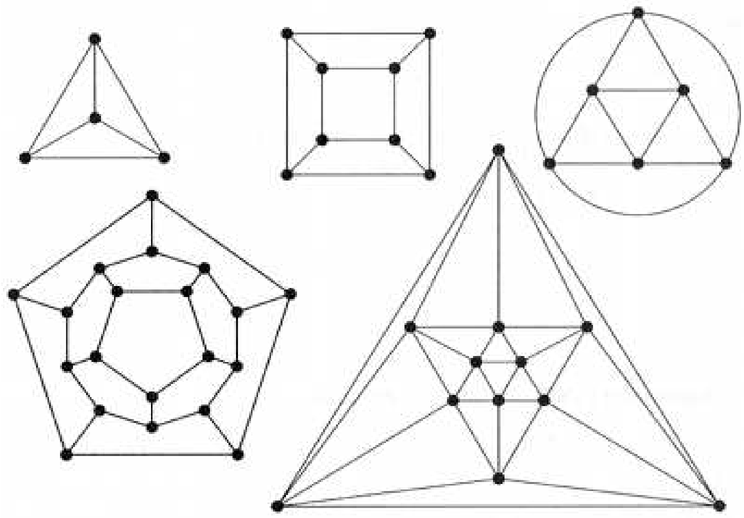
Les graphes

Niveau terminale ES



Nathalie DAVAL
http://mathematiques.daval.free.fr
Université de la Réunion - IREM - Juillet 2012.

Table des matières

1

Programme de terminale ES

Ce document constitue un cours sur les graphes du niveau de l'option de la terminale ES : on y trouvera tout d'abord quelques exemples « de la vie courante » ainsi que le vocabulaire de base, puis les différentes utilisations pratiques des graphes :

- recherche de l'existence d'une chaîne ou d'un cycle Eulérien,
- coloration d'un graphe,
- recherche d'une plus courte chaîne d'un graphe pondéré,
- caractérisation des mots reconnus par un graphe étiqueté,
- recherche d'un état stable d'un graphe probabiliste,
- caractérisation des graphes planaires (hors programme, mais intéressant !).

Voici un extrait du B.O. N° 4 du 30 août 2001 concernant l'enseignement de spécialité de mathématiques :

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Trois domaines sont abordés dans l'enseignement de spécialité : deux d'entre eux (suites et géométrie dans l'espace) prolongent directement le travail commencé en classe de première ; les paragraphes qui suivent expliquent le choix du troisième domaine et de la méthode de travail proposée.

Une ouverture sur la théorie des graphes

Ce choix est cohérent tant avec le programme de la classe antérieure qu'avec les exigences de formation ultérieure : on trouve en effet ici quelques applications intéressantes du calcul matriciel développé dans l'option de première ES ; par ailleurs, les problèmes résolus constituent une première approche, volontairement modeste, de situations complexes (d'ordonnancement, d'optimisation de flux, de recherche de fichiers informatiques, d'études de migrations de populations...) auxquelles de nombreux élèves seront par la suite confrontés, notamment en gestion ou en informatique. Ce thème sensibilise naturellement à l'algorithmique et, en montrant la puissance de la théorie des graphes pour la modélisation, permet un autre regard mathématique sur diverses situations.

Enfin, la présence des graphes dans les programmes permettra ultérieurement de définir des thèmes de TPE faisant intervenir des mathématiques consistantes.

Un travail axé sur la seule résolution de problèmes

Il n'est pas question de retomber dans les pièges du langage ensembliste des années 1970 *: toute présentation magistrale ou théorique des graphes serait contraire au choix fait ici. L'essentiel du travail réside dans la résolution de problèmes : résolution à l'initiative des élèves, avec ses essais et tâtonnements, ses hésitations pour le choix de la représentation en termes de graphe (quels objets deviennent arêtes ? lesquels deviennent sommets ?), la recherche d'une solution et d'un raisonnement pour conclure. Toute notion relative à la théorie des graphes absente de la liste de vocabulaire élémentaire du tableau ci-après est clairement hors programme. Cette liste doit suffire pour traiter tous les exercices proposés.*

On trouvera dans le document d'accompagnement des éléments de théorie des graphes nécessaires à la formation des enseignants ainsi qu'une liste d'exemples sans caractère normatif, couvrant largement le programme et illustrant le type de travail attendu ; chaque exemple est suivi d'une liste de contenus (termes ou propriétés) que celui-ci permet d'aborder ; un lexique en fin de ce document reprend la totalité des termes et propriétés du programme ainsi introduits. L'optique première étant la résolution de problèmes, on insistera plus sur le bon usage des mots que sur leur définition formelle. L'intérêt du lexique est de bien marquer des limites à ce qui est proposé.
À titre indicatif, la répartition horaire entre les différents chapitres peut être :
40 % pour les graphes ; 35 % pour les suites ; 25 % pour la géométrie dans l'espace.

CONTENU	***MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE***	***COMMENTAIRES***
Résolution de problèmes à l'aide de graphes		
Résolution de problèmes conduisant à la modélisation d'une situation par un graphe orienté ou non, éventuellement étiqueté ou pondéré et dont la solution est associée : *- au coloriage d'un graphe,* *- à la recherche du nombre chromatique,* *- à l'existence d'une chaîne ou d'un cycle Eulérien,* *- à la recherche d'une plus courte chaîne d'un graphe pondéré ou non,* *- à la caractérisation des mots reconnus par un graphe étiqueté et, réciproquement, à la construction d'un graphe étiqueté reconnaissant une famille de mots.* *- à la recherche d'un état stable d'un graphe probabiliste à 2 ou 3 sommets.*	*Les problèmes proposés mettront enjeu les graphes simples, la résolution pouvant le plus souvent être faite sans recours à des algorithmes.* *On indiquera que pour des graphes complexes, des algorithmes de résolutions de certains problèmes sont absolument nécessaires.* *On présentera un algorithme simple de coloriage des graphes et un algorithme de recherche de plus courte chaîne.*	*Il s'agit d'un enseignement entièrement fondé sur la résolution de problèmes.* *L'objectif est de savoir modéliser des situations par des graphes et d'identifier en terme de propriétés de graphes la question à résoudre.* *Ces algorithmes seront présentés dans les documents d'accompagnement et on restera très modeste quant à leurs conditions de mise en œuvre.*
Vocabulaire élémentaire des graphes : sommets, sommets adjacents, arêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, distance entre deux sommets, diamètre, sous-graphe stable, graphe connexe, nombre chromatique, chaîne eulérienne, matrice associée à un graphe, matrice de transition pour un graphe pondéré par des probabilités.	*Les termes seront introduits à l'occasion de résolution de problèmes et ne feront pas l'objet d'une définition formelle, sauf lorsque cette définition est simple et courte (degré d'un sommet, ordre d'un graphe par exemple).*	*Les élèves devront savoir utiliser à bon escient le vocabulaire élémentaire des graphes, vocabulaire qui sera réduit au minimum nécessaire à la résolution des problèmes constituant l'enseignement de cette partie.*
Résultats élémentaires sur les graphes : *- lien entre la somme des degrés des sommets et le nombres d'arêtes d'un graphe ;* *- conditions d'existence de chaînes et cycles eulériens ;* *- exemples de convergence pour des graphes probabilistes à deux sommets, pondérés par des probabilités.*	*On pourra, dans des cas élémentaires, interpréter les termes de la puissance n^e de la matrice associée à un graphe.*	

2

Mise en place : exemples

2.a Introduction historique

L'histoire de la théorie des graphes débuterait avec les travaux d'Euler au 18^{e} siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg, la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème du coloriage de cartes et du plus court trajet entre deux points.

C'est plus récemment en 1822 que le mot « graphes » est introduit par le mathématicien et géomètre anglais James Joseph Sylvester.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales, l'informatique...

Depuis le début du 20^{e} siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley, Berge et Erdös.

De manière générale, un graphe permet de représenter des objets ainsi que les relations entre ses éléments (par exemple réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques...)

En mathématiques, on retrouve les graphes dans la combinatoire, la théorie des ensembles, l'algèbre linéaire, la théorie des polyèdres, la théorie des jeux, l'algorithmique, les probabilités...

Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance que revêt l'aspect algorithmique.

Dans ce qui suit, nous allons donner un exemple caractéristique pour chacun des chapitres de ce document.

2.b Le loup, la biche et le chevalier

Exemple de découverte 1.

Un passeur doit aider un loup, une biche et un chevalier à traverser une rivière.
Il ne peut faire traverser qu'un des personnages à la fois et ne peut laisser seuls le loup et la biche, pas plus que le chevalier et le loup.

Comment peut-il faire ?

Non, ce n'est pas Henri Salvador qui a conçu ce doux problème ! Nous le résoudrons dans le chapitre 3 consacré au vocabulaire des graphes.

2.c Les ponts du Königsberg

Exemple de découverte 2.

La ville de Königsberg est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles.
Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.

Énigme que nous résoudrons dans le chapitre 4 consacré aux chemins : une telle promenade existe-t-elle ?
C'est le fameux mathématicien Léonard Euler qui procurera une preuve à ce problème et qui donnera son nom aux « graphes Eulériens ».

2.d Le coloriage de la carte de la Réunion

Exemple de découverte 3.

Comment colorier la carte des 24 communes de la Réunion en un minimum de couleurs de telle sorte que deux communes limitrophes ne soient pas coloriés de la même couleur ?

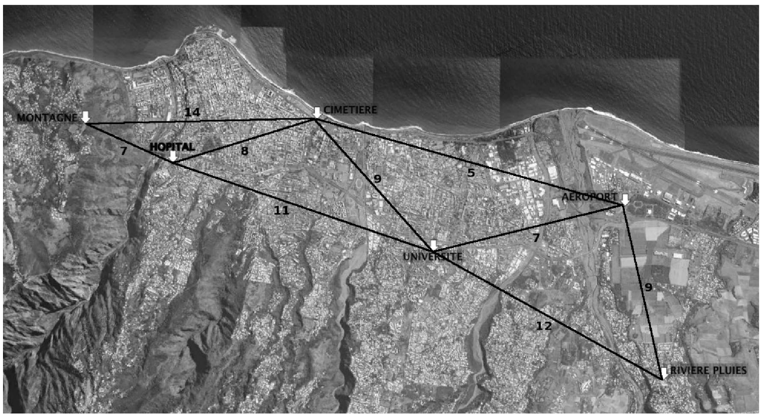
Nous étudierons l'algorithme de Welsh et Powell afin de résoudre ce problème dans le chapitre 5 consacré aux graphes et couleurs.

2.e Un trajet minimal

Exemple de découverte 4.

Sur la carte de Saint-Denis (Réunion) suivante sont indiqués les temps moyens (en minutes) mis par un automobiliste pour relier deux lieux. On souhaite aller de la Rivière des Pluies à la Montagne.

Quel chemin doit-on prendre afin que celui-ci soit le plus rapide ?



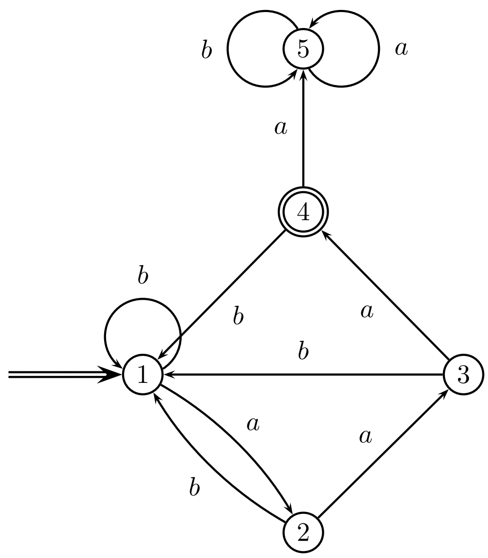
Cet exemple nous montre que les graphes permettent de déterminer le trajet le plus rapide (nous aurions aussi pu parler du trajet le plus court, à la manière d'un GPS). C'est le chapitre 6 qui nous dévoilera une manière efficace de répondre à ce genre de question, notamment grâce à l'algorithme de Dijkstra.

2.f Quel labyrinthe ! ! !

Exemple de découverte 5.

Le labyrinthe ci-dessous possède cinq salles, numérotées de 1 à 5. L'unique salle de sortie est la salle entourée par un double rond (salle 4).
Le départ s'effectue dans la salle 1 et on nous remet une suite de lettres (mot). L'objectif pour gagner est de suivre le chemin indiqué par cette suite de lettres et de terminer dans la salle 4.

Quels sont les « mots » gagnants ?



Ce labyrinthe nous mènera au pays des automates et de leurs applications dans le chapitre 7.

2.g Au pays d'Oz

Exemple de découverte 6.

Le magicien d'Oz a comblé tous les désirs des habitants du pays d'Oz, sauf peut-être en ce qui concerne le climat : au pays d'Oz en effet, s'il fait beau un jour, il est certain qu'il pleuvra ou neigera le lendemain avec une probabilité égale. Si le temps d'un jour est pluvieux ou neigeux, alors il reste inchangé dans 50% des cas le lendemain et ne devient beau que dans 25% des cas.
Les habitants se sont plaints auprès du magicien, affirmant qu'ils n'ont qu'un beau jour sur cinq.
Ce à quoi il a répondu qu'il s'agissait d'une impression mais qu'en réalité, il y a bien plus d'un beau jour sur cinq.

