"Dimissis incruciationibus"

ou

la première apparition d'une racine carrée d'une quantité moindre que zéro

Jérôme Cardan : Ars Magna, Nüremberg 1545

Le Grand Art, ou les règles de l'Algèbre, chap.37

Denis DAUMAS (groupe Histoire des Maths)

Le nom de Jérôme Cardan (Pavie 1501, Rome 1576) est devenu aujourd'hui un nom commun, celui du système qui permet aux roues avant d'une automobile d'être à la fois motrices et directrices ; cette articulation dont il avait effectivement donné une description servait à son époque à maintenir horizontale la boussole des navires. En dehors de l'histoire des mathématiques[i], on trouve également son nom dans des encyclopédies de médecine. Mais peu nombreux sont les domaines qui ont échappé à ce personnage, très représentatif de la renaissance[ii] : médecine, mathématiques, astronomie, astrologie, philosophie, physique … Deux de ses passions, le jeu et l'astrologie, l'ont placé dans des situations périlleuses et ont certainement contribué à lui faire connaître les prisons de l'Inquisition[iii].

Le passage auquel nous consacrons cet article est extrait de *Ars Magna sive de regulis algebraicis* (*Le Grand Art ou les règles de l'Algèbre*), publié pour la première fois à Nüremberg en 1545[iv]. C'est dans cet ouvrage que sont présentées pour la première fois les formules générales de résolution des équations du troisième et du quatrième degré. Cette publication, en 1545, des formules de résolution des équations du troisième degré a été l'occasion d'un des plus célèbres conflits de l'histoire des mathématiques, entre Cardan et son élève Ferrari d'une part, et Tartaglia d'autre part. Tartaglia accusait Cardan d'avoir, par cette publication, trahi le serment qu'il lui avait fait de ne pas divulguer les formules qu'il lui avait confiées. Cardan, tout en reconnaissant ses promesses s'est défendu en expliquant

---

[i] De nombreux manuscrits mathématiques de Cardan ont été perdus (parfois détruits par Cardan lui-même). Il nous reste toutefois une œuvre mathématique considérable. Citons : *Practica Arithmeticæ*, *Ars Magna Arithmeticæ*, *De Proportionibus*, *Ars Magna sive de regulis algebraicis*, *De Regula Aliza Libellus*, et enfin *De Ludo Aleæ* que certains considèrent comme le premier traité de calcul des probabilités.

[ii] *Il a cru, et avec lui la plupart des penseurs de la Renaissance, que la création humaine pouvait être supérieure à la créature,* dit de Cardan J.-C. Margolin dans l'article "Renaissance" de l'*Encyclopædia Universalis* (*Encyclopædia Universalis*, tome 14, Paris, 1980, page 64).

[iii] Le fait d'avoir dressé l'horoscope du Christ est souvent cité à ce propos. On peut ajouter comme pièce à charge le fait d'avoir dédicacé son *Ars Magna* à Andréas Osiander (1498-1552), érudit allemand et théologien très engagé dans la Réforme. C'est Osiander qui a rédigé la célèbre préface au *De Revolutionibus Orbium Celestum* de Copernic, dans laquelle il tente un compromis et affirme, contre l'avis de Copernic, que la théorie copernicienne ne prétend pas expliquer la réalité, mais est seulement un moyen commode pour les calculs.

[iv] Il y a deux autres éditions de l'*Ars Magna*, l'une à Lyon en 1563 dans ses *Œuvres Complètes*, l'autre en 1570 à Bâle.

qu'il avait découvert les mêmes formules dans les papiers d'un mathématicien vénitien, Scipione del Ferro, décédé une dizaine d'années avant que Tartaglia ne trouve à son tour les fameuses formules : il aurait ainsi publié, en les améliorant et en apportant la démonstration, la découverte de Scipione del Ferro et non celle de Tartaglia ! Cardan cite lui-même les noms de Scipione del Ferro et de Tartaglia dans le chapitre où il traite des équations du troisième degré, comme il cite celui de Ludovico Ferrari dans celui où il traite de celles du quatrième degré, mais l'histoire ne retiendra que Cardan.

