Sujet de mathématiques - BTS : Groupement D

Analyses Biologiques - Biochimie - Biotechnologies - Hygiène, propreté, environnement - Métiers de l'eau - Peintures, encres et adhésifs - Plastiques et composites - Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries.

Session 1997

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies

EXERCICE 1 (8 points)

On fait absorber une substance S, dosée à 2 mg de principe actif, à un animal. Cette substance libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle $f(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t ($t \geqslant 0$, donné en heures).
Après étude on constate que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 0,5y = 0,5\ \mathrm{e}^{-0,5t}$$

et qu'elle vérifie : $f(0) = 0$

1. Résoudre l'équation différentielle :
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 0,5y = 0$$

2. Déterminer le nombre réel α tel que la fonction : $t \mapsto \alpha t\ \mathrm{e}^{-0,5t}$ soit solution de l'équation différentielle (E).

3. Déterminer la solution générale de (E). En déduire la solution de (E) satisfaisant la condition initiale .

4. On admet que la quantité totale $Q(x)$ de principe actif libérée par le produit S dans le sang au bout de x heures est donnée (en mg) par :
$$Q(x) = \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$$
En admettant que la fonction F définie pour $t \geqslant 0$ par $F(t) = (-t-2)\ \mathrm{e}^{-0,5t}$ soit une primitive de f, calculer la quantité de principe actif libérée par le produit S au bout de 5 heures (donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-1} près).

EXERCICE 2 (12 points)

On s'intéresse aux effets d'une maladie M sur le taux X de certaines protéines dans le sang.

1. Une étude antérieure a permis de montrer que ce taux X, mesuré dans une unité convenable, suit une loi normale de moyenne 130 et d'écart-type $\sigma = 5,2$.
Calculer le pourcentage d'individus de la population dont le taux X est compris entre 125 et 140.

2. Afin de mesurer les effets de la maladie M sur le taux X de ces protéines on effectue dans un premier temps un calcul de probabilité . Dans une population de grand effectif on a constaté que 5% des individus sont atteints de la maladie M, 20% ont un taux de protéines considéré comme anormal et 3% sont atteints de la maladie M et ont un taux de protéines anormal.
Pour un individu choisi au hasard, on appelle A l'événement : "être atteint de la maladie M" et B l'événement : "avoir un taux de protéines anormal".

a. Préciser les probabilités suivantes : $P(A)$; $P(B)$; $P(A \cap B)$. En déduire $P(A \cup B)$.

b. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

c. Quelle est la probabilité pour un individu d'avoir un taux de protéines anormal sachant qu'il est atteint de la maladie M ?

d. Quelle est la probabilité pour un individu d'être atteint de la maladie M, sachant qu'il a un taux anormal de protéines ?

3. Dans un deuxième temps on effectue un test statistique de comparaison des moyennes de deux échantillons.
Pour cela on prélève au hasard dans la population un échantillon E_1 de 36 individus atteints de la maladie M et un échantillon E_2 de 36 individus sains.
Pour chacun de ces individus on mesure le taux de protéines . La moyenne obtenue pour l'échantillon E_1 est de 128 et la moyenne obtenue pour l'échantillon E_2 est de 131.
On admet que l'écart-type du taux de protéines dans chacune des populations parentes de E_1 et E_2 est égal à 5,2.
Au seuil de risque 5% peut-on considérer que la maladie M modifie le taux X de ces protéines ?