Sujet de mathématiques - BTS : Groupement D

Analyses Biologiques - Biochimie - Biotechnologies - Hygiène, propreté, environnement - Métiers de l'eau - Peintures, encres et adhésifs - Plastiques et composites - Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries.

Session 2006

EXERCICE 1 (12 points)

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille dépasse 6,5 mg par litre, on dit que l'eau dans cette bouteille est calcaire.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont,
sauf indication contraire, à arrondir à 10^{-3}

A. Loi binomiale et loi de Poisson

Dans un stock important de bouteilles, 7,5 % des bouteilles contiennent de l'eau calcaire.
On prélève au hasard 40 bouteilles dans le stock pour vérification du taux de calcium. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 40 bouteilles.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 40 bouteilles, associe le nombre de bouteilles de ce prélèvement qui contiennent de l'eau calcaire.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. On considère que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson .
Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson .

3. On désigne par X_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue au 2°.
Calculer $P(X_1 \leqslant 4)$. Traduire le résultat obtenu à l'aide d'une phrase.

B. loi normale

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source 1 » et « source 2 ». On rappelle que lorsque le taux de calcium dépasse 6,5 mg par litre dans une bouteille, l'eau de cette bouteille est dite calcaire.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production de la source 1, associe le taux de calcium de l'eau qu'elle contient. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart-type 1,5.

1. Calculer $P(Y \leqslant 6,5)$.

2. En déduire la probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production de la source 1 soit calcaire.

C. Probabilités conditionnelles

On suppose que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source 1 contienne de l'eau calcaire est $p_1 = 0,16$ et que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production de cette journée de la source 2 contienne de l'eau calcaire est $p_2 = 0,10$.
La source 1 fournit 70 % de la production totale des bouteilles d'eau et la source 2 le reste de cette production.
On prélève au hasard une bouteille d'eau parmi la production totale de la journée.
Toutes les bouteilles d'eau ont la même probabilité d'être tirées.
On définit les événements suivants :
A : « La bouteille d'eau provient de la source 1 » ;
B : « La bouteille d'eau provient de la source 2 » ;
C : « L'eau contenue dans la bouteille est calcaire ».

1. Déduire des informations contenues dans l'énoncé :
$P(A)$, $P(B)$, $P(C/A)$, $P(C/B)$.
(On rappelle que $P(C/A) = P_A(C)$ est la probabilité de l'événement C sachant que l'événement A est réalisé.)

2. Calculer $P(C \cap A)$ et $P(C \cap B)$.
3. Déduire de ce qui précède $P(C)$.
4. Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source 1 sachant qu'elle est calcaire.

D. Intervalle de confiance

Dans cette question on s'intéresse au taux de calcium de l'eau d'une grande quantité de bouteilles devant être livrées à une chaîne d'hypermarchés.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 bouteilles dans cette livraison.
Soit $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 bouteilles prélevées au hasard et avec remise dans la livraison, associe la moyenne des taux de calcium de l'eau contenue dans chacune des bouteilles de cet échantillon .

On suppose que $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type $\dfrac{\sigma}{10}$ avec $\sigma = 0,99$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10^{-2}, est $\overline{x} = 5,37$.

1. A partir des informations portant sur cet échantillon , donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ des taux de calcium de l'eau contenue dans chacune des bouteilles de la livraison.
2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne μ des taux de calcium de l'eau contenue dans chacune des bouteilles de la livraison, avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-2}.

EXERCICE 2 (8 points)

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 0,01y = 24$,
où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions sur $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 0,01y = 0$.
2. Déterminer la constante réelle a pour que la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(t) = a$ soit une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution v de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $v(0) = 0$.

B. Etude d'une fonction et calcul intégral

Soit v la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $v(t) = 2400(1 - e^{-0,01t})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$.
2. On désigne par v' la fonction dérivée de la fonction v.
   Calculer $v'(t)$ pour tout t de $[0;+\infty[$.
3. Déduire de ce qui précède le sens de variation de la fonction v sur $[0;+\infty[$.
4. Résoudre sur $[0;+\infty[$ l'équation $v(t) = 1200$.
   Donner la valeur exacte de la solution, puis une valeur arrondie à 10^{-1}.

C. Application des résultats de la partie B

Un réservoir contient 60 m^3 d'eau destinée à abreuver du bétail.
Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en heures.
A l'instant $t = 0$, se déverse dans le réservoir une eau polluée par une substance M.
Un système de trop plein permet de conserver à tout instant à partir de l'instant $t = 0$ un volume de 60 m^3 dans le réservoir.
On admet, qu'à l'instant t (exprimé en heures), le volume, **exprimé en litres**, de substance polluante M présente dans le réservoir est $v(t)$, où v est la fonction définie dans la partie B.

1. La santé du bétail est menacée lorsque le volume de substance M atteint 2 % du volume total du réservoir. Déduire d'un résultat obtenu à la partie B la valeur de t à partir de laquelle la santé du bétail est menacée par la présence dans le réservoir de substance M.
2. Le volume de substance M dans le réservoir peut-il dépasser 4 % du volume du réservoir ? Justifier la réponse à l'aide d'un résultat de la partie B.