MATHÉMATIQUES & ASTRONOMIE

CALCULS DE DISTANCES ASTRONOMIQUES

NOM :

Prénom :

4ème … du collège … , année 2006/2007

Plan des séquences :

<u>Séquence 1</u> : La mesure de la Terre par Eratosthène

<u>Séquence 2</u> : Détermination du diamètre apparent de la Lune

<u>Séquence 3</u> : Calcul du rapport $\dfrac{\textbf{Distance Terre – Soleil}}{\textbf{Distance Terre - Lune}}$

<u>Séquence 4</u> : Calcul du diamètre Lunaire, de la distance Terre-Lune, de la distance Terre-Soleil et du diamètre solaire

Séquence 1 : La mesure de la terre par Ératosthène

(Extrait de la revue "Espace Information" n°31 octobre 1985).

Ce 21 juin, un homme accroupi au centre de la grande place d'Alexandrie, un misérable cadran solaire à la main, se propose de mesurer les dimensions du globe terrestre.

Calculer la taille exacte du monde, quel rêve merveilleux, quelle arrogante ambition de la créature microscopique vivant sur la surface immense de la planète ! Et, hélas ! Quelle entreprise futile…

A midi juste, en ce jour du solstice d'été, il va essayer de déterminer avec précision la grandeur du globe terrestre à l'aide d'un simple gnomon. Cet instrument peu élaboré ne pourra que lui donner l'angle sous lequel un objet vertical projette son ombre. Mais pour réaliser son dessein, Ératosthène compte surtout sur la richesse des renseignements qu'il a puisés dans la bibliothèque.

Une information amusante, mais sans aucune valeur scientifique apparente, doit servir de base à la méthode aussi simple qu'ingénieuse qu'Ératosthène a maintenant l'intention d'employer pour prendre la mesure de la Terre. II a lu quelque part que dans la Ville de Syène (aujourd'hui Assouan), où il n'est jamais allé, le Soleil de midi, le jour du solstice, est absolument perpendiculaire et ne projette aucune ombre. Des voyageurs rapportaient qu'à ce moment précis, on pouvait en regardant dans un puits très profond et étroit, y voir le Soleil se réfléchir d'aplomb. Tel n'était pas le cas à Alexandrie : même à midi, même un jour de solstice, les rayons solaires n'étaient pas parfaitement verticaux.

Ératosthène était de ces savants de l'antiquité qui croyaient déjà que la Terre est une sphère. Cette théorie n'était pas universellement reconnue, loin de là. Ses adversaires avaient pour eux l'évidence quotidienne, ce que voient nos yeux, et les esprits scientifiques étaient entraînés à n'accepter comme vérité que ce qu'ils voyaient, la vérité telle que l'œil la perçoit étant indiscutablement que la Terre est plate.

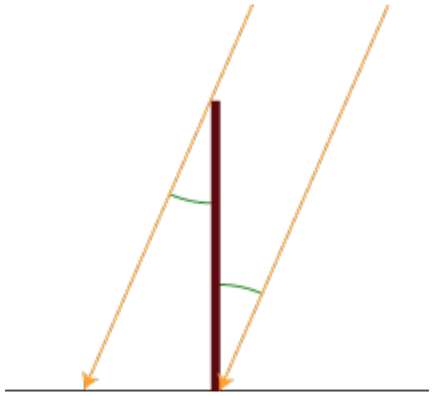
Il y avait bien, naturellement, des phénomènes difficiles à concilier avec l'idée d'un monde plat ainsi l'apparition, à l'horizon, d'un navire dont on ne voit d'abord que le haut du mât, puis la voilure et enfin la coque. Certains philosophes en déduisaient une preuve de la courbure de la Terre, mais ils demeuraient une minorité.

Ératosthène, qui partageait ce point de vue, pensa que la sphéricité de la Terre pouvait expliquer cette différence entre les ombres de Syène et celles d'Alexandrie. Le soleil est si éloigné que ses rayons arrivent parallèlement à la surface de la terre. Mais à Syène située au tropique du Cancer, ils tombent verticalement, tandis que, plus au nord, les rayons atteignent Alexandrie sous un angle dû à la courbure de la Terre.
Une autre information retrouvée dans les livres de la bibliothèque complétait la méthode d' Ératosthène : il avait lu que les caravanes partant de Syène mettaient cinquante jours pour arriver à Alexandrie en parcourant 100 stades (environ 16 km) par jour. Il calcula donc que la distance entre les villes était de 5000 stades (800 km). Fondée sur d'aussi maigres données, la première tentative connue de mesurer le globe terrestre commença à Alexandrie.
11 heures 50, le soleil d'Egypte darde à plomb ses feux. Ératosthène prépare son gnomon. Il est 11 heures 59… midi. Il mesure l'angle que l'extrémité de l'ombre forme avec la verticale du cadran : un cinquantième de cercle, ce qui équivaut à 7°12'. Le savant bibliothécaire procède enfin à un calcul d'une simplicité enfantine.