Qui a raison ?

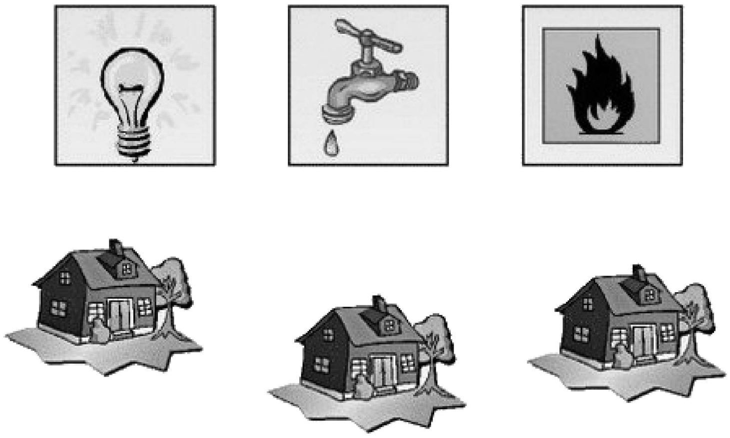
Pour cet exemple, nous utiliserons de l'algèbre linéaire et des matrices lors du chapitre 8 dédié aux graphes probabilistes.

2.h L'énigme des trois maisons

Exemple de découverte 7.

Un lotissement de trois maisons doit être équipé d'électricité, d'eau et de gaz. La réglementation interdit de croiser les canalisations pour des raisons de sécurité.

Est-il possible d'effectuer tous les raccordements ?



Ce dernier problème sera résolu via le chapitre 9 sur les graphes planaires.

3

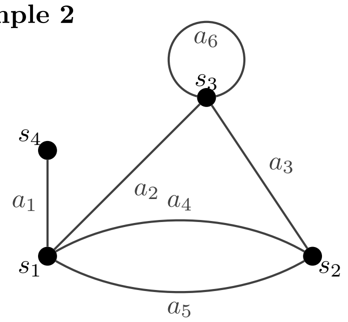
Vocabulaire des graphes

3.a Graphe non orienté

Définition 1.

Un **graphe** (non orienté) G est constitué d'un ensemble $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ de points appelés **sommets** et d'un ensemble $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ d'**arêtes** tels qu'à chaque arête a_i sont associés deux éléments de S, appelés ses **extrémités**.
Si les deux extrémités sont confondues, l'arête est appelée **boucle**.
S'il y a plusieurs arêtes entre deux sommets, on parle d'**arêtes multiples**.
Un graphe ne présentant ni arête multiple, ni boucle est appelé **graphe simple**.

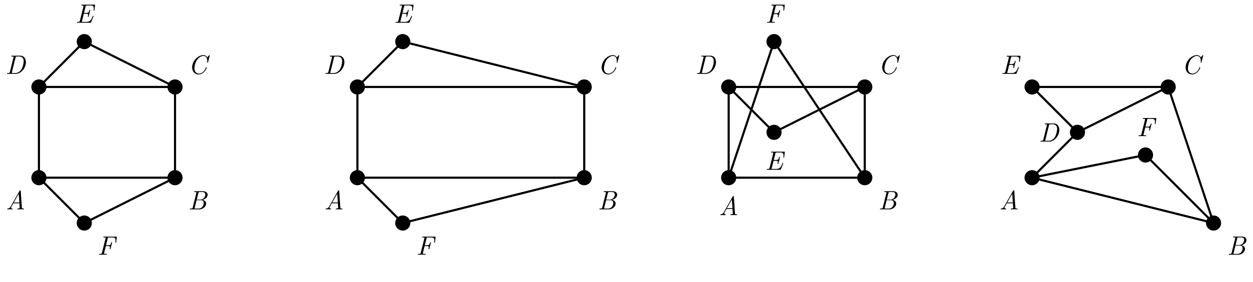
Exemple 2



Ce graphe est constitué des 5 sommets s_1, s_2, s_3, s_4 et s_5
et de 6 arêtes a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 et a_6.
L'arête a_2 relie les sommets s_1 et s_3.
Il y a une boucle en s_3.
Entre s_1 et s_2, il y a 2 arêtes a_4 et a_5, il s'agit d'arêtes multiples.

Dans la suite, pour plus de commodité, les sommets seront nommés avec des lettres de l'alphabet et les arêtes non numérotées, sauf si besoin !

Remarque 3
La position des sommets et la longueur les arêtes n'a pas d'importance, les quatre graphes suivants représentent la même situation :

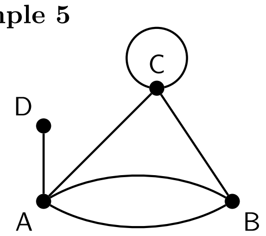


3.b Ordre et degré

Définition 4.

On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de ses sommets.
Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arrêtes dont il est une extrémité.
Deux sommets reliés par une même arrête sont dits **adjacents**.

Exemple 5



Ce graphe comporte 4 sommets, c'est donc un graphe d'ordre 4.

- Du sommet A partent 4 arrêtes. Le degré du sommet A est donc 4.
- Le degré du sommet B est 3.
- Le degré du sommet C est 4.
- Le degré du sommet D est 1.

Propriété 6 (Lemme des poignées de mains)**.**

Dans un graphe, la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

✍ Démonstration :

Lorsque l'on additionne les degrés des sommets, chaque arête est comptée deux fois : une fois pour chaque extrémité.

Exemple 7
Les vingt-quatre maires des vingt-quatre communes de l'île de la Réunion se sont donné rendez-vous lors de l'assemblée générale de l'Association des Maires du Département de la Réunion (AMDR). À cette occasion, chaque maire serre la main de tous les autres maires. Quel est le nombre de poignées de mains échangées ?

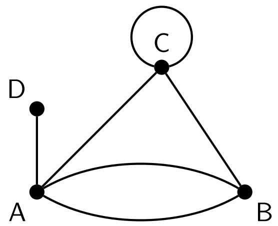
⇒ Si l'on présentait cette situation par un graphe dont les maires seraient représentés pas les sommets et les poignées de mains échangées par les arêtes, on aurait :
24 sommets, chacun de degré 23, donc la somme des degrés des sommets est de $24 \times 23 = 552$.
Le nombre d'arêtes vaut donc $552 \div 2 = 276$.
Le nombre de poignées de mains échangées lors de cette assemblée est de 276.

3.c Chaîne et cycle

Définition 8.

Une **chaîne** est une suite quelconque d'arêtes consécutives.
Sa **longueur** est le nombre d'arêtes qu'elle comporte.
Un **cycle** est une chaîne composée d'arêtes distinctes dont les deux extrémités sont confondues.

Exemple 9
Sur le graphe ci dessous,



- A - B - C est une chaîne de longueur 2,
- A - B - C - D n'a aucun sens puisqu'il n'existe aucune arête entre D et C,
- B - A - D - A - C - C est une chaîne de longueur 5,
- A - B - C - A est un cycle de longueur 3,
- D - A - B - C - A - D n'est pas un cycle car on parcourt deux fois l'arête qui va de A à D. C'est une chaîne **fermée**.

3.d Structure de graphes particuliers

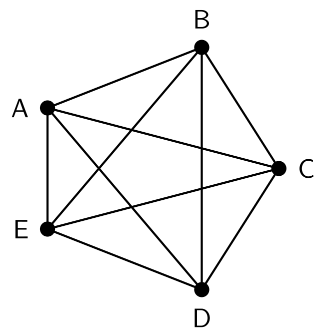
Définition 10.

Un graphe est dit :

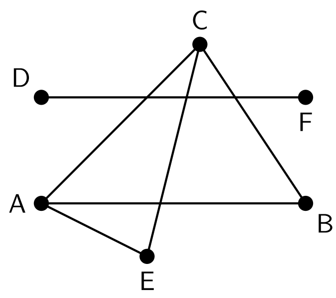
- **complet** lorsque deux sommets quelconques distincts sont toujours adjacents ;
- **connexe** si quels que soient les sommets s_i et s_j, il existe toujours une chaîne reliant s_i à s_j.
- **stable** lorsque ses sommets ne sont reliés par aucune arête ;
- **biparti** lorsque l'ensemble S des sommets peut-être partagé en deux sous ensembles S_1 et S_2 tels que les éléments de S_1 [resp. S_2] ne sont reliés entre eux par aucune arête.

Exemple 11

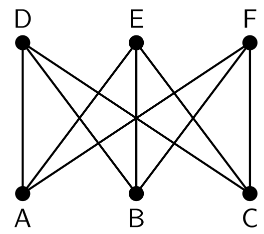
Ce graphe est complet :
on le note communément K_5.



Graphe non connexe car les sommets D et F sont isolés des autres.



Graphe biparti nommé $K_{3,3}$.
$S_1 = \{$D, E, F$\}$ et $S_2 = \{$A, B, C$\}$.



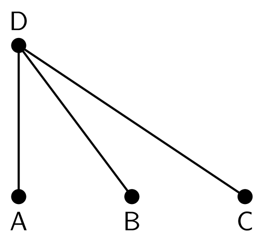
Nous avons souvent besoin d'isoler une partie d'un graphe afin d'en étudier les propriétés, d'où la définition :

Définition 12.

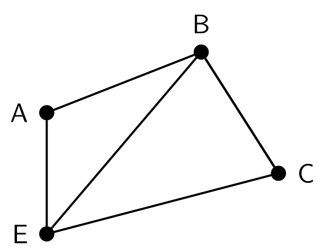
Un **sous-graphe** d'un graphe est une partie d'un graphe composé d'un sous-ensemble de sommets et de toutes les arêtes qui les relient.

Exemple 13

Ce graphe est un sous-graphe du graphe $K_{3,3}$.



Ce graphe n'est pas un sous graphe du graphe K_5 car il manque une arête entre les sommets A et C.



Conséquence : un sous-graphe est stable s'il ne comporte aucune arête !

Exemple 14

On ne peut pas trouver de sous-graphe stable à K_5 puisque c'est un graphe complet.
D - E - F est un sous-graphe stable de $K_{3,3}$.

3.e Distance et diamètre

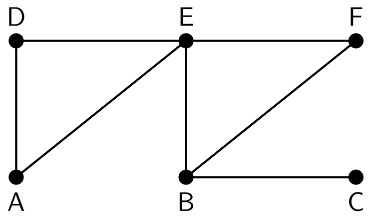
Définition 15.

La **distance** entre deux sommets est la longueur de la plus courte chaîne qui relie ces deux sommets. Le **diamètre** d'un graphe est la plus grande distance.

Remarque 16

- *La distance d'un sommet à lui même est nulle.*
- *La distance entre deux sommets qui ne peuvent être reliés par aucune chaîne est* $+\infty$.
- *Le diamètre d'un graphe complet est égal à* 1.
- *Le diamètre d'un graphe non connexe est infini.*

Exemple 17



Dans le graphe ci contre,

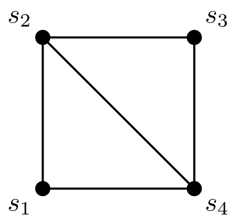
- la distance du sommet A au sommet B est 2,
- la distance du sommet C au sommet C est 0,
- le diamètre est égal à 3 : c'est la distance de A à C ou de D à C.

3.f Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition 18.

Soit G un graphe à n sommets $s_1, \ldots, s_n$. On appelle **matrice d'adjacence** du graphe la matrice A= $(a_{i;j})$, où $a_{i;j}$ est le nombre d'arêtes joignant le sommet s_i au sommet s_j.

Exemple 19
Le graphe G ci-contre a pour matrice d'adjacence la matrice A.



$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété 20.

$\sum_{j=1}^{n} a_{i;j}$ est égal au degré du sommet s_i et $\sum_{i=1}^{n} a_{i;j}$ est égal au degré du sommet s_j.

Remarque 21
La matrice d'adjacence d'un graphe

- *non orienté est symétrique par rapport à sa diagonale ;*
- *sans boucle n'a que des* 0 *sur la diagonale ;*
- *sans arête multiple n'a que des* 1 *ou des* 0 *;*
- *complet n'a que des* 1*, hormis sur sa diagonale où il y a des* 0 *;*
- *n'est pas unique puisqu'il suffit de changer l'ordre des sommets pour que la matrice soit différente.*

Propriété 22.

Soit G un graphe de matrice d'adjacence A. Le nombre de chaînes de longueur k joignant le sommet s_i au sommet s_j est donné par le coefficient $a_{i;j}^{(k)}$ de la matrice A^k.

✍ Démonstration :

Soit $\mathcal{H}_k$ l'hypothèse de récurrence : le nombre de chaînes de longueur k joignant le sommet s_i au sommet s_j est donné par le coefficient $a_{i;j}^{(k)}$ de la matrice A^k.

