Sujet de mathématiques - BTS : Groupement D

Analyses Biologiques - Biochimie - Biotechnologies - Hygiène, propreté, environnement - Métiers de l'eau - Peintures, encres et adhésifs - Plastiques et composites - Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries.

Session 1998

> Les calculatrices de poche sont autorisées conformément
> à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.
> La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront
> pour une part importante dans l'appréciation des copies

EXERCICE 1 (8 points)

Pour étudier l'érythroblastose, on injecte du fer radioactif par voie veineuse, on constate que sa concentration plasmatique décroît au cours du temps ; cette décroissance est caractérisée par une période T(temps en minutes au bout duquel la concentration a diminué de moitié).
Cet examen effectué sur un échantillon de 400 sujets sains a donné les résultats suivants :

Période	[60,65[	[65,70[	[70,75[	[75,80[	[80,85[	[85,90[	[90,95[	[95,100[	[100,105[	[105,110[	[110,115[	[115,120[	[120,125[	[125,130[
Nombre de sujets	5	11	18	29	40	51	57	54	48	35	25	15	8	4

1. Calculer une valeur approchée de la moyenne m_e et l'écart-type σ_e de cette série, arrondis au dixième le plus proche.

2. On admet que T, la variable aléatoire exprimant la période, suit la loi normale de paramètres m et σ ; donner des estimations ponctuelles pour m et σ.

3. Donner un intervalle de confiance pour m, au seuil de risque 5 %.

EXERCICE 2 (12 points)

Une étude sur le comportement d'organismes vivants placés dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence, a conduit à stipuler que l'évolution de la population suit l'équation différentielle suivante :

$$(E_1) : \qquad N'(t) = 2N(t) - 0,0045[N(t)]^2 \qquad (t \geqslant 0)$$

où le temps t est exprimé en heures et $N(t)$ représente le nombre d'individus présents dans l'enceinte à l'instant t.
Le nombre initial d'individus (à l'instant t=0) est $N_0 = 10^3$.

1. On pose $Y(t) = \dfrac{1}{N(t)}$

a. Calculer la dérivée de la fonction Y.

b. Montrer que Y vérifie l'équation différentielle :

$$(E_2) : \qquad Y'(t) = -2Y(t) + 0,0045 \qquad (t \geqslant 0)$$

c. Résoudre cette équation différentielle (E_2).
(on cherchera une solution particulière constante).

d. Montrer alors que, compte tenu de la condition initiale , on a :

$$N(t) = \frac{2}{0,0045 - 0,0025\,\mathrm{e}^{-2t}}$$

2. Soit f la fonction définie pour $t \in [0, +\infty[$ par : $f(t) = \dfrac{2}{-0,0025\,\mathrm{e}^{-2t} + 0,0045}$

a. Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

b. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$
(unités graphiques : 5 cm pour une heure sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 individus sur l'axe des ordonnées) représenter graphiquement f.

c. En admettant que $N(t) = f(t)$, au bout de combien de temps la population initiale aura-t-elle diminué de moitié ?