Cardan avait reçu de son père une solide formation mathématique, basée sur l'étude des *Eléments* d'Euclide. Mais il a eu connaissance de l'Algèbre des Arabes ; il cite al-Khwārizmī (qu'il appelle "Mahomet fils de Moïse l'Arabe"[v]) à propos des équations du second degré, utilise les règles de l'al jabr (restauration) et de l'al muqābala (comparaison), adopte les notations algébriques de son époque avec parfois des variantes qui lui sont propres. En voici un exemple :

1.quad. p̃ .2.pos.æq.48[vi]

où quad, abréviation de *quadratus* désigne le carré de l'inconnue, pos, abréviation de *positio*, désigne l'inconnue[vii], p̃ , pour *plus*, désigne l'addition (la soustraction est notée m̃ pour *minus*) et æq, abréviation de *æqualis*, signifie égal. L'équation posée par Cardan correspond donc à celle que nous notons aujourd'hui

$$x^2 + 2x = 48.$$

Un autre aspect remarquable de l'*Ars Magna* est la place accordée aux racines négatives des équations. Certes, elles sont qualifiées de *fictiæ*, ce que l'on peut traduire par fictives voire fausses, mais loin d'être écartées, elles sont l'objet de plusieurs passages importants. Dans certains, il montre comment on peut transformer une équation pour que la racine négative devienne une racine positive, dans des problèmes où il est question d'argent Cardan interprète les racines négatives comme des dettes (ce qui est une façon de revenir à des nombres positifs !). Par ailleurs Cardan n'envisage ni constantes négatives ni soustractions quand il pose une équation. Il ne peut donc traiter de l'équation générale du second, du troisième ou du quatrième degré et doit, comme ses prédécesseurs, envisager séparément différentes formes d'équations, par exemple, pour le second degré :

$$x^2 = ax + N \,;\, N = x^2 + ax \,;\, ax = x^2 + N$$[viii].

Au chapitre 37 il revient en particulier sur le "cas irréductible" (nous dirions le cas où le discriminant est négatif) des équations du second degré. En traitant de ce cas au chapitre 5, il avait affirmé *si le nombre ne peut être retranché du carré de la moitie de la première puissance, le problème est lui-même un problème faux, et ce qui a été proposé ne peut pas être*. Pourtant, dans le passage qui suit, il va poursuivre les calculs, jusqu'à envisager la racine carrée d'une quantité moindre que zéro.

---

[v] Son nom complet est Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī.

[vi] Les symboles utilisés par Cardan ont évolué : dans l'édition de 1545 de l'*Ars Magna*, Cardan utilise m: et p: au lieu de m̃ et de p̃ utilisés dans celle de 1563.

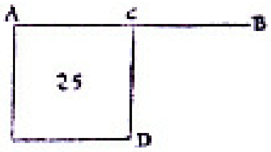
[vii] Il y a ici une différence de notation avec la tradition des algébristes italiens qui désignaient en général l'inconnue par *cosa*, noté co, son carré *censo*, noté ce, son cube *cubo*, noté cu. Le terme *cosa* deviendra *coss* en Allemagne et les "cossistes" sont les algébristes. L'usage de lettres de l'alphabet pour désigner les inconnues n'apparaît que plus tard. François Viète, en 1593, choisit les lettres majuscules : les voyelles pour les quantités inconnues, les consonnes pour les quantités données.

[viii] Dans ces équations, a et N sont des constantes positives. Remarquons que, de cette manière, il n'envisage jamais d'équations du second degré qui ont deux racines négatives. En effet ces équations sont de la forme $x^2 + ax + N = 0$, qui n'entre pas dans les formes d'équations envisagées.

exemplum, si quis dicat, diuide 10 in duas partes, ex quarum unius in reliquam ductu, producatur 30, aut 40, manifestum est, quòd casus seu quæstio est imposibilis, sic tamē operabimur, diuidemus 10 per æqualia, & fiet eius medietas 5, duc in se fit 25, auferes ex 25, ipsum producendum, utpote 40, ut docui te, in capitulo operationum, in sexto libro, fiet residuum m: 15, cuius ℞ addita & detracta a 5, ostendit partes, quæ inuicem ductæ producunt 40, erunt igitur hæ, 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15.