Initialisation : pour $k = 1$, c'est la définition de la matrice d'adjacence. $\mathcal{H}_1$ **est vérifiée**.

Héridité : supposons l'hypothèse vraie au rang k et soit n l'ordre du graphe.
Il nous faut compter le nombre de chaînes de longueur $k+1$ qui vont de s_i à s_j.
Une telle chaîne est composée d'une chaîne de longueur k allant de s_i à un sommet quelconque s_h, $h \in \{1, \ldots, n\}$, suivie d'une arête allant de s_h à s_j.

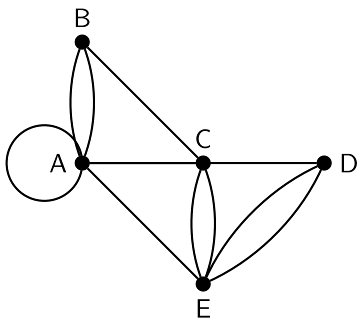
- le nombre de chaînes de longueur k allant de s_i à s_h est donné par le coefficient $a_{i;h}^{(k)}$,
- le nombre de chaînes de longueur 1 allant de s_h à s_j est donné par le coefficient $a_{h;j}$.

Le nombre total de chaînes de longueur $k+1$ allant de s_i à s_j est alors de :

$$\sum_{h=1}^{n} a_{i;h}^{(k)} \times a_{h;j} = a_{i;j}^{(k+1)}.$$

L'hypothèse est donc encore **vraie au rang** $k+1$.

Exemple 23
Le plan du parcours santé de Grafland est le suivant :



sa matrice d'adjacence peut être :

$$\mathrm{A}= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Chaque arc du plan représente un chemin de 250 mètres. On souhaite effectuer des parcours partant du point A et arrivant au même point A de longueur 1 km. Combien peut-on effectuer de parcours différents ?

⟹ Pour cela, il faut calculer la matrice A^4 (4×250 m $= 1\,000$ m) et lire le coefficient $a_{1;1}^{(4)}$:

$$\mathrm{A}^4 = \begin{pmatrix} 186 & 106 & 136 & 82 & 120 \\ 106 & 71 & 70 & 41 & 84 \\ 136 & 70 & 114 & 74 & 88 \\ 82 & 41 & 74 & 55 & 56 \\ 120 & 84 & 88 & 56 & 126 \end{pmatrix}$$

On a $a_{1;1}^{(4)} = 186$,

Il y a 186 parcours possibles de longueur 1 km de A à A.

Remarque : Grâce à cette matrice, on peut également en déduire tous les parcours de longueur 1 km existants entre deux points du parcours. Et si l'on somme tous les coefficients de la matrice, on obtient deux fois le nombre total de parcours différents de 1 km existants sur ce parcours santé. ($2\,206 \div 2 = 1\,103$).

3.g Graphe orienté

Définition 24.

Un graphe est **orienté** si les arêtes ont un sens de parcours. Chaque arête a alors une origine et une extrémité. Elle est représentée par une flèche.

Il existe de nombreux domaines où les graphes sont orientés. Par exemple : le plan d'une ville avec les sens interdits ; un parcours en montagne où il est utile d'indiquer le sens de montée...

Remarque 25
Toutes les notions vues dans le cas des graphes non orientés se généralisent aux graphes orientés : ordre, degré, distance,...

On peut cependant préciser la correspondance entre le vocabulaire utilisé pour les deux sortes de graphe :

Graphe non orienté	*Graphe orienté*
arête	*arc*
chaîne	*chemin*
cycle	*circuit*

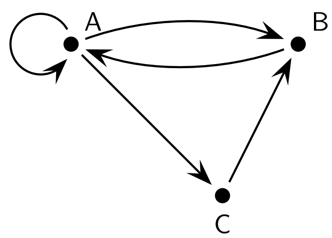
Pour la matrice d'adjacence, il faut distinguer le sens des arêtes et convenir d'un sens de lecture.

Définition 26.

Par convention, dans la **matrice d'adjacence** d'un graphe G orienté, le terme a_{ij} désigne le nombre d'arêtes d'origine le sommet s_i et d'extrémité le sommet s_j.

Exemple 27

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ peut correspondre au graphe suivant :



3.h Le loup, la biche et le chevalier... solution

Exemple de découverte 28.

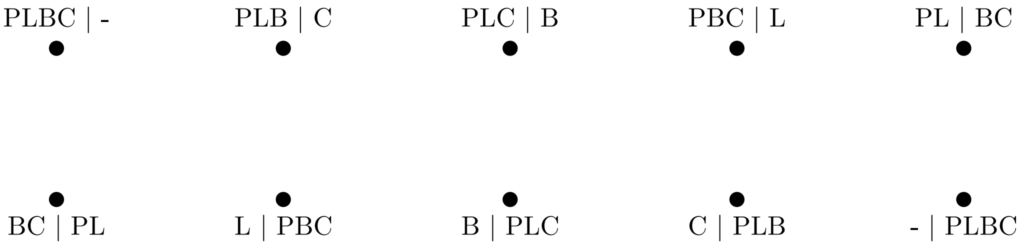
Un passeur doit aider un loup, une biche et un chevalier à traverser une rivière.
Il ne peut faire traverser qu'un des personnages à la fois et ne peut laisser seuls le loup et la biche, pas plus que le chevalier et le loup.

Comment peut-il faire ?

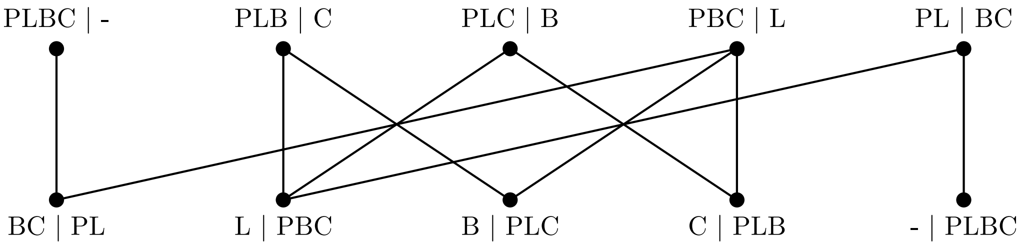
Cette situation peut être modélisée à l'aide d'un graphe.
Désignons par P le passeur, par L le loup, par B la biche et par C le chevalier.

Les sommets du graphe sont des couples précisant qui est sur la rive initiale et qui est sur l'autre rive.
Ainsi, le couple PBC | L signifie que le passeur est sur la rive initiale avec la biche et le chevalier, alors que le loup est sur l'autre rive tout seul. Naturellement, nous ne considèrerons pas les sommets dont l'une des composantes est BL ou CL car ces situations sont interdites d'après l'énoncé.

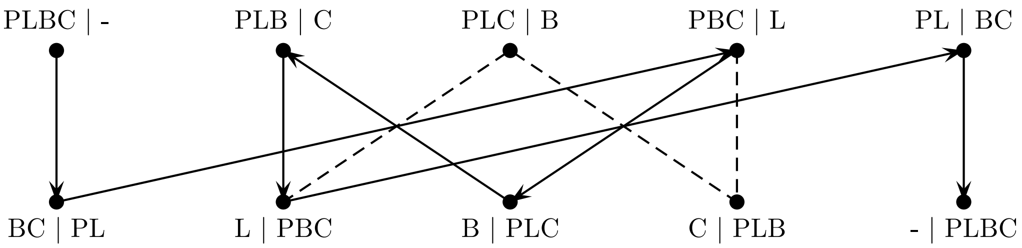
Nous obtenons les couples suivants :



Une arête relie deux sommets lorsque le passeur peut passer d'une situation à l'autre.
En transportant la biche, le passeur passe par exemple du sommet PBC | L au sommet C | PBL.
Le graphe ainsi obtenu est biparti : les sommets pour lesquels le passeur est sur la rive initiale ne sont reliés qu'aux sommets pour lesquels le passeur est sur l'autre rive. . .



Il suffit ensuite de trouver une chaîne (la plus courte par exemple) entre la situation initiale PLBC | - et la situation finale souhaitée - | PLBC. La figure suivante donne un tel chemin :



Conclusion :

- Le passeur traverse avec le loup et revient seul au rivage initial,
- puis il fait traverser le chevalier et revient avec le loup,
- il fait traverser la biche et revient seul,
- enfin, il fait traverser avec le loup.

4 Graphes et chemins

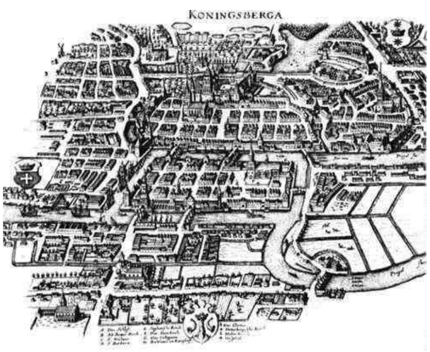
4.a Graphes eulériens

Un peu d'histoire ...
Au 18^e siècle, un casse-tête est populaire chez les habitants de Königsberg (appelée plus tard Kaliningrad, Russie) : est-il possible de se promener dans la ville en ne passant qu'une et une seule fois par chacun des sept ponts de Königsberg ?

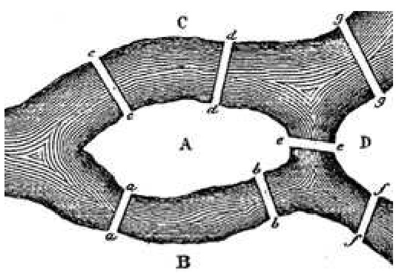
Mais laissons au célèbre mathématicien Léonard Euler (1707-1783) formuler lui-même la fameuse question :

« À Königsberg, en Poméranie, il y a une île appelée Kneiphof ; le fleuve qui l'entoure se divise en deux bras, sur lesquels sont jetés les sept ponts a, b, c, d, e, f, g*. Cela posé, peut-on arranger son parcours de telle sorte que l'on passe sur chaque pont, et que l'on ne puisse y passer qu'une seule fois ? Cela semble possible, disent les uns, impossible, disent les autres ; cependant personne n'a la certitude de son sentiment. »*

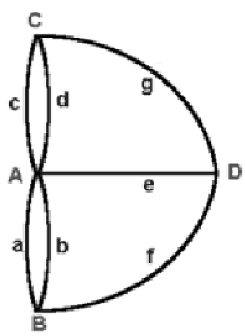
Précisons qu'il s'agit d'effectuer le parcours en revenant à son point de départ.
On nomme, en son honneur, circuit eulérien un tel trajet ; on pourra parler de chemin eulérien si le point de départ diffère du point d'arrivée.



Ancien plan de Königsberg



Plan de la rivière

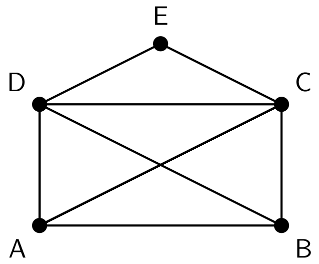


Graphe associé

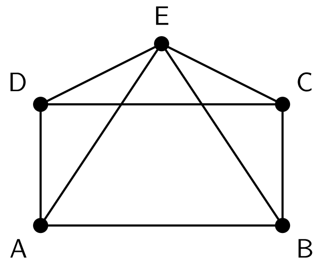
Définition 1.

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe prises une seule fois.
Un **cycle eulérien** est un cycle composé de toutes les arêtes du graphe prises une seule fois.
Un graphe possédant un cycle eulérien est un **graphe eulérien**.

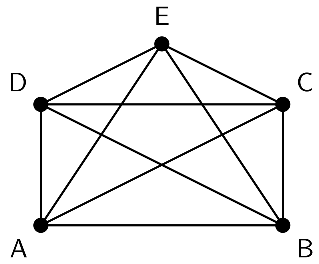
Exemple 2



Dans ce graphe, on a une chaîne eulérienne : par exemple A - C - E - D - B - C - D - A - B, mais il n'existe aucun cycle eulérien. Ce n'est donc pas un graphe eulérien.



Dans ce graphe, il n'existe ni chaîne eulérienne, ni cycle eulérien.



Dans ce graphe, on a plusieurs cycles eulériens : par exemple A - C - E - D - B - C - D - A - B - E - A. C'est donc un graphe eulérien.

En terme pratique, lorsqu'un graphe possède une chaîne ou un cycle eulérien, cela signifie que nous pourrions « le dessiner » en une seule fois, sans jamais lever le crayon.

4.b Théorème d'Euler

Comment peut-on être certain de l'existence d'une chaîne ou d'un cycle eulérien ?

Théorème 3 (d'Euler - 1739)**.**

- Un graphe connexe possède une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont d'ordre pair sauf deux.
- Un graphe connexe possède un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont d'ordre pair.

Exemple 4
Si l'on reprend l'exemple 2 ci-dessus :

Le premier graphe possède 3 sommets d'ordre pair (C, D et E) et 2 sommets d'ordre impair (A et B).

Le second graphe possède 1 sommet d'ordre pair (E) et 4 sommets d'ordre impair (A, B, C et D).

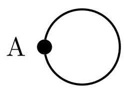
Le dernier graphe ne possède que des sommets d'ordre pair.