Calcul de la circonférence et du rayon terrestre par la méthode d'Ératosthène

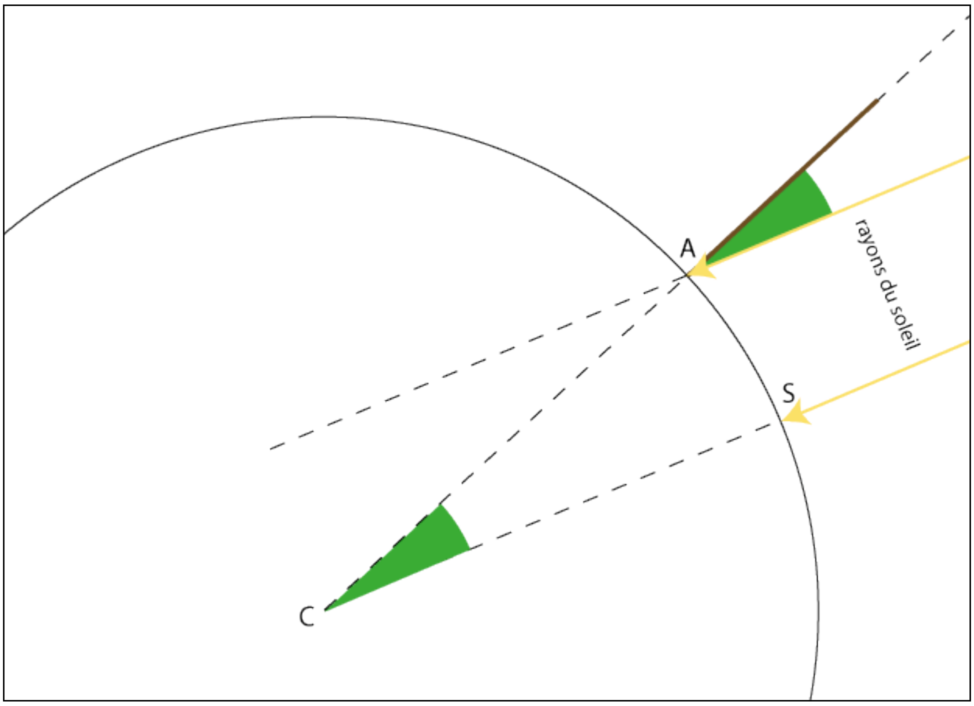
Eratosthène de Cyrène (Cyrène 280 – Alexandrie 198) était un grand savant grec. Il était à la fois astronome, mathématicien, géographe et philosophe. Il fut responsable de la bibliothèque d'Alexandrie (en Egypte), et connut Archimède (qui lui vivait à Syracuse, en Sicile).
On lui doit de nombreux travaux, dont celui de la mesure de la circonférence de la terre :

1. Le schéma de droite représente les rayons du soleil et l'ombre formée par un bâton. Pourquoi les rayons du soleil peuvent-ils être considérés comme parallèles sur la terre ?



Pourquoi les deux angles marqués sur cette figure sont égaux ?

Le schéma ci-dessous résume la situation : A représente Alexandrie, S Syène. La droite (AC) représente la verticale à Alexandrie : elle "porte" le bâton !



2. Expliquer pourquoi l'angle que forment les rayons du soleil avec la verticale à Alexandrie est égal à l'angle $\widehat{ACS}$.

3. La distance entre Alexandrie et Syène est de ________ stades (une des unités de mesure égyptienne), ce qui correspond à environ _________ km. Retrouve le calcul effectué par Ératosthène pour obtenir ces résultats :

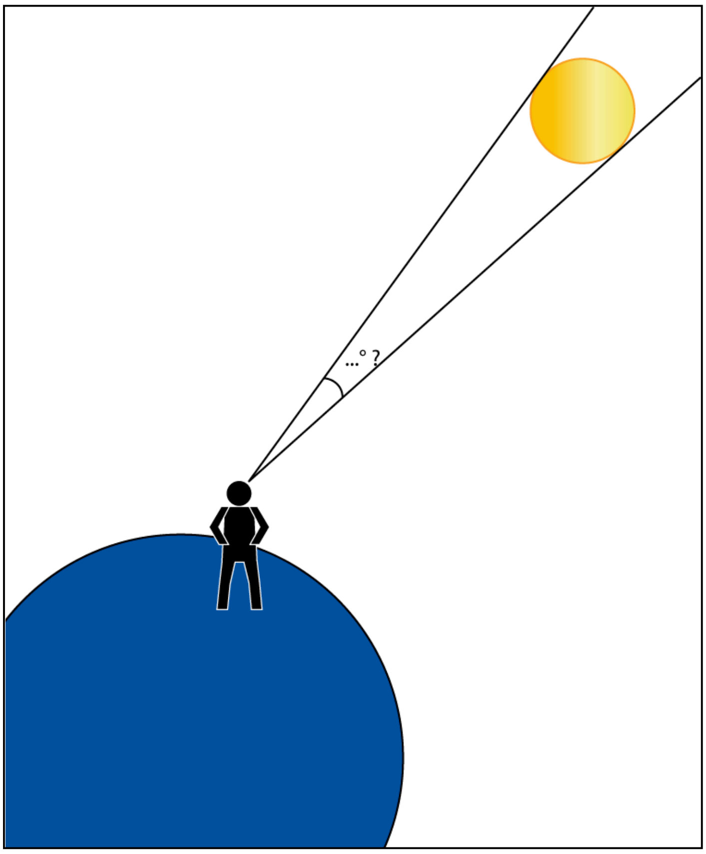
4. Si l'angle correspondant à 800 km est de 7,12°, à quelle longueur correspondent 360° ? Cette longueur est approximativement égale à la circonférence de la Terre.

5. Quelle égalité lie la circonférence d'un cercle à son rayon ? En déduire la mesure du rayon terrestre calculé par Eratosthène.

