Sujet de mathématiques - BTS : Groupement D

Analyses Biologiques - Biochimie - Biotechnologies - Hygiène, propreté, environnement - Métiers de l'eau - Peintures, encres et adhésifs - Plastiques et composites - Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries.

Session 2000

EXERCICE 1 (9 points)

Etude du résultat de la pesée d'un objet de masse m (exprimée en grammes).
On admet que la variable aléatoire X qui prend comme valeurs les résultats de la pesée d'un même objet donné suit la loi normale de moyenne m et d'écart-type σ.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que $m = 72,40$ et $\sigma = 0,08$.

1. Calculer la probabilité des événements suivants (les résultats seront arrondis au millième le plus proche) :

a. « $X > 72,45$ »

b. « $X < 72,25$ »

c. « $72,30 < X < 72,50$ ».

2. Déterminer le réel strictement positif h (arrondi au centième) tel que la probabilité pour que X prenne une valeur dans l'intervalle $[m - h, m + h]$ soit égale à 0,989.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que m et σ sont inconnus.
On a relevé dans la tableau suivant les résultats de 10 pesées d'un même objet :

masse en grammes	72,20	72,24	72,26	72,30	72,36	72,39	72,42	72,48	72,50	72,54

Les résultats seront arrondis au centième le plus proche.

1. Calculer la moyenne et l'écart-type de cet échantillon .

2. En déduire des estimations ponctuelles de la moyenne m et de l'écart-type σ de la variable X.

3. Dans la suite, on admet que la variable aléatoire qui à tout échantillon de 10 pesées associe la moyenne de ces pesées suit une loi normale . En prenant pour écart-type la valeur estimée en 2), donner un intervalle de confiance au seuil de 5% de la moyenne m.

4. L'écart-type de l'appareil de pesée, mesuré à partir de nombreuses études antérieures, est en réalité pour un objet ayant environ cette masse, de 0,08. Dans cette question, on prend donc $\sigma = 0,08$

a. Donner un intervalle de confiance au seuil de 5% de la moyenne m.

b. Déterminer α (à l'unité près) pour que au seuil de α %, un intervalle de confiance de m soit

$$[72,31; 72,43]$$

EXERCICE 2 (11 points)

Partie A

Suite à un incident nucléaire, on a consigné dans le tableau suivant, heure par heure, les résultats fournis par un appareil de mesure de la radioactivité. Les N_i sont des nombres entiers représentant le nombre de particules recueillies par l'appareil pendant une seconde.

t_i en heure	0	1	2	3	4	5	6
N_i	170	102	63	39	24	16	9

1. On pose $z_i = \ln(N_i - 2)$ pour tout i variant de 0 à 6 (où ln désigne le logarithme népérien).
Donner les valeurs de z_i arrondies au millième le plus proche.
Représenter le nuage $(t_i; z_i)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 3 cm pour une heure en abscisse, 4 cm pour une unité en ordonnée).

2. Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(t_i; z_i)$ et donner une équation de la droite de régression de z en t (les coefficients seront arrondis au millième le plus proche).

3. Donner l'expression de N en fonction de t déduite de cet ajustement.

4. En supposant que l'expression obtenue en 3) reste valable, déterminer à partir de quel relevé on obtiendra une valeur de N inférieure ou égale à 3.

Partie B

Une étude plus approfondie mène à faire l'hypothèse que la fonction, qui au temps t (en heure), associe le nombre $N(t)$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y' = \alpha(y - 2) \text{ où } \alpha \text{ est une constante réelle.}$$

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle ci-dessus.

2. En déduire la solution qui prend la valeur 170 pour t=0 et la valeur 9 pour t=6.

Partie C

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 168\mathrm{e}^{-0,53x} + 2$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 mm sur l'axe des ordonnées)

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; interpréter géométriquement le résultat obtenu.

2. Chercher les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$

3. Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

4. Résoudre l'équation $f(x) \leqslant 30$ dans l'intervalle $[0; +\infty[$; vérifier graphiquement.

5. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1; 6]$; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.