DEMONSTRATIO

Vt igitur regulæ uerus pateat intellectus, sit A B linea, quę dicatur 2
10, diuidenda in duas partes, quarū rectangulum debeat esse 40, est aūt 40 q̄druplū ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B, igitur fiat A D, quadratum A C, dimidij A B, & ex A D auferatur quadruplum A B, absq; numero, ℞ igitur residui, si aliquid maneret, addita & detracta ex A C, ostenderet partes, at quia tale residuum est minus, ideo imaginaberis ℞ m: 15, id est differentiæ A D, & quadrupli A B, quam adde & minue ex A C, & habebis quæsitum, scilicet 5 p: ℞ v: 25 m: 40, & 5 m: ℞ v: 25 m: 40, seu 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15, duc 5 p: ℞ m: 15 in 5 m: ℞ m: 15, dimißis incruciationibus, fit 25 m: m: 15, quod est p: 15, igitur hoc productum est 40, natura tamē A D, non est eadem cū natura 40, nec A B, quia superficies est remota à natura numeri, & lineæ, proximius tamē huic quantitati, quę uere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid sit est, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, & à ℞ aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplū, in hoc casu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratū dimidij 10 ad 40, fit 65, ab huius ℞ minue 5, & adde etiam 5, habebis partes secundum similitudinem, ℞ 65 p: 5 & ℞ 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10, non iuncti faciunt 10, sed ℞ 260, & hucusq; progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo est subtile, ut sit inutile.



5 p: ℞ m: 15
5 m: ℞ m: 15
25 m: m: 15 q̄d. est 40

QVÆSTIO IIII.

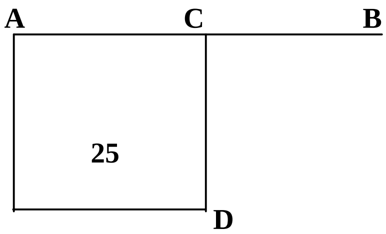
Fac de 6 duas partes, quarum quadrata iuncta sint 50, hæc soluitur per primam, non per secundam regulam, est enim de puro m: ideo duc 3 dimidium 6 in se, fit 9, minue ex dimidio 50, quod est 25, fit re-

Cardan : *Ars Magna sive de regulis algebraicis,* chapitre 37, règle 2.

[…] [Je vais donner] un exemple ; si l'on te dit, partage 10 en deux parties dont le produit fasse 30 ou 40, il est évident que ce cas ou ce problème est impossible, nous procèderons cependant ainsi : nous partagerons 10 en deux parties égales, et la moitié fera 5, multiplie la par elle-même, cela donne 25 ; de 25 tu retrancheras le produit lui-même, c'est-à-dire 40, et comme je te l'ai enseigné dans le chapitre sur les opérations, au sixième livre, il restera -15[ix] dont la racine carrée respectivement ajoutée et retranchée à 5 fait voir les parties qui multipliées l'une par l'autre font 40, celles-ci seront donc $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$[x].