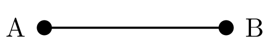
✍ <u>Démonstration :</u>

Condition nécessaire : supposons que le graphe connexe G possède une chaîne eulérienne.
Chaque fois qu'en parcourant cette chaîne on arrive à un sommet s_i par une arête, on en repart par une autre, sauf pour les extrémités de cette chaîne.
Donc, nécessairement, les sommets sont d'ordre pair, sauf éventuellement le sommet de départ et celui d'arrivée si ceux-ci sont différents.
De plus, cette chaîne étant eulérienne, chaque arête est parcourue une et une seule fois, et si la chaîne est passée k fois par le sommet s_i, ce sommet est de degré $2k$.

Condition suffisante : réciproquement, supposons que tous les sommets d'un graphe connexe sont pairs sauf éventuellement deux.
On procède par récurrence sur le nombre d'arêtes n du graphe.

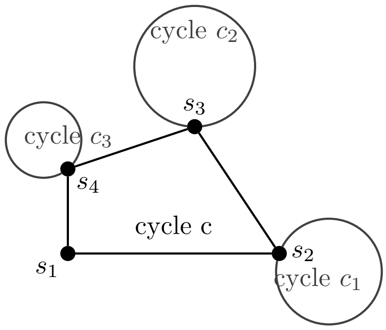
- **Initialisation :** si $n = 1$, le graphe étant connexe, il y a deux possibilités. Soit le graphe possède un seul sommet avec une boucle a, soit il en possède deux reliés par l'arête a.





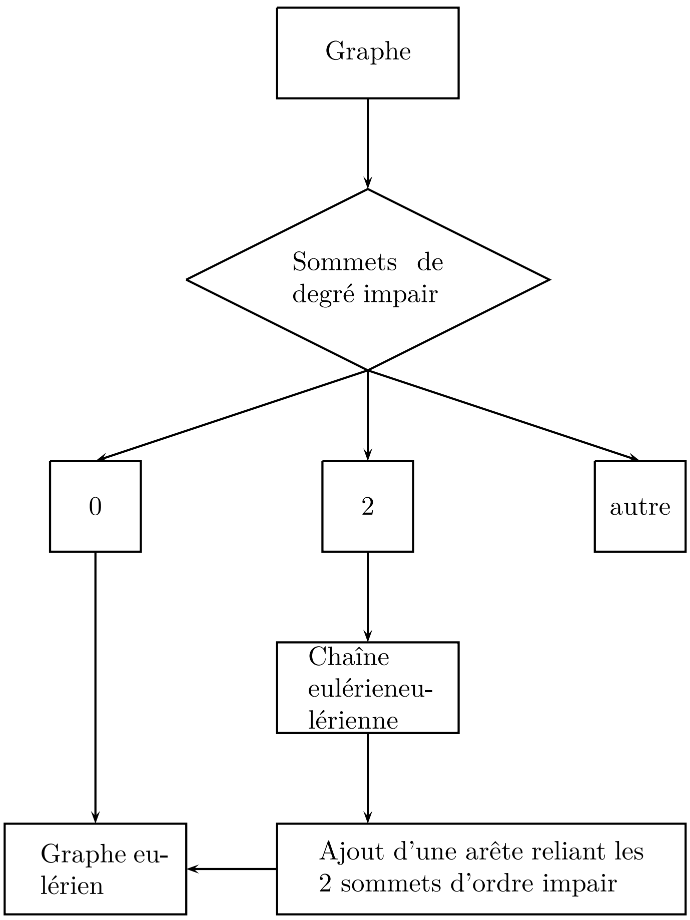
Dans les deux cas on a le résultat : le cycle eulérien A − A, ou la chaîne eulérienne A − B.

- **Hérédité :** supposons démontré le théorème pour les graphes ayant au plus $n-1$ arêtes, et considérons un graphe G possédant n arêtes et dans lequel tous les sommets sont d'ordre pair.
  Lorsque un cycle partant du sommet s_i dans une direction quelconque et ne parcourant jamais deux fois la même arête, arrive à un sommet s_j, elle a parcouru un nombre impair d'arêtes incidentes à s_j, et par conséquent, cette chaîne peut repartir de s_j par une arête non encore parcourue.
  Cependant dans ce cycle c arbitraire, il est possible que toutes les arêtes du graphe n'aient pas été parcourues, il peut donc rester des sommets et des arêtes formant des graphe connexes dont tous les sommets sont de degré pair.
  Chacune de ces composantes connexes c_k rencontre notre cycle c en au moins un sommet s_l puisque le graphe est connexe. Or, par hypothèse de récurrence, elles admettent toutes des cycles eulériens. On obtient alors un cycle eulérien en intercalant dans la chaîne c, les cycles c_k lorsqu'on rencontre le sommet s_l.



On vient donc de déduire qu'un graphe connexe dont tous les sommets sont pairs possède un cycle eulérien. Si maintenant deux des sommets s_m et s_n sont d'ordre impair, la démonstration est la même en considérant au départ une chaîne allant de s_m à s_n, les graphes connexes restants ne possédant forcément que des sommets d'ordre pair.

Ce théorème nous donne un moyen très simple de savoir si un graphe est eulérien ou non, modélisé par l'algorithme suivant :



Exemple 5
Parmi les figures suivantes, quelles sont celles qui peuvent être dessinées sans lever le crayon et sans repasser sur le même trait ?

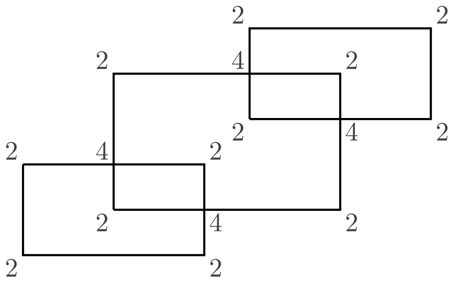


Figure 1

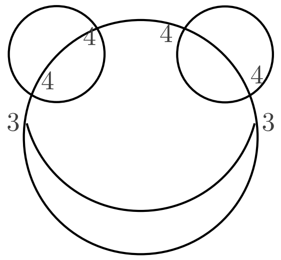


Figure 2

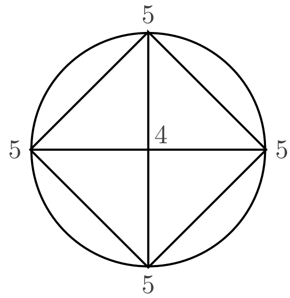


Figure 3

1. La première figure ne comporte que des sommets d'ordre pair (2 ou 4), elle peut donc être dessinée sans lever le crayon en partant de n'importe où.
2. La deuxième figure possède 2 sommets d'ordre impair seulement (la bouche). On peut donc la dessiner sans lever le crayon en partant de l'un de ces deux sommets.
3. La troisième figure comporte 4 sommets d'ordre impair à chaque sommet du carré, il est donc impossible de la dessiner en une seule fois.

4.c Retour à Königsberg

Exemple de découverte 6.

La promenade de Königsberg existe-t-elle ?

Non car les quatre sommets sont d'ordre impair !!!

5

Graphes et couleurs

5.a Définition

Définition 1.

Colorer un graphe, c'est associer une couleur à chaque sommet de façon que deux sommets adjacents soient colorés avec des couleurs différentes.

Remarque 2

- *La coloration d'un graphe n'est bien évidemment pas unique : d'une part les couleurs peuvent être changées (remplacer du noir par du rouge par exemple), d'autre part la répartition des couleurs peut varier, ainsi que le nombre de couleurs utilisées !*
- *Un graphe complet d'ordre n sera coloré avec n couleurs, puisque tous ses sommets sont adjacents.*
- *Un graphe d'ordre n pourra toujours être coloré de n couleurs différentes.*

5.b Coloration minimale

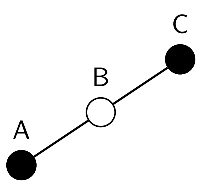
Le dernier point de la remarque précédente nous amène à penser que colorer un graphe ne nous apporte pas grand chose, si nous n'y mettons pas de contrainte supplémentaire. D'où la définition suivante :

Définition 3.

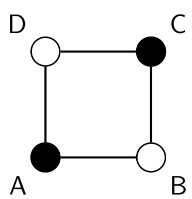
Le **nombre chromatique** d'un graphe G est le nombre minimal de couleurs permettant de le colorer. Il est généralement noté $\chi(G)$ ou $\gamma(G)$.

Exemple 4

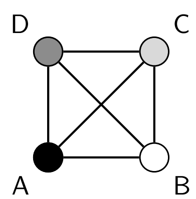
Les graphes suivants sont colorés avec un minimum de couleurs.



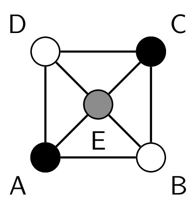
$\chi(G_1) = 2$



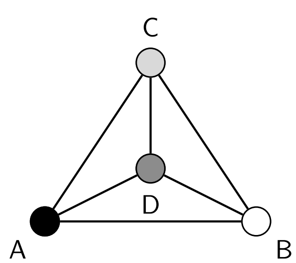
$\chi(G_2) = 2$



$\chi(G_3) = 4$



$\chi(G_4) = 3$



$\chi(G_5) = 4$

Si plusieurs sommets d'un graphe sont de la même couleur, aucune arête ne peut les joindre. Ils forment donc un sous-graphe stable.
Colorer un graphe revient donc à le partitionner en sous-graphes stables.

Un peu d'histoire...
Les premiers résultats de coloration de graphes concernent presque exclusivement la coloration des cartes. En cherchant à mettre en couleurs une carte des comtés d'Angleterre, Francis Guthrie (mathématicien et botaniste sud-africain $1831-1899$) postule en 1852 la conjecture des quatre couleurs : il remarqua en effet qu'il n'y avait besoin que de quatre couleurs pour que deux comtés ayant une frontière commune soient de couleurs différentes.

En 1879, Alfred Kempe (mathématicien anglais $1849-1922$) publia ce qu'il prétendit en être une démonstration et pendant une décennie, on crut que le problème des quatre couleurs était résolu.

En 1890, Percy John Heawood (mathématicien anglais $1861-1955$) fit remarquer que la démonstration de Kempe était fausse. Il montra quant à lui le théorème des cinq couleurs en reprenant des idées de Kempe.

De nombreux travaux ont été publiés lors du siècle suivant pour réduire le nombre de couleurs à quatre, jusqu'à la démonstration finale de Kenneth Appel (mathématicien américain né en 1932) et Wolfgang Haken (mathématicien allemand né en 1928). Il s'agit aussi de la première preuve majeure utilisant massivement l'ordinateur.

Outre le problème de cartes, la coloration des graphes intervient également pour les problème d'optimisation avec contraintes (planning, incompatibilités), dans les réseaux, la cryptographie...

Aucune formule miracle permet de déterminer le nombre chromatique d'un graphe quelconque. La plupart du temps, il faut se contenter d'un encadrement, autrement dit d'un minorant et d'un majorant du nombre chromatique.

Propriété 5.

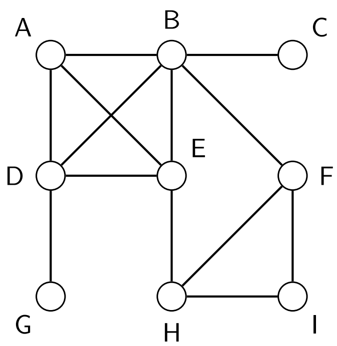
Soit G un graphe, alors
$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq d+1$$
où $\omega(G)$ est l'ordre maximal d'un sous graphe complet de G et d le plus grand degré des sommets.

✍ Démonstration :

Majoration : si un sommet s_i est de degré d, il faudra une couleur pour le colorer, et d autres couleurs différentes pour colorer ses d sommets adjacents, soit $d+1$ couleurs au maximum.

Minoration : on sait qu'il faut exactement n couleurs pour colorer un graphe complet d'ordre n, d'où la conclusion.

Exemple 6
On considère le graphe G suivant :



Ce graphe comporte un graphe complet d'ordre 3 : le graphe composé des sommets F, H et I, mais aussi un graphe complet d'ordre 4 : A, B, E, D.
On a donc $\chi(G) \geq 4$.

Le sommet ayant le degré le plus grand est le sommet B de degré 5.
On a alors $\chi(G) \leq 5+1$.

D'où $4 \leq \chi(G) \leq 6$: $\boxed{\text{le nombre chromatique de G est } 4,\ 5 \text{ ou } 6}$

5.c Algorithme de coloration de Welsh et Powell

Nous avons trouvé dans l'exemple précédent un encadrement du nombre chromatique. Il reste maintenant à déterminer une méthode afin de colorer un graphe de manière efficace.

Il existe entre autres une méthode heuristique : l'algorithme de Welsh et Powell (algorithme « glouton » : il suit le principe de faire étape par étape un choix optimum local, dans l'espoir d'obtenir un résultat optimum global).
Cet algorithme couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est-à-dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs, mais il n'assure pas que le nombre de couleurs utilisé soit minimum.

