

## Sujet de mathématiques - BTS : Groupement D

Analyses Biologiques - Biochimie - Biotechnologies - Hygiène, propreté, environnement -  
Métiers de l'eau - Peintures, encres et adhésifs - Plastiques et composites - Qualité dans  
les industries alimentaires et les bio-industries.

Session 2003

### EXERCICE 1 (11 points)

#### Partie A

On considère l'équation différentielle  $(E) : 4y' + y = 1200e^{-\frac{1}{4}x}$  où  $y$  est une fonction de la variable réelle  $x$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1. Déterminer la constante réelle  $a$  telle que la fonction  $h_1$  définie par  $h_1(x) = axe^{-\frac{1}{4}x}$  soit solution de  $(E)$ .
2. Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : 4y' + y = 0$  et en déduire les solutions de  $(E)$ .
3. Déterminer la fonction  $h$  solution de  $(E)$  qui vérifie  $h(6) = 0$ .

#### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[6; +\infty[$  par  $f(x) = 300(x - 6)e^{-\frac{1}{4}x}$ .

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Montrer que  $f'(x) = 75(10 - x)e^{-\frac{1}{4}x}$ .
3. Etudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[6; +\infty[$  et donner son tableau de variations.
4. Tracer la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal. (unités graphiques : 0,5 cm sur l'axe des abscisses ; 1 mm sur l'axe des ordonnées)

#### Partie C

Une société veut vendre des machines destinées à certaines entreprises. Le prix de vente minimal est fixé à 10 000 euros. Le nombre prévisible,  $y$ , de machines vendues, est fonction du prix proposé, en milliers d'euros,  $x$ . Une enquête auprès de clients potentiels a donné les résultats suivants :

$x_i$ : Prix proposé pour une machine en milliers d'euros	10	12.5	15	17.5	20	25
$y_i$ : Nombre prévisible de machines vendues au prix proposé	100	85	62	42	28	11

1.
  - a. Représenter les six points du nuage sur le graphique de la question B4.
  - b. On pose  $z_i = \ln \left( \frac{y_i}{x_i - 6} \right)$ . Donner les valeurs de  $z_i$  arrondies au millième le plus proche.
  - c. Donner une équation de la droite de régression de  $z$  en  $x$ ; les coefficients seront arrondis au millième le plus proche.
  - d. En déduire une expression approchée de  $y$  de la forme  $y = \alpha(x - 6)e^{\beta x}$ .
2. On admet dans cette question que le chiffre d'affaires est  $g(x) = xf(x)$  pour  $x \geq 10$ , où  $x$  est le prix proposé en milliers d'euros et  $f$  la fonction définie dans la partie B. En étudiant les variations de la fonction  $g$  déterminer pour quel prix le chiffre d'affaires est maximal et donner la valeur du maximum.

## EXERCICE 2 (9 points)

Deux machines  $M_A$  et  $M_B$  produisent, en grande série, des objets de masse théorique 180 grammes.

### Partie 1

On note  $X_A$  (respectivement  $X_B$ ) la variable aléatoire qui, à un objet pris au hasard dans la production de la machine  $M_A$  (respectivement  $M_B$ ) associe sa masse en grammes. On sait que  $X_A$  (respectivement  $X_B$ ) suit une loi normale de moyenne  $m_A$  (respectivement  $m_B$ ) et d'écart-type  $\sigma_A$  (respectivement  $\sigma_B$ ). Un objet est conforme si sa masse est comprise entre 178 g et 182 g.

1. On donne  $m_A = 179,8$  et  $\sigma_A = 1$ . Calculer la probabilité qu'un objet pris au hasard dans la production de la machine  $M_A$  soit conforme.
2. On donne  $m_B = 180$  et on sait que 98% des objets fabriqués par la machine  $M_B$  sont conformes. Calculer l'écart-type  $\sigma_B$  (résultat arrondi au centième).

### Partie 2

Dans la production totale, 40% des objets proviennent de la machine  $M_A$  et 60% de la machine  $M_B$ . La machine  $M_A$  produit 5% d'objets non conformes et la machine  $M_B$  en produit 2%.

1. On prélève au hasard un objet dans la production. Calculer la probabilité que cet objet soit conforme.
2. On prélève au hasard un objet dans la production et on constate qu'il est conforme. Quelle est alors la probabilité (arrondie au millième) que cet objet provienne de la machine  $M_A$  ?

### Partie 3

On admet que 96,8% des objets de la production sont conformes. Les objets sont stockés par boîtes de vingt. On désigne par  $Y$  la variable aléatoire qui associe à une boîte prise au hasard le nombre d'objets conformes de cette boîte.

1. Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par  $Y$ .
2. On choisit une boîte au hasard dans la production. Calculer la probabilité des événements suivants :
  - tous les objets sont conformes ;
  - au moins dix-huit objets sont conformes.

### Partie 4

On admet que la variable aléatoire  $\bar{X}$  qui associe à un échantillon de taille 100 sa masse moyenne en grammes suit une loi normale de moyenne  $m$  et d'écart-type 0,092.

La valeur exacte de la masse moyenne  $m$  des objets étant inconnue, on prélève au hasard un échantillon de 100 objets dont la masse moyenne est 179,93 g . Déterminer un intervalle de confiance , au seuil de risque 10%, de la valeur de  $m$ .