DÉMONSTRATION

Pour que la vraie signification de cette règle soit claire, soit à partager une ligne AB, que l'on pose égale à 10, en deux parties dont le rectangle doit être 40. Comme 40 est le quadruple de 10, nous voulons le quadruple de la ligne AB tout entière. Soit donc le carré AD[xi], de côté AC moitié de AB, de AD on retranche le quadruple de AB. S'il restait quelque chose, sa racine carrée, respectivement ajoutée et retranchée à AC nous donnerait les parties cherchées. Mais, comme le reste est moins [que zéro], tu imagineras $\sqrt{-15}$, où -15 est la différence de AD avec le quadruple de AB, que tu dois ajouter et retrancher de AC, tu auras ce qui était cherché, à savoir $5 + \sqrt{25-40}$ et $5 - \sqrt{25-40}$, ou $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$. Fais le produit de $5 + \sqrt{-15}$ par $5 - \sqrt{-15}$, une fois passés les supplices[xii], tu trouveras $25 - (-15)$, ce qui est $+15$[xiii], et donc ce produit est 40. Cependant la nature de AD n'est pas la même que la nature de 40, ou de AB car une surface est loin de la nature du nombre ou de la ligne[xiv], cependant plus proche de cette quantité, qui est vraiment sophistiquée, parce qu'à travers elle l'on ne peut poursuivre les travaux, comme avec les purs moins et les autres, ni rechercher ce qu'il en serait si l'on ajoutait le carré de la moitié du nombre au nombre produit et si l'on ajoutait et retranchait à la racine carrée du résultat la moitié du dividende. Dans l'exemple, où il faut partager 10 en deux parties dont le produit est 40, si tu ajoutais 40 à 25, carré de la moitié de 10, cela ferait 65, et si tu ajoutais et retranchais 5 à la racine carrée de ce nombre, tu aurais de façon semblable les parties $\sqrt{65} + 5$ et $\sqrt{65} - 5$. Mais ces nombres diffèrent de 10, et leur somme ne vaut pas 10 mais $\sqrt{260}$. Et la subtilité arithmétique est poussée jusqu'à cet extrême dont, comme je l'ai dit, la subtilité est telle qu'il en est inutile.



$5 + \sqrt{-15}$
$5 - \sqrt{-15}$

$25 - (-15)$ qui fait 40

[ix] Cardan a choisi le cas où le produit vaut 40 et le calcul du discriminant réduit de l'équation $x^2 - 10x + 40 = 0$ donne -15. Par commodité nous traduisons m:15 par -15, mais gardons-nous d'affirmer que pour Cardan le résultat moindre de zéro d'une soustraction est détaché de l'opération et a le statut d'un "nombre négatif".

[x] Cardan écrit : 5 p: ℞ m: 15 et 5 m: ℞ m 15, où ℞ est le symbole de la racine carrée, et p: et m: ceux de l'addition et de la soustraction.

[xi] AD ne désigne pas la diagonale du carré, mais le carré lui-même selon une tradition ancienne.

[xii] *dimissis incrutiationibus*, on aura reconnu le supplice de la croix auquel il faut résister et passer outre et effectuer les calculs avec $\sqrt{-15}$ comme s'il s'agissait d'un nombre alors qu'on l'avait présenté comme un pur produit de l'imagination ("tu imagineras").

[xiii] Encore une fois, le symbole p: est opératoire, la phrase signifie que cela revient à ajouter 15.

[xiv] La traduction du reste de la phrase est problématique, nous avons préféré à notre traduction littérale, très obscure, une interprétation qui lui donne une cohérence qui fait l'objet des commentaires qui suivent.

Commentaires.

Ce texte a une valeur historique dans la mesure où, pour la première fois, apparaît l'écriture de la racine carrée d'une quantité négative. Cette apparition est éphémère dans l'œuvre de Cardan : on ne la trouve que dans ce court chapitre 37 et Cardan ne l'exploite pas dans la résolution d'équations du second ou du troisième degré[xv]. C'est à Bombelli que reviendra, quelques années plus tard, le mérite d'utiliser systématiquement les racines carrées des quantités négatives pour traiter le "cas irréductible", c'est-à-dire les équations du type $x^3 = px + q$ où $p > 0$ et $q > 0$ sont tels que $27q^2 - 4p^3 < 0$. Pourtant, Cardan va au-delà de la seule écriture du symbole puisqu'il effectue des calculs en étendant, il est vrai au prix d'un véritable supplice, à ces choses qu'il faut "imaginer" les mêmes règles de calcul que pour les nombres.