Algorithme de Welsh et Powell

- **Étape 1 :** Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.
- **Étape 2 :** En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur.
- **Étape 3 :** S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2. Sinon, la coloration est terminée.

Exemple 7
Un collège commande neuf produits chimiques (A, B, C, D, E, F, G, H et I) afin d'alimenter le laboratoire de sciences.
Certains produits ne peuvent être rangés dans la même armoire (accident, émanations gazeuses...).
Pour des raisons d'économie et de place, le nombre d'armoires doit être le plus petit possible.

Sachant qu'on ne peut mettre ensemble A, B, D et E ; B et C ; B et F ; D et G ; E et H ; F, H et I, quel est le nombre minimal d'armoires à acheter et quels seront les produits stockés dans la même armoire ?

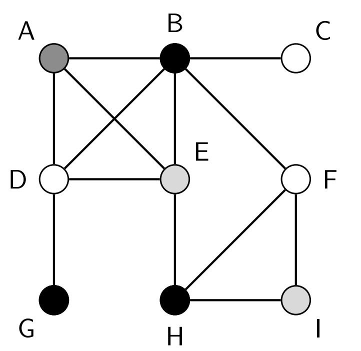
$\Longrightarrow$ Pour le savoir, on dessine un graphe où les sommets correspondent aux produits chimiques, et les arêtes aux incompatibilités. On obtient le graphe de l'exemple 6.

On classe les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré :

Sommet	B	D	E	A	F	H	I	C	G
Ordre	5	4	4	3	3	3	2	1	1

1. On colore B en noir par exemple, puis dans l'ordre du tableau, D ne peut être coloré en noir puisqu'il est adjacent à B. Il en est de même pour les sommets E, A et F.
   H est coloré en noir mais pas I adjacent en H. Enfin, C n'est pas noir, contrairement à G.
2. On reprend le premier sommet non coloré : il s'agit de D, on choisit de le colorer en blanc, et de la même manière que pour le noir, on peut colorer les sommets F et C parmi ceux non encore colorés.
3. On repart du sommet E que l'on choisit gris-clair, ainsi que I.
4. Enfin, il reste le sommet A que l'on colore en gris foncé.

On obtient le graphe suivant :



Conclusion : on pourra mettre ensemble :

- dans l'armoire n°1 les produits B, G et H,
- dans l'armoire n°2 les produits C, D et F,
- dans l'armoire n°3 les produits E et I,
- dans l'armoire n°4 le produit A.

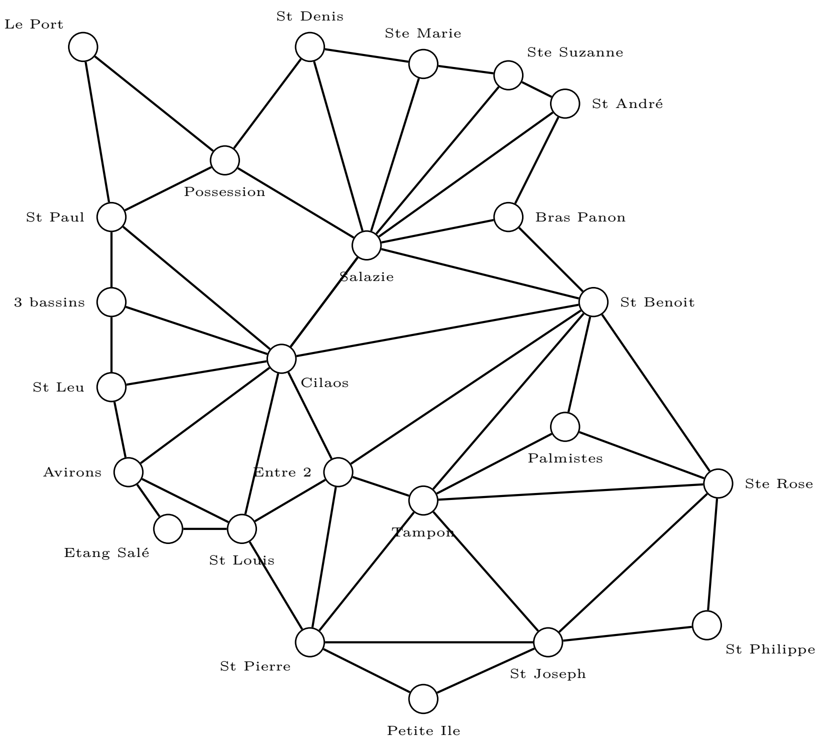
On remarque également que le nombre chromatique était supérieur ou égal à 4, et on a trouvé 4 couleurs.
Donc, c'est bien le minimum de couleurs.

5.d Coloration de la carte de la Réunion

Exemple de découverte 8.

Comment colorier la carte des vingt-quatre communes de la Réunion en un minimum de couleurs de telle sorte que deux communes limitrophes ne soient pas coloriés de la même couleur ?

On commence par tracer un graphe représentant la situation : les sommets du graphe correspondent aux différentes communes et les arêtes relient les communes qui ont un morceau de frontière en commun.



Ensuite, on ordonne les communes par degré décroissant, puis par ordre alphabétique (par exemple !).

1. Cilaos	8	7. St-Joseph	5	13. Bras-Panon	3	19. St-Leu	3
2. Salazie	8	8. St-Louis	5	14. Palmistes	3	20. Trois-Bassins	3
3. St-Benoit	7	9. St-Pierre	5	15. St-André	3	21. Etang-Salé	2
4. Le tampon	6	10. Les Avirons	4	16. St-Denis	3	22. Petite-Ile	2
5. Entre-Deux	5	11. La Possession	4	17. Ste-Marie	3	23. Le Port	2
6. Ste-Rose	5	12. St-Paul	4	18. Ste-Suzanne	3	24. St-Philippe	2

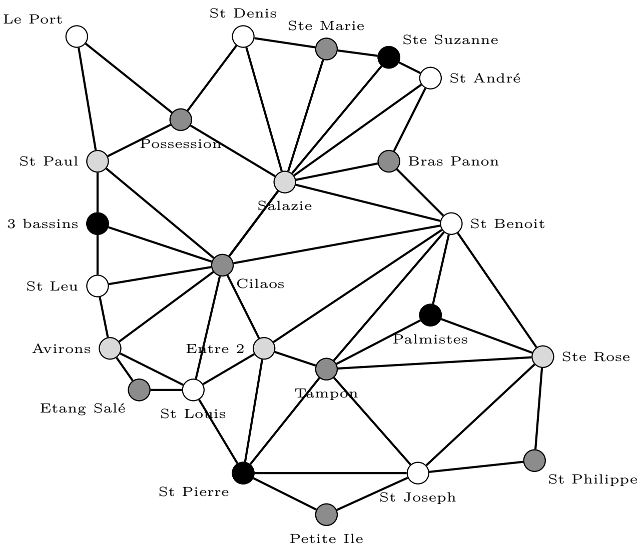
On choisit de colorer Cilaos en gris foncé, puis le Tampon, La Possession, Bras-Panon, Sainte-Marie, Petite-Ile, Saint-Louis et Saint-Philippe.

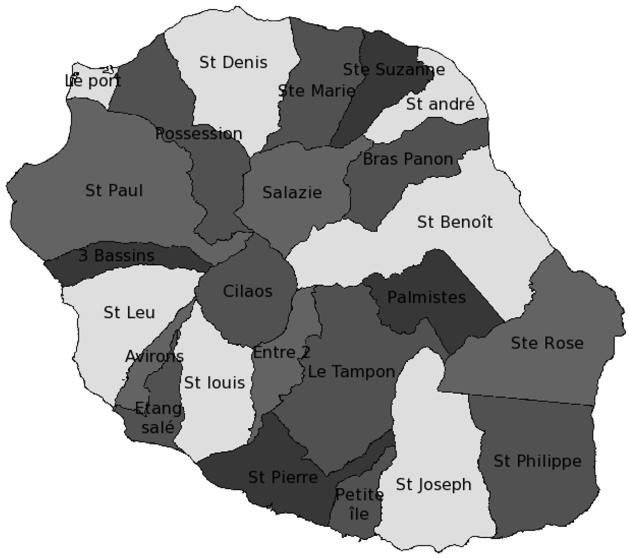
On repart de la deuxième commune non colorée : Salazie en gris clair, puis l'Entre-Deux, Saint-Paul, Sainte-Rose et Les Avirons.

Troisième couleur : le blanc pour Saint-Benoît, puis Saint-Joseph, Saint-Louis, Saint-André, Saint-Denis, Saint-Leu et Le Port.

Enfin, Saint-Pierre, puis la Plaine des Palmistes, Sainte-Suzanne et Trois-bassins sont colorés en noir.

On obtient donc le graphe coloré, puis la carte suivants :





On s'aperçoit que l'on a utilisé 4 couleurs pour colorer la carte de la Réunion. C'est le nombre chromatique maximum pour une carte.

De même, le graphe possède un sous-graphe complet d'ordre 4 : le sous-graphe composé des sommets Tampon, Sainte-Rose, Saint-Benoit et la Plaine des Palmistes. Le nombre chromatique est donc supérieur ou égal à 4.

Conclusion : le nombre chromatique de la carte de la Réunion est à coup sûr 4. On a donc trouvé une coloration optimale du graphe et de la carte !

6

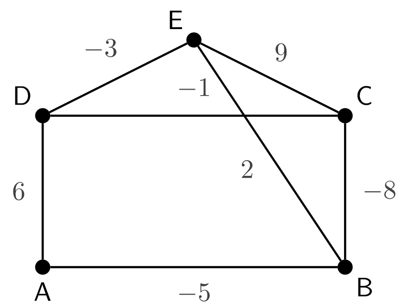
Graphes et trajets

6.a Graphes valués

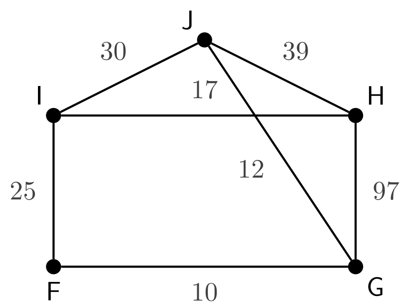
Définition 1.

Un **graphe valué** est un graphe pour lequel chaque arête est associée à un nombre réel appelé **poids**. Si ce nombre est positif, on parle alors de **graphe pondéré**.

Exemple 2
Voici par exemple un graphe valué :



... et un graphe pondéré :



L'un des problèmes classiques des graphes pondérés est celui de recherche d'un trajet routier le plus court (en terme de temps ou de kilomètres).

Si un graphe n'est pas pondéré, le poids de chaque arête peut être considéré comme égale à 1.

Définition 3.

On appelle **poids d'une chaîne** la somme des poids des arêtes composant la chaîne.

Exemple 4
Dans l'exemple précédent, le poids de la chaîne F - G - H - I - J est de $10 + 97 + 17 + 30 = 154$.

6.b Recherche du plus court trajet

Nous allons ici nous intéresser à la recherche de la chaîne de poids minimum.

Ce problème est très naturel, et se présente dans bien des domaines différents. La méthode la plus immédiate est de considérer tous les chemins menant d'un point de départ à l'arrivée et de chercher le plus court en utilisant un arbre par exemple, mais cette méthode est très inefficace !

Edsger Wybe Dijkstra (mathématicien et informaticien néerlandais 1930 – 2002) a proposé en 1959 un algorithme qui permet de calculer le plus court chemin entre un sommet particulier et tous les autres. C'est l'un des plus efficaces pour traiter les problèmes de plus court chemin.
Grâce à la puissance du traitement informatique, il est utilisé par les logiciels d'optimisation de trajets réels (Navigateurs GPS, Site RATP...) ou virtuels (routage internet).

Cet algorithme ne fonctionne que si le graphe ne possède que des valeurs positives.