6. Compare ce résultat avec la mesure du rayon terrestre que l'on connaît aujourd'hui. Que remarques-tu ?

Détermination du diamètre apparent de la lune

Le diamètre apparent d'un objet, c'est l'angle sous lequel un observateur peut le voir :



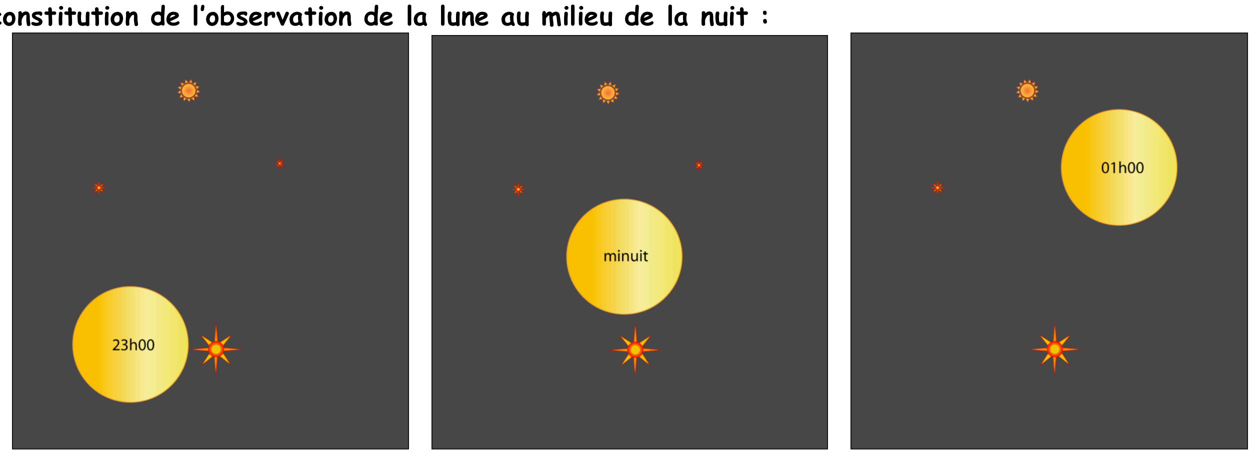
Pour calculer le diamètre apparent de la Lune, il suffit de connaître sa période de révolution autour de la Terre, ainsi que sa vitesse de déplacement.

Il ne faut pas confondre période de révolution *sidérale*, c'est-à-dire la durée nécessaire à la Lune pour effectuer un tour de la Terre et qui est d'environ 27 jours et 8 heures, avec sa période de révolution *synodique* ou lunaison, qui correspond à la durée qui sépare deux aspects identiques de la Lune pour un observateur terrestre, et qui dure environ 29 jours et 12 heures.
En effet, puisque la terre tourne autour du soleil, elle se déplace sur son orbite, et il faut environ deux jours de plus que la période sidérale pour que les trois astres soient à nouveau en conjonction.

Ce que nous retiendrons est la lunaison :
« La lune tourne autour de la terre en _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ »

Pour déterminer grossièrement la vitesse de déplacement de la lune, il suffit de l'observer pendant quelques heures durant la nuit, et de noter sa position par rapport aux étoiles fixes :

Reconstitution de l'observation de la lune au milieu de la nuit :



Sur la même feuille, décalquer ces « trois » Lunes en vous servant des étoiles comme repère.

Combien de temps faut-il à la Lune pour se déplacer d'un diamètre ? _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Conversions préalables… On veut convertir toutes les durées en heures…

29 jours	1 jour
? heures	24 heures

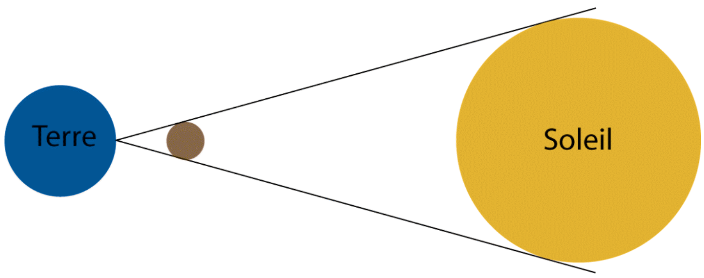
Ainsi une lunaison dure _ _ _ _ _ heures.

Puisque la Lune effectue 360° pendant une lunaison, et qu'elle se déplace d'un diamètre en une heure, retrouvez son diamètre apparent :

Mesure de l'angle en °	360	?
Durée en heures		1

En conclusion : le diamètre apparent de la lune mesure _ _ _ _°

Mais aussi…
Observez cette photo et ce schéma d'une éclipse de soleil…



Que remarquez-vous ?

Calcul du rapport $\dfrac{\text{Distance Terre – Soleil}}{\text{Distance Terre - Lune}}$

Aristarque de Samos (environ 310 à 230 avant JC) est l'auteur d'un « Traité des dimensions et distances du soleil et de la Lune » qui comporte 18 propositions basées sur ses observations. Nous allons à sa manière calculer les rapports de distance, en utilisant nos calculs précédents.
Voici le début de la traduction de son ouvrage (téléchargé sur http://gallica.bnf.fr) :

TRAITÉ

D'ARISTARQUE

DE SAMOS,

SUR LES GRANDEURS ET LES DISTANCES

DU SOLEIL ET DE LA LUNE.

TRADUIT EN FRANÇAIS, POUR LA PREMIÈRE FOIS,

PAR M. LE COMTE DE FORTIA D'URBAN,

MEMBRE DE PLUSIEURS ACADÉMIES ET SOCIÉTÉS LITTÉRAIRES.

PARIS,

FIRMIN DIDOT PÈRE ET FILS, LIBRAIRES,

RUE JACOB, N° 24.

DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT.

MDCCCXXIII

TRADUCTION

DE L'OUVRAGE

D'ARISTARQUE

DE SAMOS,

SUR LES GRANDEURS ET LES DISTANCES

DU SOLEIL ET DE LA LUNE.

