Sujet de mathématiques - BTS : Groupement D

Analyses Biologiques - Biochimie - Biotechnologies - Hygiène, propreté, environnement - Métiers de l'eau - Peintures, encres et adhésifs - Plastiques et composites - Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries.

Session 1999

Durée : 1 heure

Coefficient : 1

Les calculatrices de poche sont autorisées
Le formulaire officiel est autorisé
La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies

EXERCICE 1 (12 points)

Les statistiques ont permis d'établir qu'en période de compétition la probabilité , pour un sportif pris au hasard, d'être déclaré positif au contrôle antidopage est égale à 0,02.

1. La prise d'un médicament M peut entraîner, chez certains sportifs, un contrôle antidopage positif. En période de compétition, ce médicament , qui diminue fortement les effets de la fatigue musculaire, est utilisé par 25 % des sportifs. La probabilité , pour un tel sportif, d'être déclaré positif au contrôle antidopage est alors égale à 0,05.
Pour un sportif choisi au hasard en période de compétition, on appelle A l'événement : « utiliser le médicament M » et B l'événement : « être déclaré positif au contrôle antidopage ».

a. Préciser les probabilités suivantes : $P(A)$, $P(B)$ et $P(B/A)$.
Calculer alors $P(A \cap B)$.

b. Pour un sportif choisi au hasard en période de compétition calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
E_1 "utiliser le médicament M sachant qu'il est déclaré positif au contrôle antidopage "
E_2 "être déclaré positif au contrôle antidopage sachant qu'il n'utilise pas le médicament M " .

2. Au cours d'une compétition, on fait subir des contrôles antidopage à un échantillon $\mathcal{E}$ de 50 sportifs choisis au hasard. On désigne par X la variable aléatoire qui mesure le nombre d'individus dont les contrôles sont déclarés positifs. On admet que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50; 0,02)$.
Pour les questions a) et b), les résultats seront arrondis à 10^{-3}

a. Calculer la probabilité qu'aucun contrôle ne soit déclaré positif.
Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

b. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre. Calculer alors la probabilité $P(X \geqslant 1)$.

3. On décide de construire un test qui, à la suite des contrôles sur un échantillon $\mathcal{E}$ de 50 sportifs prélevé au hasard, permette de décider si, au seuil de signification de 10%, le pourcentage de sportifs contrôlés positifs est de $p = 0,02$.

a. *Construction du test bilatéral :* Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 sportifs contrôlés, associe le pourcentage de sportifs contrôlés positivement. On suppose que F suit la loi normale $\mathcal{N}\left(p; \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$ où $p = 0,02$ et $n = 50$.
Enoncer une hypothèse nulle H_0 et hypothèse alternative H_1 pour ce test bilatéral.
Déterminer, sous l'hypothèse H_0, le réel positif a tel que $P(p - a \leqslant F \leqslant p + a) = 0,9$.
Enoncer la règle de décision du test.

b. *Utilisation du test :*
Dans l'échantillon $\mathcal{E}$ deux contrôles antidopage ont été déclarés positifs. En appliquant la règle de décision du test à cet échantillon assimilé à un échantillon aléatoire non exhaustif, peut-on conclure au seuil de risque 10 % que l'échantillon observé est représentatif de l'ensemble de la population sportive ?

EXERCICE 2 (8 points)

Après la prise d'un médicament M, le principe actif traverse la muqueuse intestinale puis passe dans le sang où il est dégradé puis évacué.
On suppose que ce procesus démarre à l'instant $t = 0$.
A l'instant t, on appelle $Q(t)$ la quantité de principe actif présente dans le sang ; $Q(t)$ est exprimée en mg et le temps t est exprimé en minutes ($0 \leqslant t \leqslant 660$).
On suppose que $Q(0) = 0$ et on admet que la fonction Q est solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E) : \qquad 6\frac{dQ}{dt} + Q = -0,003t + 1,982$$

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$6\frac{dQ}{dt} + Q = 0$$

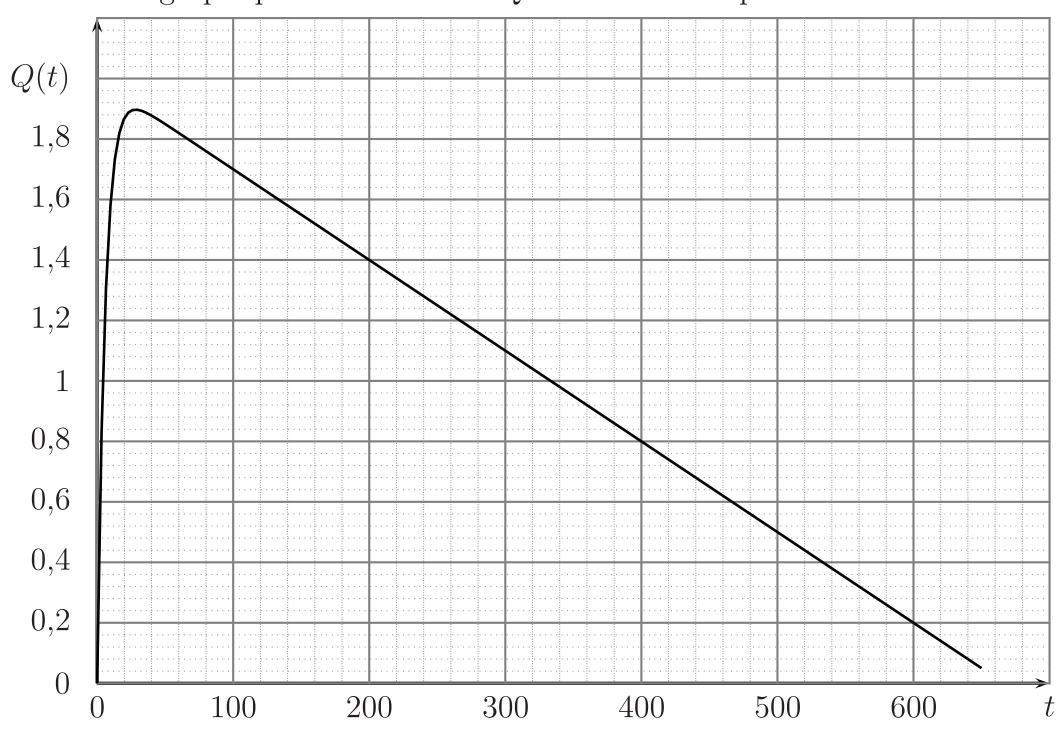
2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction : $t \mapsto at + b$ soit solution de l'équation différentielle (E).

3. **a.** Vérifier que la fonction Q définie pour $0 \leqslant t \leqslant 660$ par :

$$Q(t) = 2 - 0,003t - 2e^{-\frac{t}{6}}$$

est solution de (E) et satisfait la condition initiale $Q(0) = 0$.

b. La représentation graphique de la fonction Q est donnée ci-après :



Vérifier, par le calcul, le sens de variation de la fonction Q et montrer que la quantité de principe actif présente dans le sang est maximale à l'instant $t = -6 \ln 0,009$ (min).
Calculer la valeur maximale de $Q(t)$: On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.