L'algorithme dû à Dijkstra est basé sur le principe suivant :

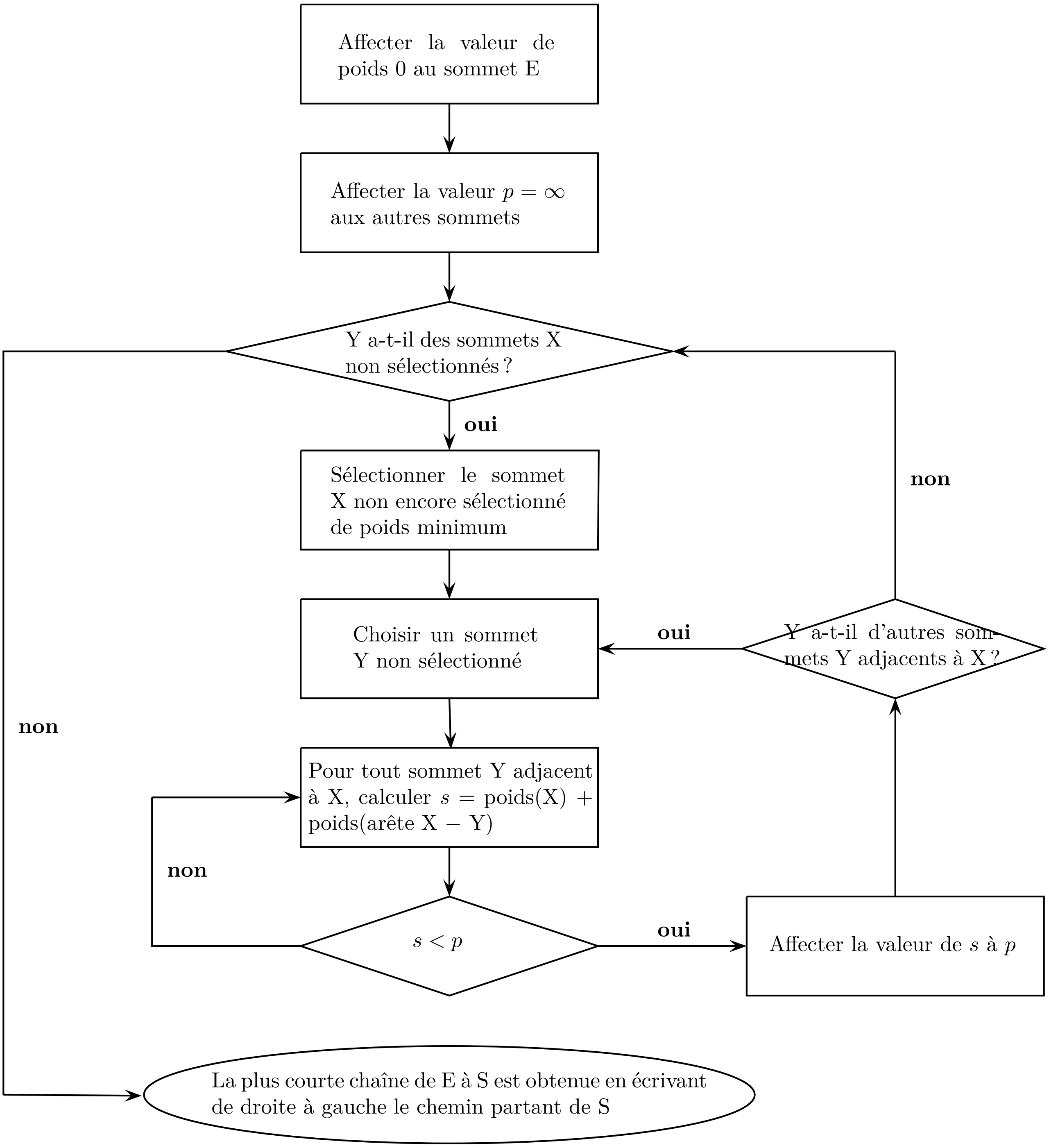
Si le plus court chemin reliant le sommet E (entrée) au sommet S (sortie) passe par les sommets $s_1, s_2, \ldots, s_k$ alors, les différentes étapes sont aussi les plus courts chemins reliant E aux sommets successifs $s_1, s_2, \ldots, s_k$.

Nous devons dons construire de proche en proche le chemin cherché en choisissant à chaque itération de l'algorithme, un sommet s_i du graphe parmi ceux qui n'ont pas encore été traités, tel que la longueur connue provisoirement du plus court chemin allant de E à s_i soit la plus courte possible.

Algorithme de Dijkstra

- **Initialisation de l'algorithme :**
  on affecte le poids 0 au sommet origine E que l'on sélectionne et on attribue provisoirement un poids ∞ aux autres sommets.
- **Tant qu'il reste des sommets non sélectionnés, faire :**
  * Parmi les sommets dont le poids n'est pas définitivement fixé, choisir le sommet X de poids p minimal. Marquer définitivement ce sommet X affecté du poids p(X).
  * Pour tous les sommets Y qui ne sont pas définitivement marqués, adjacents au dernier sommet fixé X :
    Calculer la somme s du poids de X et du poids de l'arête reliant X à Y.
    – Si la somme s est inférieure au poids provisoirement affecté au sommet Y, affecter provisoirement à Y le nouveau poids s et indiquer en indice le sommet X pour se souvenir de sa provenance.
    – Si la somme s est supérieure au poids provisoirement affecté au sommet Y, on ne change rien.
- **Quand le sommet S est définitivement marqué :**
  La chaîne de poids minimum se lit « à l'envers », de S à chacun de ses prédécesseurs successifs.

Pour faciliter la recherche du plus court chemin il est commode de présenter les résultats dans un tableau. (voir l'exemple « Allons de la Rivière à la Montagne », I.5.c).



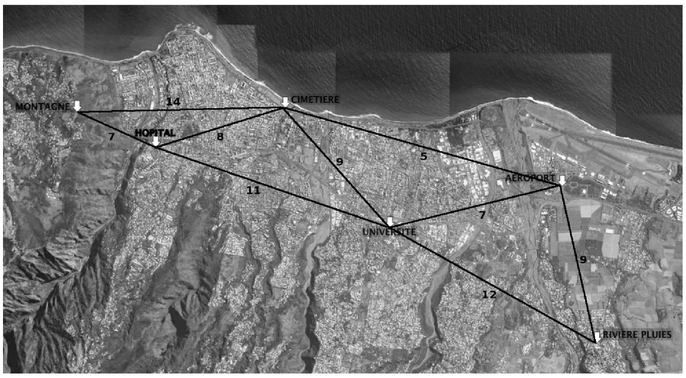
6.c Allons de la Rivière à la Montagne !

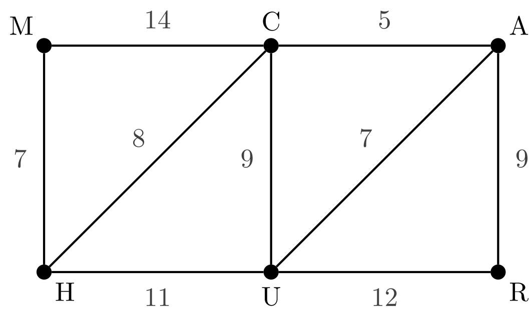
Exemple de découverte 5.

Sur la carte de Saint-Denis (Réunion) suivante sont indiqués les temps moyens (en minutes) mis par un automobiliste pour relier deux lieux. On souhaite aller de la Rivière des Pluies à la Montagne.

Quel chemin doit-on prendre afin que celui-ci soit le plus rapide ?

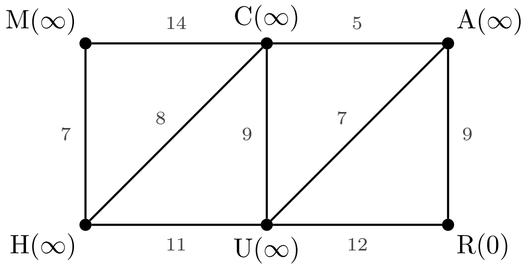
Pour commencer, on construit le graphe pondéré représentant la situation : on note M le sommet correspondant à La Montagne, H pour Hôpital, C pour Cimetière, U pour Université, A pour Aéroport et R pour Rivière des pluies.





Le sommet de départ : R est affecté de 0, tous les autres sont ∞.

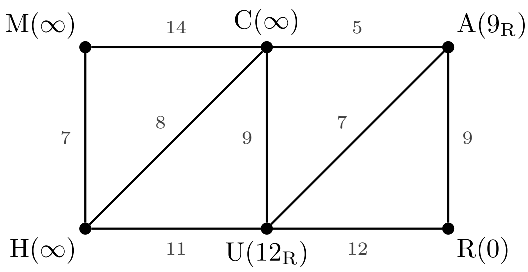
A	C	H	M	R	U	on choisit
∞	∞	∞	∞	0	∞	R(0)



Depuis R, on peut aller en A (poids de 9) ou U (poids de 12). Les autres sommets restent inchangés.

Dans la deuxième ligne du tableau, la valeur minimale est 9 lorsque l'on vient de R. **On sélectionne A**.

A	C	H	M	R	U	on choisit
∞	∞	∞	∞	0	∞	R(0)
9_R	∞	∞	∞		12_R	A(9_R)

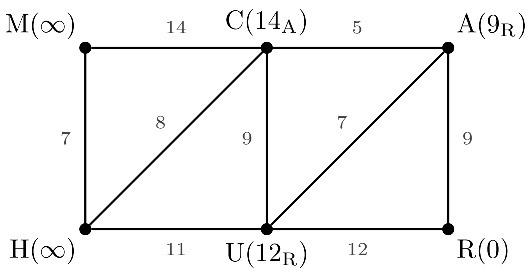


Depuis A, on peut aller en C (poids de $9 + 5 = 14$) ou en U (poids de $9 + 7 = 16 > 12$).

Le poids en arrivant à U étant supérieur à celui obtenu en passant de R à U, on ne le garde pas.

Dans la troisième ligne du tableau, la valeur minimale est 12 lorsque l'on vient de R. **On sélectionne U**.

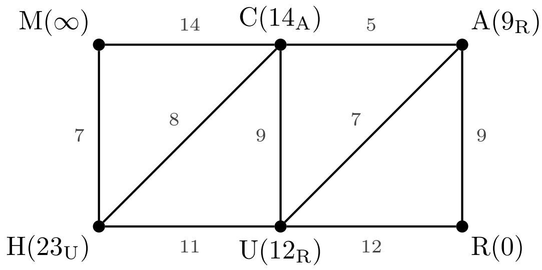
A	C	H	M	R	U	on choisit
∞	∞	∞	∞	0	∞	R(0)
9_R	∞	∞	∞		12_R	A(9_R)
	14_A	∞	∞		12_R	U(12_R)



Depuis U, on peut aller en C (poids de $12+9=21>14$) ou en H (poids de $12+11=23$)

Dans la quatrième ligne, la valeur minimale est 14 lorsque l'on vient de A. **On sélectionne C**.

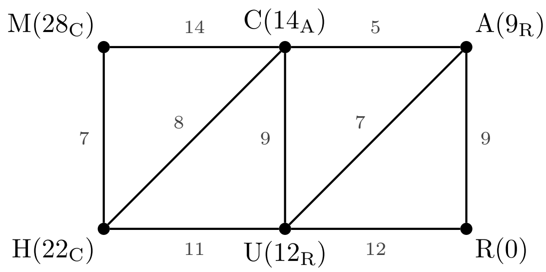
A	C	H	M	R	U	on choisit
∞	∞	∞	∞	0	∞	R(0)
9_R	∞	∞	∞		12_R	$A(9_R)$
	14_A	∞	∞		12_R	$U(12_R)$
	14_A	23_U	∞			$C(14_A)$



Depuis C, on peut aller en H (poids de $14+8=22$) ou en M (poids de $14+14=28$)

Dans la cinquième ligne, la valeur minimale est 22 lorsque l'on vient de C. **On sélectionne H**.

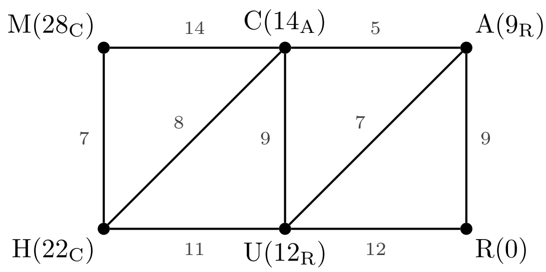
A	C	H	M	R	U	on choisit
∞	∞	∞	∞	0	∞	R(0)
9_R	∞	∞	∞		12_R	$A(9_R)$
	14_A	∞	∞		12_R	$U(12_R)$
	14_A	23_U	∞			$C(14_A)$
		22_C	28_C			$H(22_C)$



Depuis H, on peut aller en M (poids de $22+7=29>28$)

Dans la dernière ligne, la valeur minimale est 28 lorsque l'on vient de C. **On sélectionne M** .

A	C	H	M	R	U	on choisit
∞	∞	∞	∞	0	∞	R(0)
9_R	∞	∞	∞		12_R	$A(9_R)$
	14_A	∞	∞		12_R	$U(12_R)$
	14_A	23_U	∞			$C(14_A)$
		22_C	28_C			$H(22_C)$
			28_C			$M(28_C)$



Tous les sommets ayant été sélectionnés, on lit « à l'envers » la solution :

M, qui vient de C, qui vient de A, qui vient de R.

Conclusion : le trajet minimal en terme de temps est Rivière des pluies, Aéroport, Cimetière puis la Montagne. Il durera théoriquement 28 minutes.

7
Graphes et étiquettes

7.a Graphes étiquetés

Les graphes étiquetés, ou automates, ont donné lieu depuis une cinquantaine d'années à une théorie mathématique abstraite, riche et diversifiée, possédant de nombreuses applications.

Définition 1.

On appelle **graphe étiqueté** un graphe où toutes les arêtes portent une étiquette (lettre, mot, nombre, symbole, code,...).
Ces symboles sont appelés des **étiquettes**.

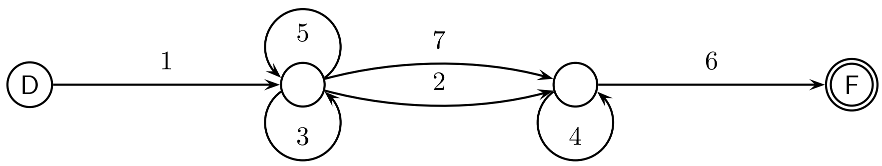
Nous avons déjà rencontré des graphes étiquetés particuliers : le graphe pondéré et le graphe valué.