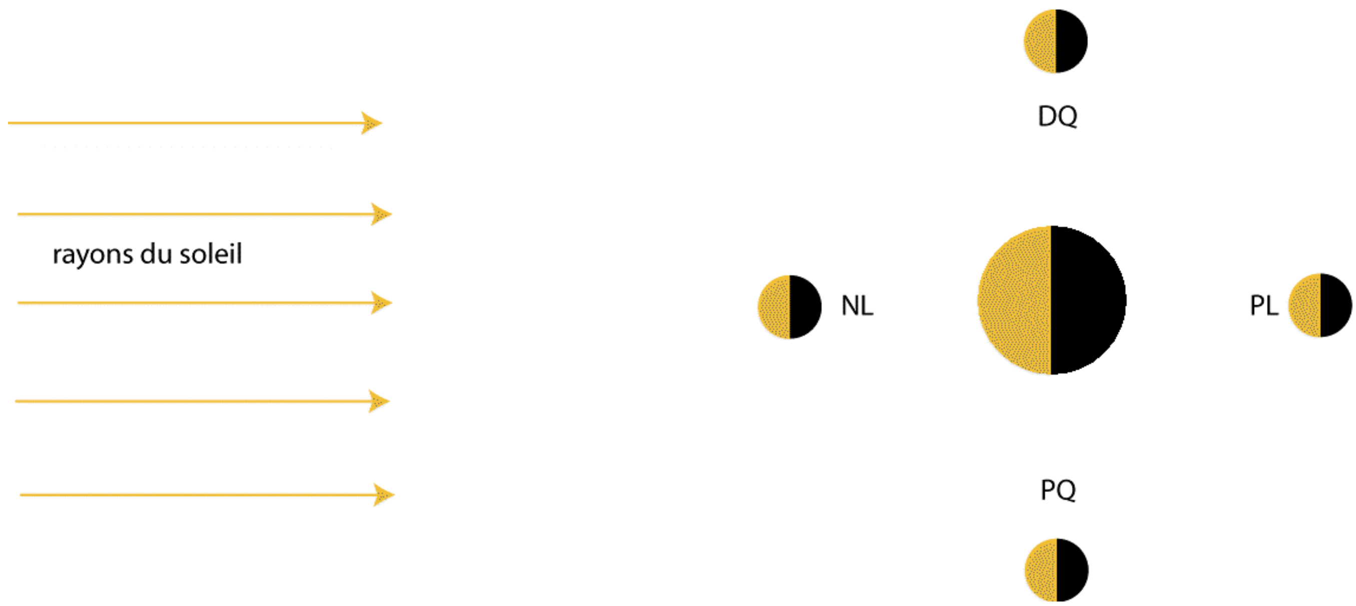
HIPOTHÈSES D'ARISTARQUE.

1. La lune reçoit sa lumière du soleil.
2. La terre peut être considérée comme un point, et comme le centre de l'orbite de la lune.
3. Lorsque la lune nous paraît *dikhotome* (coupée en deux portions égales), elle offre à nos regards son grand cercle, qui détermine la partie éclairée et la partie obscure de cet astre.
4. Lorsque la lune nous paraît dikhotome, sa distance du soleil est moindre du quart de la circonférence, de la trentième partie de ce quart.
5. La largeur de l'ombre est de deux lunes.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement au point n°4 :
« Lorsque la Lune nous parait dichotome, sa distance du soleil est moindre du quart de la circonférence, de la trentième partie de ce quart »

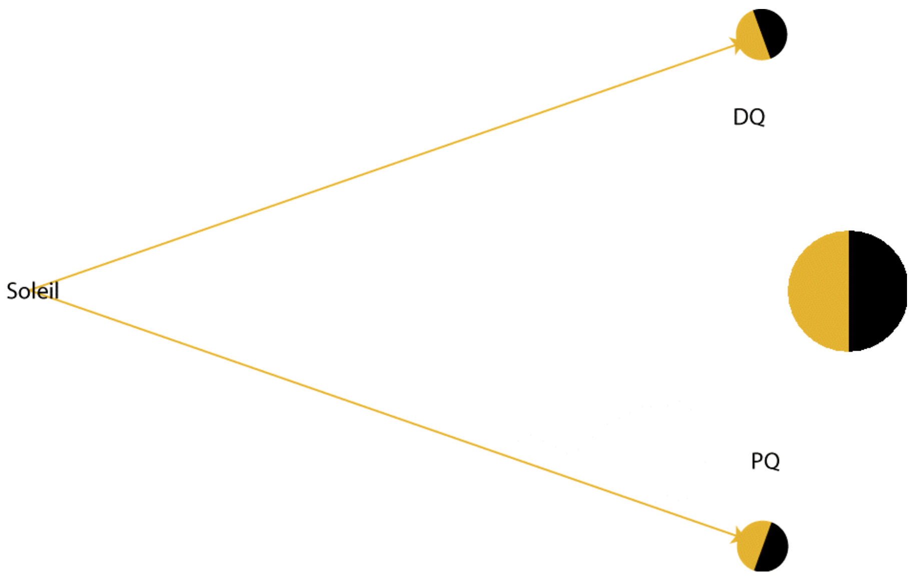
- **Que signifie « dichotome » dans ce texte ?**

- Si l'on considère le soleil à l'infini, on considère que ses rayons sont parallèles. On représente alors les phases de la lune par ce schéma :



En réalité, le soleil n'est pas à l'infini, ses rayons du soleil ne sont donc pas parallèles entre eux !

