Une autre application de « la partie entière d'un réel »

La suite (u_n) définie par : $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$, où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x, est équirépartie sur $[0; 1]$.

Une suite (u_n) est équirépartie sur $[0; 1]$ si pour tout $[a; b] \subset [0; 1]$ la suite $(\frac{v_n}{n})$, où v_n désigne le nombre des $u_p \in [a; b]$ pour $p \leq n$, converge vers $b - a$.

- En général, l'équirépartition d'une suite s'obtient à partir de critères qui ne sont pas élémentaires, c'est le cas des suites $n\times\theta - E(n\times\theta)$, où θ est irrationnel, dont l'équirépartition est une conséquence du critère de Weyl. L'originalité de la suite (u_n) définie plus haut est que son caractère équiréparti s'établit par des moyens élémentaires, sans être simple la démonstration est accessible à un élève de terminale S.
- Une application de l'équirépartition se trouve dans les générateurs de nombres aléatoires qui engendrent des suites qui doivent, au moins, être équiréparties (au sens statistique du terme dans ce cas). On peut se poser la question : la suite (u_n) est elle un bon candidat pour être une suite de nombres aléatoires ? Il y a des éléments de réponses dans les deux documents suivants : racine(n)-partie entière racine(n)
Générateurs de nombres aléatoires

L'objet de cet article est la démonstration de l'équirépartition de la suite (u_n) définie par :
$u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$

---

1) Propriété 1 :
Si x et y désignent deux réels tels que $x \leq y$ et si q désigne le nombre d'entiers de l'intervalle $[x; y]$, on a : $y - x - 1 < q \leq y - x + 1$

Preuve

On a : $[x; y] \subset \displaystyle\bigcup_{k=0}^{k=E(y-x)} [x + k; x + k + 1[\; = B$

Dans chacun des intervalles $[x + k; x + k + 1[$ il y a un entier et un seul. Seul, éventuellement, le dernier entier de B n'est pas dans $[x; y]$, d'où :
$y - x - 1 < E(y - x) \leq q \leq E(y - x) + 1 \leq y - x + 1$

2) $[a; b]$ est fixé dans $[0; 1]$. n est un entier positif fixé et $p \in \mathbb{N}$ vérifie : $1 \leq p \leq n$

$u_p = \sqrt{p} - E(\sqrt{p})$. En posant $k = E(\sqrt{p})$ on a : $k \leq \sqrt{p} \leq k+1 \Leftrightarrow k^2 \leq p < (k + 1)^2$ (1)

$a \leq u_p \leq b \Leftrightarrow a \leq \sqrt{p} - k \leq b \Leftrightarrow (a + k)^2 \leq p \leq (b + k)^2$ (2)

En remarquant que $u_p < 1$ pour tout p, les inégalités (2) deviennent, pour $b = 1$:

$(a + k)^2 \leq p < (1 + k)^2$

De ce fait on a: (2) $\Rightarrow$ (1) et $k = E(\sqrt{p})$.

En prenant le dernier k tel que : $k^2 \leq n < (k+1)^2 \Leftrightarrow k \leq \sqrt{n} < k+1 \Leftrightarrow k = E(\sqrt{n})$, le nombre f(n) des u_p , $p \leq n$, qui vérifient $u_p \in [a; b]$ est donc majoré par le nombre g(n) des p qui vérifient (2) pour k variant de 1 à $E(\sqrt{n})$.

D'après la propriété 1) on a :

$$g(n) \leq \sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} [(b+k)^2-(a+k)^2+1] = [\sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} (b-a)(b+a+2k)] + E(\sqrt{\mathbf{n}}) = (b-a)[(b+a) \times E(\sqrt{n}) + 2 \times \sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} k] + E(\sqrt{n})$$

$$= (b-a)(b+a) \times E(\sqrt{n}) + [E(\sqrt{n}) \times (E(\sqrt{n})+1)](b-a) + E(\sqrt{n})$$

De $\sqrt{n} - 1 \leq E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$ on tire alors : $\lim \dfrac{\sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} [(b+k)^2-(a+k)^2+1]}{n} = b - a$

Si maintenant, dans (2), on fait varier k de 1 à $E(\sqrt{n-1}) - 1$, f(n) est minoré par le nombre h(n) des p qui vérifient (2) et, d'après la propriété (1) on a : $\sum_{k=1}^{E(\sqrt{n-1})-1} [(b+k)^2-(a+k)^2-1] \leq h(n) \leq f(n)$

En raisonnant comme plus haut on à encore : $\lim \dfrac{\sum_{k=1}^{E(\sqrt{n-1})-1} [(b+k)^2-(a+k)^2-1]}{n} = b - a$

On déduit de ces deux résultats : $\lim \dfrac{f(n)}{n} = b - a$ <u>Ce qu'il fallait démontrer</u>.