Dans le paragraphe intitulé "démonstration", Cardan tente de justifier son résultat. Son premier travail est de transposer le problème dans un cadre géométrique : il faut partager un segment AB de longueur 10 en deux parties AE et EB, côtés d'un rectangle qui doit mesurer 40. Et à l'appui de sa "démonstration", Cardan fait une figure géométrique. Celle-ci n'éclaire guère le lecteur actuel qui préfère interpréter le problème posé en termes algébriques :

$$\text{trouver deux réels a et b tels que} \begin{cases} a + b = 10 \\ ab = 40 \end{cases}.$$

Nous savons que la solution est donnée par la résolution de l'équation du second degré :

$$x \in \mathbb{R}, x^2 - 10x + 40 = 0.$$

Nous reconnaissons dans les calculs de Cardan le discriminant (réduit) $5^2 - 40$ de cette équation, puis les formules donnant les solutions, lorsqu'il "reste quelque chose". Les mêmes formules donnent $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$, qu'il faut "imaginer" lorsqu'on force l'obstacle d'un reste négatif.

Le recours de Cardan au domaine de la géométrie est une référence à l'orthodoxie euclidienne ; pour les algébristes italiens du XVI^e siècle, c'est encore la géométrie qui assure la solidité de l'édifice mathématique. La construction géométrique des solutions d'une équation est l'assurance de leur réalité.

Pour autant la remarque de Cardan comme quoi une surface rectangulaire est quadruple d'une ligne (AB) reste obscure. Le produit d'une ligne par une ligne est une surface, mais le quadruple d'une ligne est une ligne. Or, c'est bien d'une surface, le carré qu'il désigne par sa diagonale AD, qu'il propose de retrancher le quadruple de AB. L'homogénéité géométrique voudrait pourtant que l'on retranche une surface d'une surface et donc le "rectangle" 40 du "carré" 25. Faut-il entendre par "quadruple de AB" le produit de la ligne AB par une ligne qui vaut 4 ?

Restons donc sur le terrain géométrique :

- si l'on partage un segment AB de longueur donnée S en E, nous aurons AE + EB = S.
- Nous avons à la fois

$$\begin{cases} \mathrm{AE} \times (\mathrm{AE} + \mathrm{EB}) = \mathrm{S} \times \mathrm{AE} \\ \mathrm{AE} \times (\mathrm{AE} + \mathrm{EB}) = \mathrm{AE}^2 + \mathrm{AE} \times \mathrm{EB} \end{cases}$$

d'où

$$\mathrm{AE}^2 + \mathrm{AE} \times \mathrm{EB} = \mathrm{S} \times \mathrm{AE}$$

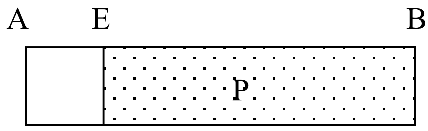
Par conséquent $\mathrm{AE} \times \mathrm{EB} = \mathrm{P}$ équivaut à $\mathrm{AE}^2 + \mathrm{P} = \mathrm{S} \times \mathrm{AE}$.

[xv] Cardan reviendra sur ces racines carrées de quantités "négatives" dans De *Regula Aliza*, publié en 1570. Il écrit : *℞ p: est p: ℞ m: quadrata nulla est iuxta usum communem*, ce que l'on peut traduire par "la racine carrée d'une quantité plus est plus, la racine carrée d'une quantité moins n'existe pas, selon l'usage commun".

Le problème posé par Cardan peut donc se traduire géométriquement par la recherche d'un point E du segment AB tel que $AE^2 + P = S \times AE$[xvi].