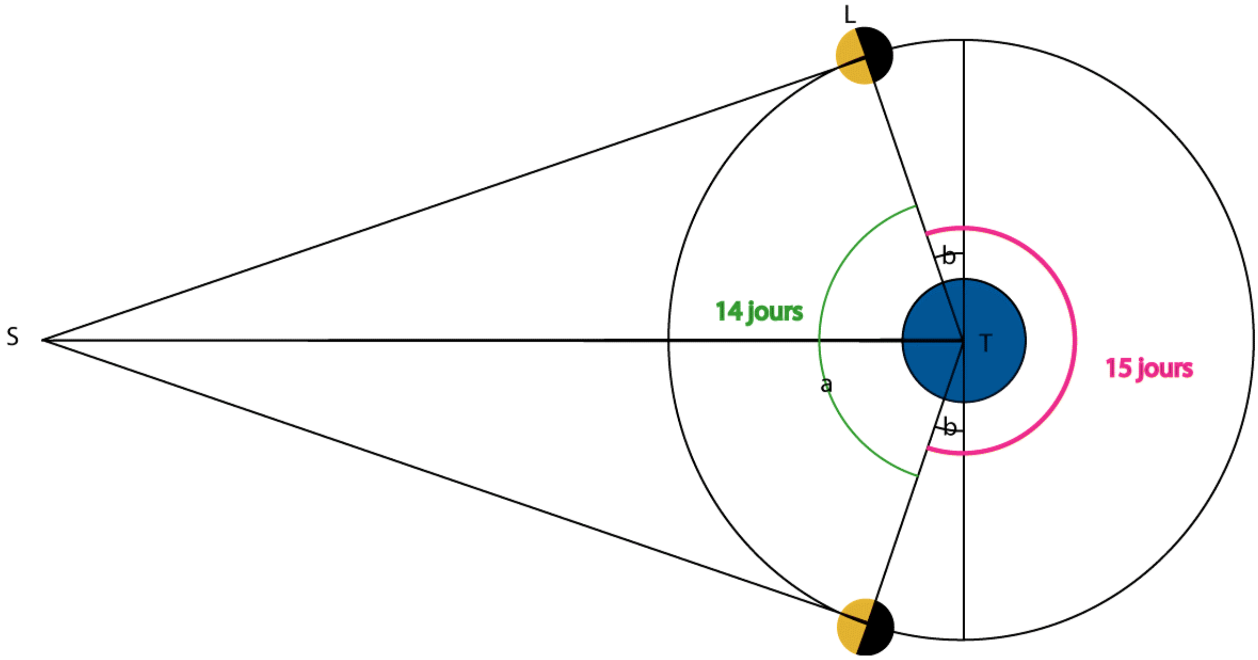
Intéressons nous seulement au premier et au dernier quartier, et refaisons le schéma précédent sans considérer les rayons du soleil parallèles :



La vitesse de la lune est sensiblement la même lorsqu'elle tourne autour de la terre, « devant » ou « derrière »… La durée est donc moins longue entre le _ _ _ _ _ et le _ _ _ _ _ quartier qu'entre le _ _ _ _ et le _ _ _ _ …

Aristarque avait compté : 14 jours entre le Dernier et le Premier quartier
15 jours entre le Premier et le dernier quartier

(il comptait donc _ _ _ _ jours pour une lunaison…)



Compléter ce tableau de proportionnalité :

Angle en degrés	360	
Durée en jours	29	14

Puisque a + 2b =
Alors 2b =

b =

Aristarque en déduit donc que l'angle b, que l'on retrouve également en S (c'est l'angle $\widehat{TSL}$), mesure _ _ _ _ . C'est ce qu'il veut signifier par « *sa distance du soleil est moindre du quart de la circonférence, de la trentième partie de ce quart* »…

Prenons des données actuelles et recalculons cet angle :

Une lunaison dure 29 jours et 12 heures, et la durée séparant :
- le Premier du Dernier quartier est 14 jours 18 heures 35 minutes
- le Dernier du Premier quartier est 14 jours 17 heures 25 minutes

(ce qui correspond à une différence de _ _ _ minutes, bien loin de la journée d'Aristarque !)

Convertissez les durées en jours :

1 heure	
60 minutes	25 minutes

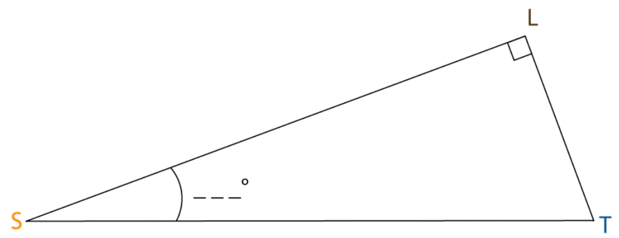
1 jour	
24 heures	heures

1 jour	
24 heures	heures

Ainsi 14 jours 17 heures et 25 minutes correspondent à _ _ _ _ _ _ _ _ _ jours

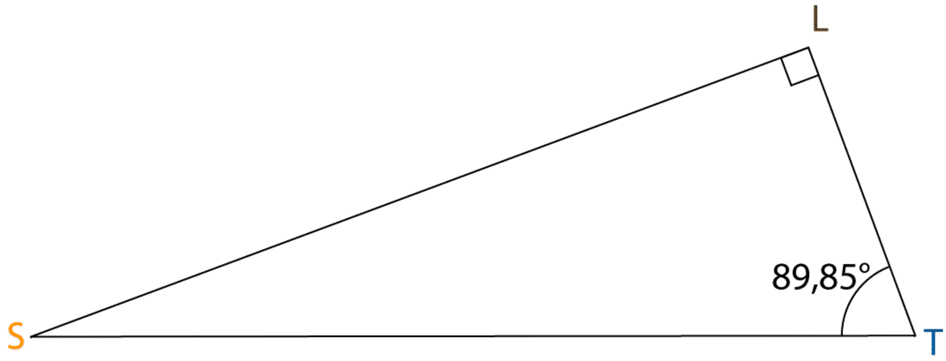
On peut ainsi retrouver la valeur de a puis de b :

