres, ni celui-ci supérieur à celui-là, et, finalement que les attributs "égal", "plus grand" et "plus petit" n'ont pas de sens pour les quantités infinies, mais seulement pour les quantités finies.[18]

On peut après cela donner un statut positif à la notion d'ensemble infini avec la définition de Dedekind d'un ensemble infini comme ensemble en correspondance biunivoque avec un de ses sous-ensembles stricts.

---

[17] T. Levy, *Figures de l'infini …*, page 85. On trouvera dans cet ouvrage des citations se rapportant au même problème chez de nombreux auteurs arabes, ou dans l'Europe du Moyen Age.

[18] G. Galilée, *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles,* trad. M. Clavelin, Armand Colin, Paris, 1970. On trouvera cet extrait, ainsi que d'autres approches sur l'infini en mathématiques dans T. Gilbert et N. Rouche, *La notion d'infini,* Ellipses, Paris, 2001.