Au chapitre V de l'Ars Magna, Cardan se contente d'énoncer les formules qui donnent les solutions en ajoutant : *si le nombre ne peut être retranché du carré de la moitié de la première puissance, le problème est lui-même un problème faux, et ce qui a été proposé ne peut pas être*. Il ne démontre pas les formules car il s'agit d'un problème que les Grecs savaient résoudre géométriquement, comme en témoigne l'énoncé de la proposition 28 du livre VI des *Eléments* d'Euclide :

> *Sur une droite donnée, appliquer un parallélogramme égal à une [figure] rectiligne donnée par défaut d'une figure parallélogrammique semblable à une [figure parallélogrammique] donnée. Il faut en ce cas que la [figure] rectiligne donnée ne soit pas plus grande que le parallélogramme décrit sur la moitié [de la droite] et semblable à la [figure] en défaut.* [xvii]



En effet, si nous traduisons cet énoncé dans le cas particulier de notre problème, les parallélogrammes sont des rectangles et il s'agit de construire (*appliquer*) sur AB (la *droite donnée*) un rectangle AE × AB qui contienne, par défaut du carré AE^2 (ce carré est la *figure parallélogrammique semblable à une figure parallélogrammique donnée*, qui est donc dans ce cas semblable à un carré), un rectangle d'aire donnée P : nous retrouvons $AE \times AB = AE^2 + P$. Pour que la construction soit possible il faut, ainsi que l'annonce Euclide, que P ne soit pas plus grand que $\left(\frac{AB}{2}\right)^2$. Nous avons placé une construction géométrique des solutions en annexe car la difficulté à laquelle est confronté Cardan est précisément que la construction géométrique de ces solutions n'est pas possible dans les conditions de son problème.

La seule issue qui s'offre est de transformer le problème et Cardan a donné dans les chapitres précédents des pistes pour cela. Dans le cas des racines négatives d'une équation, pour lesquelles il n'y a pas de réalité géométrique (les grandeurs géométriques ne sont encore que des grandeurs positives), on peut transformer le problème et l'équation pour obtenir une racine positive. Par exemple, si le problème est d'ordre financier, au lieu de chercher la fortune de quelqu'un et poser une équation dont la racine qui nous intéresse est négative, on peut chercher le montant de ses dettes et avoir ainsi un résultat positif. Cardan donne des exemples de ce type et consacre la plus grande partie du premier chapitre de l'*Ars Magna* à associer des équations dont les racines sont opposées. Mais ici cela ne donne rien (*nec in puro m:*).

Cardan va donc explorer une autre voie : il y a dans les *Éléments* d'Euclide trois façons d'envisager ce que l'on a appelé l'"application des aires" :

- construire une surface de forme donnée qui ait la même aire qu'une surface donnée (application "parabolique" des aires).

[xvi] En posant AE = x, nous retrouvons une des formes des équations du second degré étudiées par Cardan :

$$x^2 + P = Sx,$$

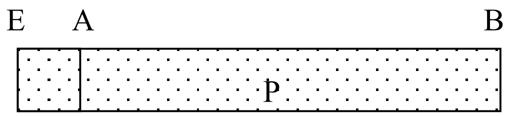
équivalente à l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ que nous posons aujourd'hui pour résoudre ce problème.

[xvii] Euclide, *Les Éléments*, trad. B. Vitrac, vol 2, page 227, PUF, Paris, 1994.

- construire une surface de forme donnée qui ait, par défaut d'une figure de forme donnée la même aire qu'une surface donnée (application "elliptique" des aires). C'est le cas de la proposition 28 du livre VI à laquelle conduit le problème posé par Cardan.
- construire une surface de forme donnée qui ait, par excès d'une figure de forme donnée, la même aire qu'une surface donnée (application "hyperbolique" des aires).

La variante "hyperbolique" euclidienne de la proposition 28 est la proposition 29 suivante :

> *sur une droite donnée, appliquer un parallélogramme égal à une [figure] rectiligne donnée par excès d'une figure parallélogrammique semblable à une [figure parallélogrammique] donnée.*[xviii]



Dans ce cas, on est conduit à l'équation de la forme AE × AB + AE^2 = P dont les solutions, rendues positives (en valeur absolue dirions-nous), sont celles qu'indique Cardan : $\sqrt{65} - 5$ et $\sqrt{65} + 5$. Une fois constaté que si le produit des deux vaut bien 40, c'est la différence et non la somme des deux qui vaut 10, c'est l'impasse et on peut conclure sur "l'extrême subtilité", c'est à dire "l'inutilité" des résultats obtenus en utilisant les racines carrées des quantités négatives.