Angle en degrés	360	a =
Durée en jours	29,5	



APPLICATION : Calcul du rapport $\dfrac{\text{Distance Terre - Soleil}}{\text{Distance Terre - Lune}}$

Expliquez pourquoi $\hat{T}$ = 89,85° : _



Dans ce triangle rectangle en L, cos(89,85) = $\dfrac{\text{côté adjacent à l'angle } \hat{T}}{\text{hypoténuse du triangle STL}} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Ainsi $\dfrac{TS}{TL}$ =

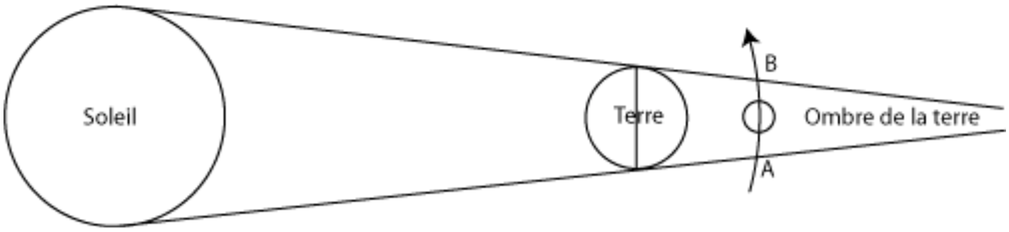
Autrement dit TS = _ _ _ × TL :

« La distance Terre-Soleil est _ _ _ fois plus grande que la distance _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ »

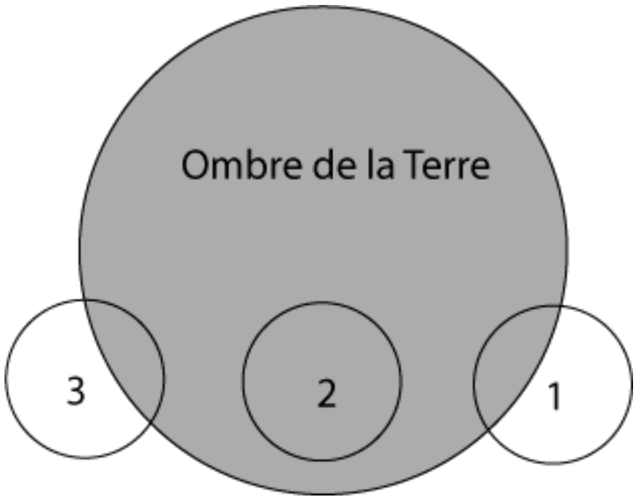
Calcul du diamètre Lunaire, de la distance Terre-Lune et de la distance Terre-Soleil

Quand la Lune tourne autour de la Terre, il lui arrive de passer dans l'ombre de notre planète : c'est une éclipse de Lune.
Toutes les personnes situées sur la moitié de la Terre dans l'ombre peuvent l'observer.

Le schéma suivant représente une éclipse de Lune (les proportions ne sont pas respectées !!!)



Lors d'une éclipse totale de Lune, un observateur terrestre voit d'abord la Pleine Lune rentrer dans l'ombre de la Terre (1), être ensuite totalement éclipsée (2), puis ressortir (3).

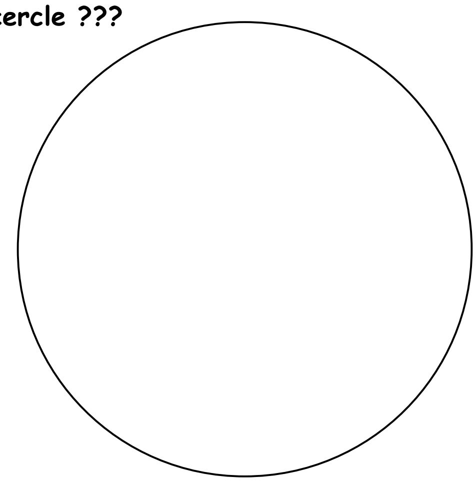


Cette photo a été prise lors de l'éclipse de Lune du 4 Avril 1996. La Lune est en train de sortir de l'ombre de la Terre.

I. Calcul du diamètre Lunaire

Nous connaissons le diamètre Terrestre qui vaut D_T= _ _ _ _ _ _ km
Le but de cette partie est de calculer le diamètre Lunaire D_L en utilisant la photographie de l'éclipse.

1. **Mesure du diamètre D_O de l'ombre de la Terre sur la Lune à partir de la photo**
   - **Comment faire pour retrouver le centre O de ce cercle ???**



Placer 3 points A, B, C sur le cercle.
Que peut-on dire de OA et OB ?de OB et OC ?

Que peut-on en déduire pour le point O ?

Avec ton compas et ta règle, retrouve l'emplacement du point O, et mesure le rayon du cercle.