Définition 2.

Soit G un graphe orienté étiqueté où un sommet est marqué **début** (D) et un autre **fin** (F).
Dans un graphe étiqueté, une suite d'étiquettes est un mot **reconnu** par le graphe s'il existe une chaîne telle que chacune des étiquettes soit associée (dans l'ordre) à une arête de cette chaîne.
Sinon, le mot est dit **refusé**.

Remarque 3
Ces graphes sont souvent utilisés pour déterminer des codes d'accès.

Exemple 4
Voici un graphe étiqueté :



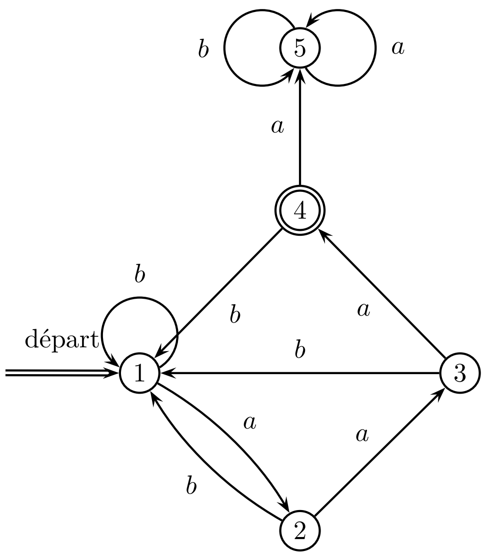
Les codes 1 - 5 - 5 - 7 - 4 - 6 et 1 - 3 - 2 - 6 sont reconnus, mais pas le code 1 - 3 - 4 - 6 qui est refusé par l'automate.

7.b Labyrinthe

Exemple de découverte 5.

Le labyrinthe ci-dessous possède cinq salles, numérotées de 1 à 5. L'unique salle de sortie est la salle entourée par un double rond (salle 4).
Le départ d'effectue dans la salle 1 et on nous remet une suite de lettres (mot). L'objectif pour gagner est de suivre le chemin indiqué par cette suite de lettres et de terminer dans la salle 4.

Quels sont les « mots » gagnants ?



On étudie par exemple la suite *abaab* : celle-ci correspond au chemin qui part de la salle 1 et parcourt successivement les salles 2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 1. Comme la salle 1 n'est pas la sortie, on a $\boxed{\text{perdu.}}$

Par contre, au mot *abaaa* correspond le chemin 1 ; 2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 : ce mot est $\boxed{\text{gagnant.}}$

Examinons maintenant comment on peut trouver à coup sûr un mot gagnant :

- on voit tout d'abord que, si on est dans la salle 5, on ne peut plus en sortir, et on a perdu ;
- lorque l'on est dans les autres salles, dès qu'on lit un b, on revient en salle 1.

Il suffit donc de regarder quelles sont les suites gagnantes depuis la salle 1 :

- si on lit un a, on arrive en salle 2,
- si on lit aa, on arrive en salle 3,
- si on lit aaa, on arrive en salle 4,
- et si on lit $aaaa$, on arrive en salle 5.

Conclusion : on en déduit alors que les mots gagnants sont exactement les mots qui ne contiennent pas $aaaa$ et qui finissent par aaa.

8

Graphes et probabilités

8.a Graphes probabilistes

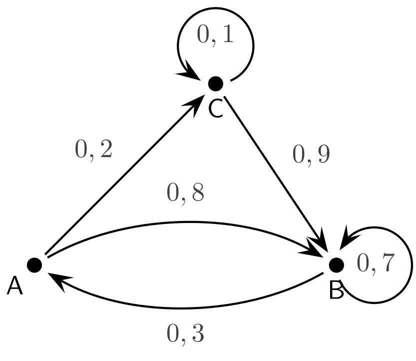
Définition 1.

On appelle **graphe probabiliste** un graphe orienté, pondéré, tel que :

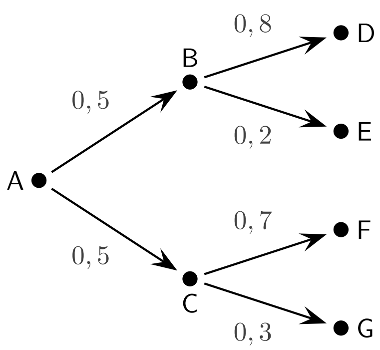
- il y a au plus une flèche d'un sommet vers un autre ;
- la somme des poids des flèches partant d'un même sommet donné est égale à 1.

Exemple 2

Voici un exemple de graphe probabiliste :



et un autre... plus connu !



Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un système pouvant changer aléatoirement d'état :

- les sommets du graphe sont les états possibles du système ;
- le poids d'une arête orientée issue du sommet s_i et d'extrémité s_j est la probabilité conditionnelle de la réalisation de l'événement s_j à l'étape $n+1$ sachant que l'événement s_i est réalisé à l'étape n.

8.b Matrice de transition

Le poids des flèches correspond à des probabilités de passage d'un état à un autre. Nous pouvons donc associer à chaque graphe une matrice appelée matrice de transition (à ne pas confondre avec la matrice d'adjacence !).

Définition 3.

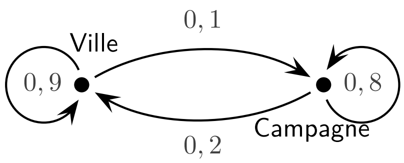
La **matrice de transition** associée à un graphe probabiliste d'ordre k est la matrice carrée $T = (t_{i;j})$ d'ordre k telle que, pour tous entiers i et j compris entre 1 et k, $t_{i;j}$ est égal au poids de l'arête orientée d'origine le sommet s_i et d'extrémité le sommet s_j si cette arête existe, et est égal à 0 sinon.

Remarque 4

- *Tous les coefficients sont positifs ou nuls, compris entre* 0 *et* 1 *;*
- *pour chaque ligne, la somme des coefficients est égale à* 1 *;*
- *le coefficient* $t_{i;j}$ *est la probabilité conditionnelle d'être dans l'état* s_j *à l'instant* $n+1$ *sachant que l'on est dans l'état* s_i *à l'instant* n *;*
- *cette matrice décrit le passage d'un état à l'état suivant.*

Exemple 5

Un pays est partagé en deux zones : l'une urbaine, l'autre rurale.
Chaque année, 10% des urbains partent vivre à la campagne et 20% des ruraux partent vivre en ville.
On obtient le graphe et la matrice de transposition suivants :



$$\text{T}= \begin{array}{c} \\ \text{Ville} \\ \text{Campagne} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Ville} & \text{Campagne} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}$$

8.c État probabiliste à la n^e étape

Considérons une expérience aléatoire à k issues possibles. À chacune des issues i est associée une probabilité p_i. Après chaque expérience, l'objet étudié se retrouve dans un état donné. À cet état nous pouvons associer des probabilités.

La loi de probabilité associée à l'expérience est un **état probabiliste**.
À cet état probabiliste est associée une **matrice ligne** $P_n = (p_1 \quad p_2 \quad \ldots \quad p_{k-1} \quad p_k)$.

Propriété 6.

Soit T la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre k.

- Si P_n est l'état probabiliste à l'étape n et P_{n+1} celui de l'étape $n+1$, alors $P_{n+1} = P_n \times T$.
- Si P_0 est l'état probabiliste initial et P_n l'état probabiliste à l'étape n, alors $P_n = P_0 \times T^n$.

✍ Démonstration.

- On pose $P_n = (a_1 \quad \dots \quad a_k)$, $P_{n+1} = (b_1 \quad \dots \quad b_k)$, A_i l'événement « le système est dans l'état i à l'instant n » et B_j l'événement « le système est dans l'état j à l'instant $n+1$ ».
On a alors pour tous $i, j \in \{1; \dots; k\}$: $a_i = P(A_i)$ et $b_j = P(B_j)$.
Puisque les A_i forment un système complet d'événements, on a $P(B_j) = \sum_{i=1}^{k} P(B_j \cap A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) P_{A_i}(B_j)$.
Ce qui nous donne $\forall j \in \{1; \dots; k\}$ la composante $b_j = \sum_{i=1}^{k} a_i\, t_{i;j}$, d'où $\boxed{P_{n+1} = P_n \times T.}$
- D'après l'égalité précédente, on en déduit par une récurrence simple que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : P_n = P_0 \times T^n.}$

Exemple 7
On reprend le pays de l'exemple 5. Supposons qu'au départ, 2 500 habitants vivent en ville et 7 500 à la campagne.

⟹ Cette expérience comporte deux états : « Ville » et « Campagne ».
L'état initial est donné par la matrice $P_0 = (2\,500 \quad 7\,500)$.

Dans **un an**, on aura :

$$P_1 = P_0 \times T = (2\,500 \quad 7\,500) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$P_1 = (3\,750 \quad 6\,250)$,
soit $\boxed{\text{3 750 citadins pour 6 250 ruraux.}}$

Dans **dix ans**, on aura :

$$P_{10} = P_0 \times T^{10} = (2\,500 \quad 7\,500) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^{10}$$

$P_{10} = (6\,549 \quad 3\,451)$,
soit $\boxed{\text{6 549 citadins pour 3 451 ruraux.}}$

8.d État stable

Nous pouvons nous demander s'il existe des conditions favorables pour que la situation ne change pas lorsque l'on répète l'expérience :

Définition 8.

Un état probabiliste P est dit **stable** si, et seulement si, il n'évolue pas lors de la répétition de l'expérience, c'est à dire lorsque $P \times T = P$.

Exemple 9
On reprend toujours notre exemple 5. Comment trouver l'état initial qui corresponde à un état stable ?

Soit $P_0 = (a \quad b)$ l'état initial. On doit trouver a et b tels que $P_0 \times T = P_0$, ce qui se traduit par :

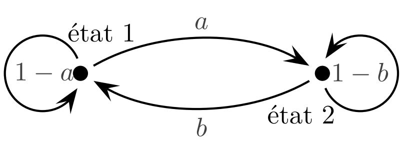
$$(a \quad b) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (a \quad b) \text{ soit : } \begin{cases} 0,9a + 0,2b = a \\ 0,1a + 0,8b = b \end{cases} \iff \begin{cases} -0,1a + 0,2b = 0 \\ 0,1a - 0,2b = 0 \end{cases} \text{ d'où } \boxed{a = 2b.}$$

En l'absence de donnée supplémentaire (population totale par exemple), il y a une infinité de solutions : par exemple 1 000 urbains pour 2 000 ruraux. . .

Dans ce cas, la proportion d'habitants en ville et à la campagne ne bougera pas au cours des années.

8.e Cas particulier de la recherche d'un état stable à deux états

Plaçons nous dans le cas où nous avons une expérience aléatoire à deux états :



$$T = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Propriété 10.

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition T ne comporte pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial P_0.

✍ Démonstration.

Supposons que l'état initial soit donné par $P_0 = (a_0 \quad b_0)$.

- T peut s'écrire sous la forme $\boxed{T = N + (1-a-b)\,R.}$
  où $\quad N = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} \quad$ et $\quad R = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$.
- Les matrices N et R commutent et on a $R \times N = N \times R = 0$.
  Par une récurrence simple, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}^* : N^k = N$ et $R^k = R$.
- $T^n = (N + (1-a-b)R)^n$
  $$= \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} N^i \times (1-a-b)^{n-i} \times R^{n-i}$$
  $$= (1-a-b)^n \times R^n + \sum_{i=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} N^i \times (1-a-b)^{n-i} \times R^{n-i} + N^n$$
  $\boxed{T^n = (1-a-b)^n \times R + N.}$
- La matrice T ne comporte pas de 0 donc, tous les nombres $a, 1-a, b$ et $1-b$ sont dans l'intervalle $]\,0\,;1\,[$ d'où $-1 < 1-a-b < 1$.
  On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-a-b)^n = 0 \quad$ soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} T^n = N.}$
- On calcule maintenant $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim\limits_{n\to+\infty} P_0\,T^n = P_0\,N$
  $$= (a_0 \quad b_0) \times \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$$
  $$= \frac{1}{a+b}\Big(b(a_0+b_0) \quad a(a_0+b_0)\Big).$$
  Or, $a_0 + b_0 = 1$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \left(\dfrac{b}{a+b} \quad \dfrac{a}{a+b}\right)} = P.$
- **Conclusion :** P_n converge vers un état stable indépendant de l'état initial.

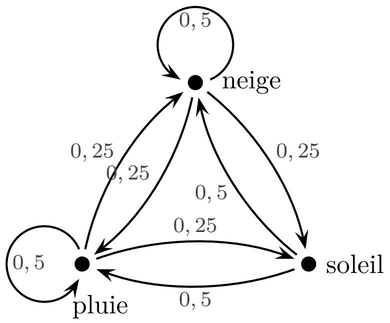
8.f Retour au pays Oz

Exemple de découverte 11.