[xviii] C'est la proposition 29 du Livre VI, Vitrac, page 229

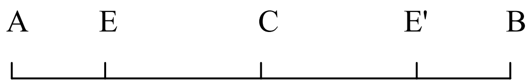
ANNEXE

Revenons sur la construction géométrique d'un point E d'un segment AB tel que $AE \times AB = AE^2 + P$, soit $AE \times EB = P$.

Tout d'abord, la moyenne arithmétique de AE et EB est $\frac{AB}{2}$ et leur moyenne géométrique est $\sqrt{AE \times EB}$: les Grecs savaient que la moyenne géométrique est toujours inférieure à la moyenne arithmétique, et que par conséquent le problème n'est possible que lorsque $\left(\frac{AB}{2}\right)^2$ est supérieur à P. Supposons cette condition remplie, et indiquons une construction géométrique du point E conforme aux propositions des *Eléments* d'Euclide.

Analyse :

1°) Si le problème a une solution E, il en a une autre E', symétrique de E par rapport à C, milieu de [AB] :



$$AE \times EB = AE' \times E'B$$

Il est donc légitime de chercher à construire E à partir du milieu C de [AB].

Dans ces conditions le problème est de chercher E tel que $(AC - EC)(AC + EC) = P$, ce qui donne $AC^2 - P = EC^2$ (on retrouve la condition $\left(\frac{AB}{2}\right)^2$ supérieur à P).

EC peut alors être construit de deux façons :

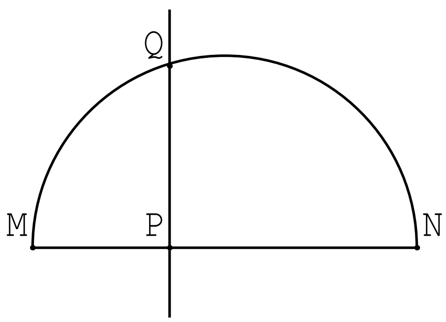
a) On construit le côté p d'un carré d'aire P, puis EC comme deuxième côté de l'angle droit d'un triangle rectangle d'hypoténuse AC et dont le premier côté de l'angle droit est p (théorème de Pythagore)

b) On construit un point D tel que $AC \times AD = P$. $AC^2 - P$ vaut alors $AC \times CD$ et EC est la moyenne proportionnelle (ou géométrique) de AC et CD.

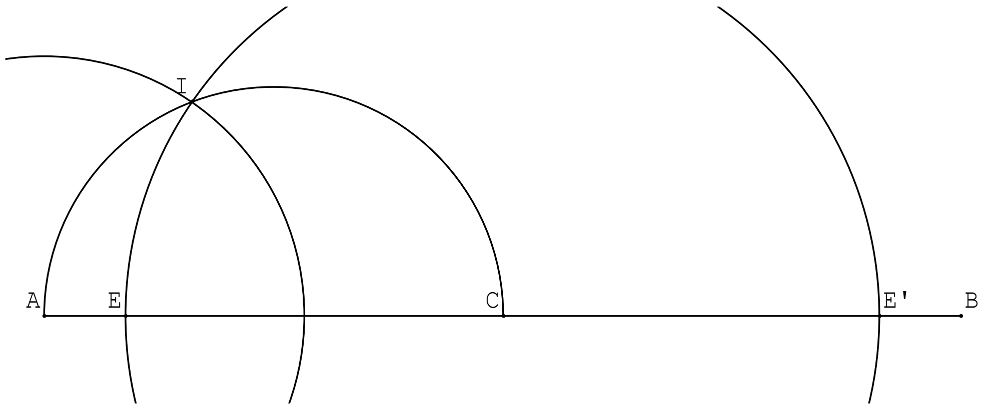
Synthèse :

Première construction :

a) construction de p : on décompose P en un produit (éventuellement $1 \times P$) de deux grandeurs P_1 et P_2 que l'on représente par deux segments MP et PN placés à la suite l'un de l'autre : la perpendiculaire en P à (MN) rencontre un demi-cercle de diamètre MN en Q tel que $PQ^2 = MP \times PN$ d'où $PQ = p$.