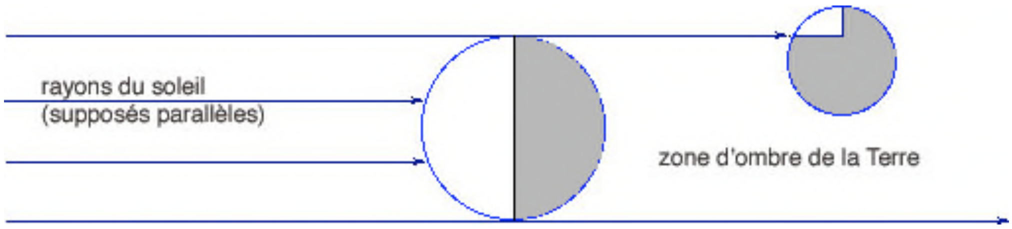
- **Application :**

Décalque le plus précisément possible la Lune et l'ombre de la Terre. Retrouve ensuite le centre et le rayon de chaque cercle. En déduire :
D_L (figure) = _ _ _ _ cm
D_O (figure) = _ _ _ _ cm

$$\text{Ainsi } \frac{D_O}{D_L} \approx \_\_\_\_$$

2. **Méthode approximative pour déterminer le diamètre de la Lune**

Considérons l'ombre de la Terre cylindrique… Le diamètre de la Terre est donc égal au diamètre de son ombre !



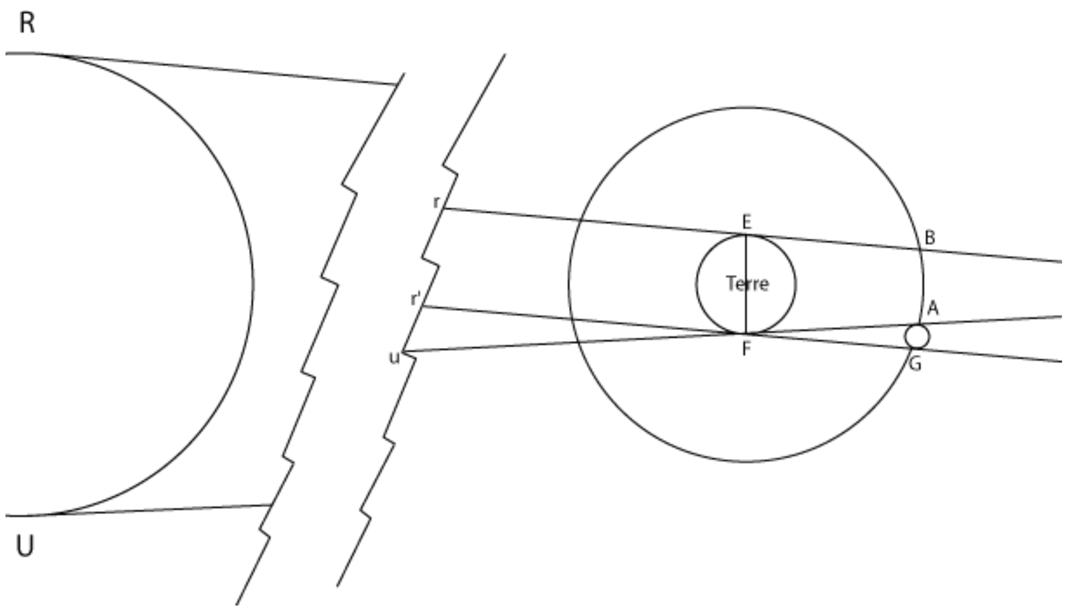
On a donc $D_T = D_O \approx \_\_\_ \times D_L$

Ainsi $D_L \approx$

Comparer ce résultat avec la valeur aujourd'hui connue de D_L. Est-il proche de la réalité ?

3. **Méthode plus précise**

On utilise cette fois-ci le fait que l'ombre de la Terre est conique.



- **Analyse de la figure :**

[Fu) est dirigée vers le bord « inférieur » U du Soleil alors que [Er) et [Fr') sont dirigés vers le bord « supérieur » R du Soleil.

Le secteur angulaire $\widehat{RFU}$ = $\widehat{r'FU}$ correspond au _ du Soleil. Il est donc égal au secteur angulaire _ _ _ _ .

On a vu lors de la séance précédente que la distance Terre-Soleil était environ _ _ _ _ fois plus grande que la distance Terre-Lune. On peut ainsi considérer que (EB) et (FG) sont _ _ _ _ _ _ _ _ _. Si l'on suppose l'orbite de la Lune rectiligne durant un laps de temps aussi court que celui d'une éclipse, on peut ainsi dire que :

GB = GA + AB = _ _ _ _

Ou, en raisonnant avec D_T, D_O et D_L:

$\boxed{D_T = \_\ \_\ \_\ \_ + \_\ \_\ \_\ \_}$

- Calcul de D_L

D_O = _ _ _ _ $\times$ D_L

Or _ _ _ _ + _ _ _ _ = D_T = 12 740

Soit _ _ _ _ _ _ _ + _ _ _ _ = 12 740

_ _ _ _ _ _ _ = 12 740

ainsi D_L =

« Le diamètre de la Lune vaut environ _ _ _ _ _ _ km»

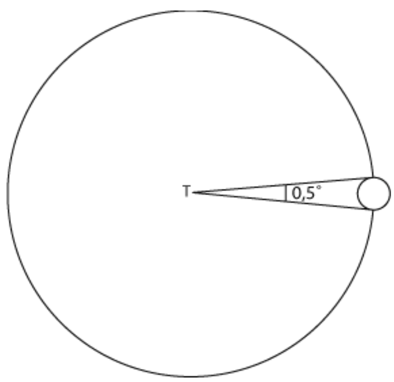
Compare ce résultat avec la valeur aujourd'hui connue de D_L. Qu'en penses-tu?

II. Calcul de la distance Terre-Lune

Pour calculer la distance Terre-Lune, il suffit maintenant d'une simple formule de trigonométrie et d'un calcul de proportionnalité…

On rappelle que le diamètre apparent de la Lune vaut _ _ _ _ et que son orbite est quasiment circulaire.

Afin de trouver la longueur de l'orbite de la Lune, assimilons la Terre à son centre, et considérons la longueur de l'arc intercepté par l'angle de 0.5° égale au diamètre de la Lune, soit _ _ _ _ _ _ _ _ km.