Le magicien d'Oz a comblé tous les désirs des habitants du pays d'Oz, sauf peut-être en ce qui concerne le climat : au pays d'Oz en effet, s'il fait beau un jour, il est certain qu'il pleuvra ou neigera le lendemain avec une probabilité égale. Si le temps d'un jour est pluvieux ou neigeux, alors il reste inchangé dans 50% des cas le lendemain et ne devient beau que dans 25% des cas.
Les habitants se sont plaints auprès du magicien, affirmant qu'ils n'ont qu'un beau jour sur cinq.
Ce à quoi il a répondu qu'il s'agissait d'une impression mais qu'en réalité, il y a bien plus d'un beau jour sur cinq.

Qui a raison ?

Graphe probabiliste représentant la situation :



et T une de ses matrices de transition :

$$T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Il nous faut déterminer la limite de T^n lorsque n tend vers $+\infty$.

Cette résolution utilise l'algèbre linéaire qui n'est bien évidemment pas au programme du secondaire ! Les calculs sont menés avec Maple©.

Soit la matrice T définie par $t := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

On calcule les valeurs propres de la matrice T :
> *eigenvals(t) ;*

$$1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$$

Puis les vecteurs propres :
> *eigenvects(t) ;*

$$\left[\frac{1}{4}, 1, \{[-1 \quad 0 \quad 1]\}\right], [1, 1, \{[1 \quad 1 \quad 1]\}], \left[-\frac{1}{4}, 1, \{[1 \quad -4 \quad 1]\}\right]$$

Ce qui nous donne la matrice de passage P définie par $p := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

et la matrice diagonale associée D :
> *d := multiply(p∧(-1), t, p) ;*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

On a donc : $T = P\ D\ P^{-1}$ d'où $T^n = P\ D^n\ P^{-1}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

D'ou $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n = P\ L\ P^{-1}$:
> *multiply(p, l, p∧(-1)) ;*

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice s'interprète en disant que dans le pays d'Oz, il pleut avec une probabilité de $\frac{2}{5}$, il fait beau avec une probabilité de $\frac{1}{5}$ et il neige avec une probabilité de $\frac{2}{5}$.

Conclusion : ce sont les habitants du pays d'Oz qui ont raison : il fait beau un jour sur cinq.

9 Graphes planaires

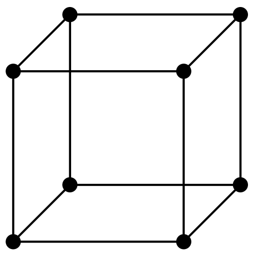
Ce chapitre ne figure pas dans le programme de terminale ES. Néanmoins, son aspect très intéressant méritait de figurer dans ce document !

9.a Définition

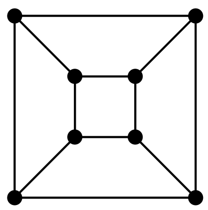
Définition 1.

Un graphe **planaire** est un graphe qui peut être dessiné dans le plan sans que ses arêtes ne se coupent.

Exemple 2
Le graphe de la représentation en perspective cavalière du cube est-il planaire ?



oui, comme on peut le voir ci-contre :



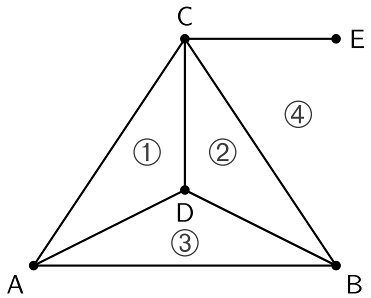
La visualisation d'un graphe planaire n'est pas aisée. Nous pourrions utiliser un logiciel de géométrie dynamique afin de tenter de voir si un graphe est planaire.
Attention cependant, si la recherche n'aboutit pas, cela ne voudra pas dire que, nécessairement, le graphe n'est pas planaire !

9.b Théorème d'Euler

Tout d'abord, quelques précisions au niveau du vocabulaire : un graphe planaire découpe le plan en plusieurs régions.

- Une **face** F d'un graphe est par définition une région du plan limitée par des arêtes et qui ne contient ni sommet, ni arête dans son intérieur.
- Deux faces sont dites **adjacentes** si leur contour contient au moins une arête commune ; deux faces qui ne se touchent que par un sommet ne sont pas adjacentes.
- Le **degré** d'une face F, noté $deg(F)$ est égal à la longueur du cycle ou de la chaîne fermée qui limite F.

Exemple 3
On considère le graphe suivant :



Ce graphe comporte :
- la région ① de degré 3 limitée par le cycle A - C - D ;
- la région ② de degré 3 limitée par le cycle B - C - D ;
- la région ③ de degré 3 limitée par le cycle A - B - D ;
- la région ④ de degré 5 autour de la chaîne fermée E - C - B - A - C - E.

Nous remarquons ainsi que toute arête limitant deux faces, ou intérieure à une face, est comptée deux fois dans la chaîne fermée. D'où la propriété :

Propriété 4.

La somme des degrés des faces F d'un graphe planaire est égale à deux fois le nombre d'arêtes a :

$$\sum_F deg(F) = 2a.$$

Exemple 5
Dans l'exemple précédent, il y a sept arêtes et la somme des degrés des faces vaut $3+3+3+5=14=2\times 7$.

La relation de Descartes-Euler pour les polyèdres convexes formulée en 1752 reste valable pour des graphes planaires, c'est à dire :

Théorème 6 (Relation d'Euler)**.**

Dans un graphe G planaire connexe, soit s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces, on a la relation :

$$s - a + f = 2.$$

✍ <u>Démonstration</u>

Soit n le degré de G, avec $n \geq 2$.

Cas où le graphe est sans cycle : le graphe ne comporte alors qu'une seule face, n sommets et $n-1$ arêtes et on a : $s - a + f = n - (n-1) + 1 = 2$.

Cas où le graphe contient au moins un cycle : on effectue une démonstration par récurrence sur le nombre d'arêtes.

- **Initialisation :** s'il y a une seule arête, le graphe est sans cycle et on se ramène au cas précèdent.
- **Hérédité :** on suppose la relation vraie pour a, c'est à dire $s_{(a)} - a + f_{(a)} = 2$.
  On ajoute une arête à celles déjà en place. Deux cas peuvent se produire :
  – Soit on ajoute un nouveau sommet. Il n'y a donc pas de nouveau cycle, ni de nouvelle face :
  $s_{(a+1)} - (a+1) + f_{(a+1)} = (s_{(a)} + 1) - a - 1 + (f_{(a)} + 0)$
  $= s_{(a)} - a + f_{(a)} + 1 - 1 + 0 = 2$, d'après l'hypothèse de récurrence.
  – Soit l'arête rejoint deux sommets déjà existants, cela revient à ajouter une nouvelle face :
  $s_{(a+1)} - (a+1) + f_{(a+1)} = (s_{(a)} + 0) - a - 1 + (f_{(a)} + 1)$
  $= s_{(a)} - a + f_{(a)} + 0 - 1 + 1 = 2$ également.
  L'hypothèse étant encore vraie au rang $a+1$, on en déduit qu'elle est vraie pour tout $a \geq 1$.

9.c Critères de planarité

Nous avons les deux critères simples suivants :

Propriété 7.

Soit G un graphe simple planaire connexe de degré s, alors $a \leq 3s - 6$.
Si de plus G est sans triangle, alors $a \leq 2s - 4$.

Attention, ces relations ne sont pas biunivoques et permettent seulement de montrer qu'un graphe n'est pas planaire, par contraposée.

✍ Démonstration :

Première inégalité : on considère un graphe simple planaire ; alors, chaque face est bordée par au moins trois arêtes.

On a donc pour chaque face F : $deg(F) \geq 3$ et si l'on somme cette inégalité sur toutes les faces du graphe, cela nous donne : $\sum_F deg(F) \geq 3f$,
mais d'après la propriété 4, $\sum_F deg(F) = 2a$ d'où $\boxed{3f \leq 2a.}$
En remplaçant f par $2 - s + a$ (relation d'Euler), on obtient $6 - 3s + 3a \leq 2a \Longleftrightarrow \boxed{a \leq 3s - 6.}$

Seconde inégalité : si le graphe est sans triangle, toute face est de degré supérieur ou égale à 4.

On a donc pour chaque face F : $deg(F) \geq 4$ et si l'on somme cette inégalité sur toutes les faces du graphe, cela nous donne : $\sum_F deg(F) \geq 4f$,
mais d'après la propriété 4, $\sum_F deg(F) = 2a$ d'où $\boxed{4f \leq 2a.}$
En remplaçant f par $2 - s + a$ (relation d'Euler), on obtient $8 - 4s + 4a \leq 2a \Longleftrightarrow \boxed{a \leq 2s - 4.}$

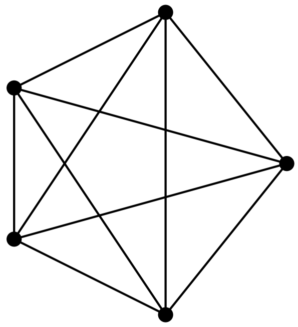
Propriété 8.

Les graphes $K_{3,3}$ et K_5 ne sont pas planaires.

✍ Démonstration :

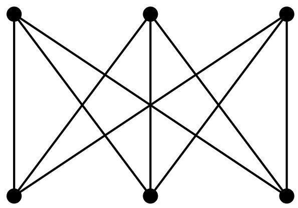
Graphe K_5 : c'est le graphe complet à $s = 5$ sommets.
Il possède $a = 10$ arêtes, il est simple et connexe donc, s'il était planaire, il vérifierait la relation de la propriété 7 : $a \leq 3s - 6$.

Ici, on a $3s - 6 = 3 \times 5 - 6 = 9$ qui n'est pas plus grand que $a = 10$.
Donc, $\boxed{K_5 \text{ n'est pas planaire.}}$



Graphe $K_{3,3}$: il possède $s = 6$ sommets et $a = 9$ arêtes.
Or, $3s - 6 = 3 \times 6 - 6 = 12$ qui est plus grand que $a = 9$.
Ce critère ne nous permet donc pas de conclure.

En revanche, ce graphe est sans triangle, on peut donc tester le second critère du théorème 7 : $a \leq 2s-4$.
$2s - 4 = 2 \times 6 - 4 = 8$ qui n'est pas plus grand que $a = 9$.
Donc, $\boxed{K_{3,3} \text{ n'est pas planaire.}}$



Il est trivial que tout graphe qui contient un graphe non planaire est encore non planaire.

La mathématicien Polonais Kazimierz Kuratowski ($1896 - 1980$) a établi en 1930 la caractérisation suivante des graphes planaires :

Théorème 9 (de Kuratowski)**.**

Un graphe G est planaire si, et seulement si, il ne contient aucun sous-graphe obtenu à partir de K_5 et de $K_{3,3}$ par subdivision des arêtes.

La subdivision des arêtes est le résultat de l'ajout d'un ou plusieurs sommets sur une ou plusieurs arêtes.

Un peu d'histoire...
Quelques années plus tard, le mathématicien Allemand Klaus Wagner ($1910 - 2000$) en donna une caractérisation semblable :

Un graphe G est planaire si et seulement s'il ne compte pas K_5 ou $K_{3,3}$ parmi ses mineurs.

(Un mineur d'un graphe est le résultat de la contraction d'arêtes fusionnant les extrémités, la suppression d'arêtes sans fusionner les extrémités, et la suppression de sommets et des arêtes adjacentes).

La différence entre ces deux caractérisations est très petite, mais Wagner fit la conjecture (démontrée en 2004) que ce dernier admettrait une généralisation que celle de Kuratowski n'admettait pas.

9.d Trois maisons, trois installations

Nous pouvons donc répondre à notre activité de découverte :

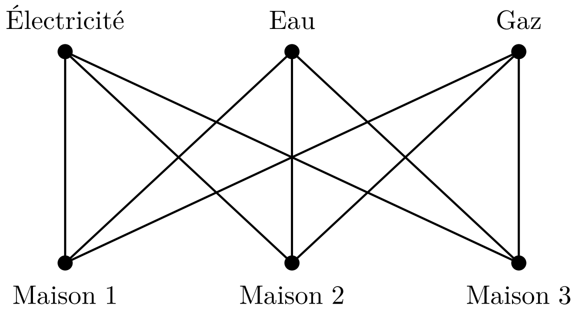
Exemple de découverte 10.

Un lotissement de trois maisons doit être équipé d'électricité, d'eau et de gaz. La réglementation interdit de croiser les canalisations pour des raisons de sécurité.

Est-il possible d'effectuer tous les raccordements ?

Si l'on modélise la situation par un graphe, on obtient le graphe $K_{3,3}$ qui n'est pas planaire.

Conclusion : il n'est pas possible d'effectuer tous les raccordements.



En revanche, il suffirait de supprimer une seule canalisation pour que les huit raccordements restants soient possibles.

Les graphes planaires ont également été utilisés pour concevoir les tout premiers circuits imprimés à transistors : en effet, quand le graphe du circuit était planaire, on évitait alors de devoir recourir au procédé bicouche ou à des « straps » fragiles pour s'échapper du plan du circuit imprimé.