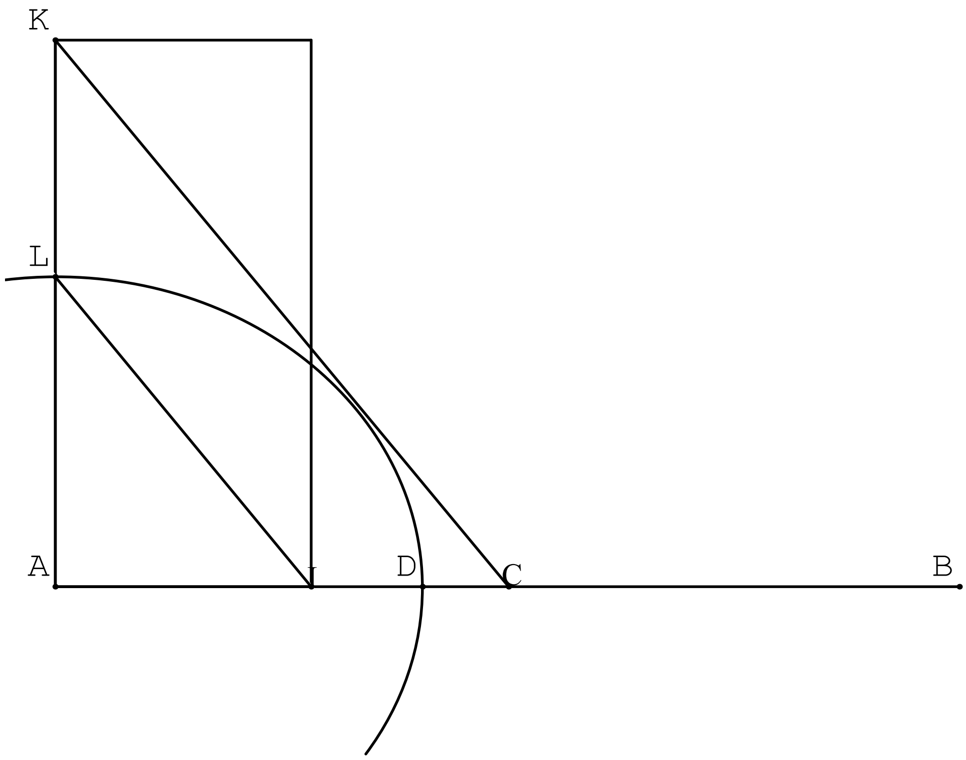
b) construction de EC : le cercle de centre A et de rayon p coupe un demi-cercle de diamètre [AC] en I tel que $CI^2 = AC^2 - P$, donc CI = CE et le cercle de centre C de rayon CI coupe [AB] en E et en E', la solution symétrique.



Deuxième construction :

a) construction de D : P étant l'aire d'un rectangle AIJK, où I est un point de [AB], la parallèle à (CK) coupe (AK) en L tel que $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{AL}{AK}$, d'où $AC \times AL = AI \times AK = P$.

Comme $AC = \dfrac{AB}{2}$ et $P < \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2$, nous avons AL < AC et le cercle de centre A et de rayon AL coupe [AC] en D tel que $AC \times AD = P$.



b) construction de E : la perpendiculaire en C à (AB) coupe un demi-cercle de diamètre BD en M tel que

$$CM^2 = CD \times CB = CD \times CA = (AC - AD) \times AC = AC^2 - AC \times AD.$$

Il reste donc à construire le point E du segment [AC] tel que CE = CM.