Mesure de l'angle en degré		
Longueur de l'arc correspondant en km		

Circ =

La circonférence de l'orbite lunaire mesure environ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ km.

Puisque la circonférence C d'un cercle est reliée à son rayon R par la formule

C =_ _ _ _ _

alors R =

Ainsi R =

« *La distance Terre-Lune vaut environ _ _ _ _ _ km* »

En réalité…
L'orbite de la Lune n'est pas parfaitement circulaire. La distance Terre-Lune varie entre 356 400 km et 406 700 km.
Lorsque la distance est minimale, on dit que la Lune est au Périgée, lorsqu'elle est maximale on dit qu'elle est à l'Apogée.
On considère qu'en moyenne la distance Terre-Lune est 384 400 km.

III. Calcul de la distance Terre-Soleil

On a vu lors de la séance 5 que TS ≈ _ _ _ × TL

En utilisant le résultat obtenu précédemment, on a donc :

TS ≈

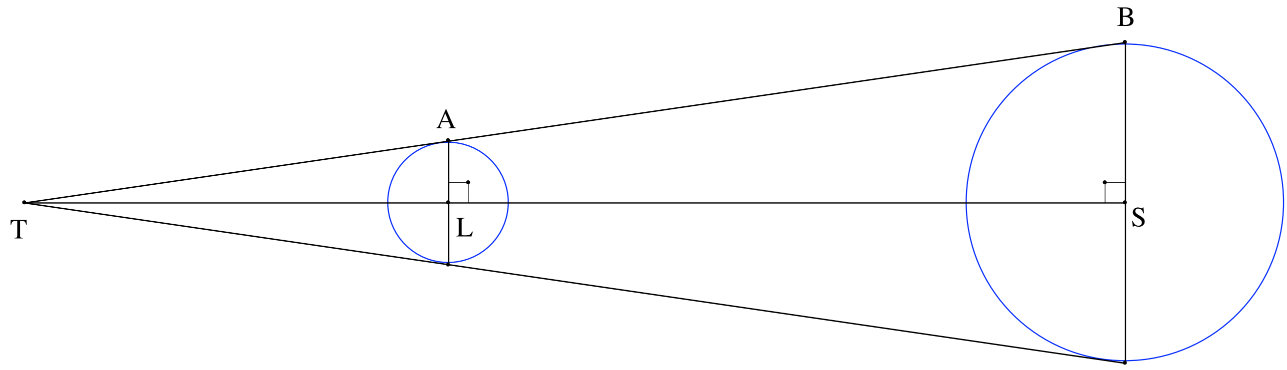
En arrondissant grossièrement afin d'obtenir une valeur que l'on peut retenir :

« *La distance Terre-Soleil vaut environ _ _ _ _ _ km* »

IV. Calcul du diamètre solaire

Lors de la deuxième séquence, on a vu que le Soleil et la Lune avaient le même diamètre apparent, et que ce résultat se retrouvait lors des éclipses de Soleil. On a également vu au paragraphe précédent que TS ≈ _ _ _ × TL. Nous pouvons alors maintenant déterminer le diamètre solaire…

Modélisons le schéma de l'éclipse de Soleil, et appelons L le centre de la Lune, et S le centre du soleil :



Que peut-on dire des angles $\widehat{TLA}$ et $\widehat{TSB}$?
En déduire la position relative des droites (AL) et (BS) :

- (TL) $\perp$ (AL) et …
- Si …
- Ainsi …

Les triangles TAL et TBL étant rectangles, on a :

$$\cos(\widehat{ATL}) = \frac{\dots}{\dots} = \quad \text{et} \quad \cos(\widehat{BTS}) = \frac{\dots}{\dots} =$$

Et puisque $\widehat{ATL}$ = $\widehat{BTS}$, on a l'égalité :

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

En appliquant l'égalité des produits en croix, on obtient TB = $\frac{\dots \times \dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} \times \dots$ (1)

On a également :

$$\cos(\widehat{TAL}) = \frac{\dots}{\dots} = \quad \text{et} \quad \cos(\widehat{TBS}) = \frac{\dots}{\dots} =$$

Et puisque les angles $\widehat{TBS}$ et $\widehat{TAL}$ sont _ _ _ _ _ _ _ _ _ et que (AL) et (BS) sont _ _ _ _ _ _ _ _ , alors ces angles sont _ _ _ _ _ _ _ _ _ . On a donc l'égalité :

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

En appliquant l'égalité des produits en croix, on obtient TB = $\frac{\dots \times \dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} \times \dots$ (2)

Ainsi, en regroupant (1) et (2), on a : $\frac{\dots}{\dots} \times \dots = \frac{\dots}{\dots} \times \dots$

Soit : $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} \approx \dots$

Alors BS $\approx \dots \times$ AL, et puisque BS et AL représentent respectivement la moitié du diamètre solaire et lunaire, on peut en conclure que le diamètre du Soleil est … fois plus grand que le diamètre lunaire.
Puisque $D_L \approx$ …… km alors $D_S \approx$ ……………….km

« *Le diamètre du Soleil vaut environ* _ _ _ _ _ _ _ *km* »

Récapitulatif des distances		
	Distance réelle en km	**Distance à l'échelle si D_L = 1 cm**
Diamètre de la Terre	12 740	3,7 cm
Diamètre de la Lune	3 480	1 cm
Diamètre du Soleil	1 400 000	402 cm (soit 4m)
Distance Terre-Lune	384 400	100 cm (soit 1 m)
Distance Terre- Soleil	150 000 000	43 103 cm (soit 431 m)