Annexe 6 Problème de l'« irrationalité de $\sqrt{4}$ »

Rappel : Un nombre irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel, il ne peut pas être égal à une fraction (quotient de deux entiers).

1. Relisez en vérifiant, dans le tableau ci-dessous (première colonne) la démonstration par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel, étudiée en début d'année.

Preuve que $\sqrt{2}$ est irrationnel	Preuve que $\sqrt{3}$ est irrationnel
Supposons que $\sqrt{2}$ soit égal à une fraction **irréductible** $\frac{p}{q}$ où p et q sont des nombres entiers naturels.	Supposons que $\sqrt{3}$ soit égal à une fraction **irréductible** $\frac{p}{q}$ où p et q sont des nombres entiers naturels. $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$
En élevant au carré, on a : $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$ et $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ donc $\frac{p^2}{q^2} = 2$ d'où $p^2 = 2q^2$.	En élevant au carré, on a : $\left(\sqrt{3}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$ et $\left(\sqrt{3}\right)^2 =$ **…………..** donc **………………….** d'où $p^2 = 3q^2$.
Donc $p^2 = 2$ fois un nombre entier. Par conséquent, p^2 est un multiple de 2 et p est donc aussi un multiple de 2. D'où on peut écrire $p = 2 \times n$ avec n un nombre entier.	Donc $p^2 =$ **……….** fois un nombre entier. Par conséquent, p^2 est un multiple de 3 et p est donc aussi un multiple de **….** D'où on peut écrire $p = 3 \times n$ avec n un nombre entier.
En élevant au carré, on a $p^2 = 4 \times n^2 = 2 \times q^2$. En divisant par 2, on trouve $q^2 = 2 \times n^2$.	En élevant au carré, on a $p^2 = 9 \times n^2 = 3 \times q^2$. En divisant par 3, on trouve $q^2 =$ **……………………**
Donc, $q^2 = 2$ fois un nombre entier. Par conséquent, q^2 est un multiple de 2 et q est donc aussi un multiple de 2.	Donc, $q^2 = 3$ fois un nombre entier. Par conséquent, q^2 est un multiple de **………** et q est donc aussi un multiple de 3.
On a donc montré que p et q sont des multiples de 2.	On a donc montré que p et q sont des multiples de **……..**
Or notre hypothèse de départ est : $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible, donc p et q ne peuvent pas être tous les deux multiples de 2 (sinon on pourrait simplifier la fraction par 2).	Or notre hypothèse de départ est : $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible, donc p et q ne peuvent pas être tous les deux multiples de 3 (sinon on pourrait simplifier la fraction par **….**).
On aboutit à une contradiction : en supposant que $\sqrt{2}$ est égal à une fraction irréductible, on déduit ensuite que la fraction peut être simplifiée. C'est donc que notre hypothèse de départ est fausse.	On aboutit à une contradiction : en supposant que $\sqrt{3}$ est égal à une fraction irréductible, on déduit ensuite que la fraction peut être simplifiée. C'est donc que notre hypothèse de départ est fausse.
$\sqrt{2}$ ne peut donc pas être égal à une fraction : c'est un irrationnel	$\sqrt{3}$ ne peut donc pas être égal à une fraction : c'est un irrationnel

2. Compléter la preuve que $\sqrt{3}$ est irrationnel en suivant l'exemple de preuve de la 1re colonne.

3. Dans le tableau ci-dessous, compléter la preuve que $\sqrt{4}$ est irrationnel toujours en suivant l'exemple donné. Que pensez-vous du résultat que vous venez démontrer ? Quels commentaires souhaitez-vous faire sur cette démonstration et sa conclusion ?

Preuve que $\sqrt{4}$ est irrationnel
Supposons que $\sqrt{4}$ soit égal à une fraction **irréductible** $\frac{p}{q}$ où p et q sont des nombres entiers naturels. $\sqrt{4} = \frac{p}{q}$
D'où $p^2 = 4q^2$
On aboutit à une contradiction : en supposant que $\sqrt{4}$ est égal à une fraction irréductible, on déduit ensuite que la fraction peut être simplifiée. C'est donc que notre hypothèse de départ est fausse.
$\sqrt{4}$ ne peut donc pas être égal à une fraction : c'est un irrationnel.

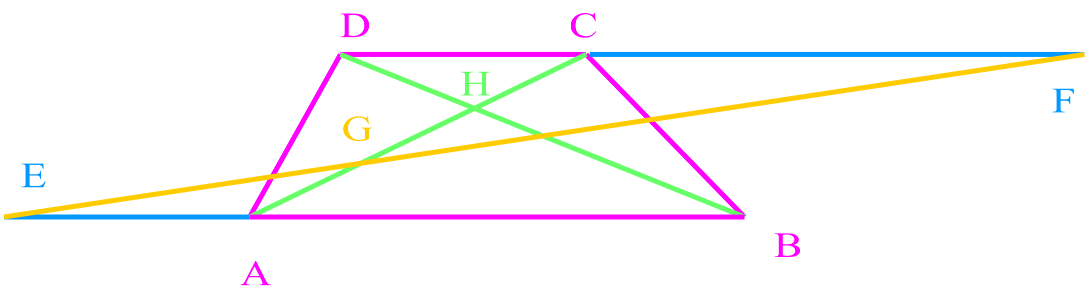
4. Combien vaut $\sqrt{4}$? Ce nombre est-il rationnel (peut-il s'écrire simplement sous la forme d'une fraction) ?
5. Confrontez vos réponses données aux questions 3. et 4. Que pensez-vous de votre démonstration ? Quelles réactions suscite ce problème en vous ? Où pensez-vous que se trouvent les erreurs (expliquez) ?

Annexe 7 Le problème du trapèze

La somme des longueurs des côtés parallèles d'un trapèze est nulle !

On considère un trapèze $ABCD$, de côtés parallèles $[AB]$ et $[CD]$. On désigne par p la longueur AB, et par q la longueur CD. On prolonge $[DC]$ d'une longueur p, jusqu'à F, et $[BA]$ d'une longueur q jusqu'à E (voir la figure ci-dessous ; $CF = p$; $EA = q$). On trace les segments $[EF]$, $[DB]$ et $[AC]$. H est le point d'intersection de $[DB]$ et $[AC]$. G le point d'intersection de $[AC]$ et $[EF]$.

On pose $r = AG$, $s = GH$, $t = HC$.



	Vrai	Faux
On applique le théorème de Thalès aux deux triangles HDC et HAB, qui ont $[DB]$ et $[AC]$ comme côtés communs : $\dfrac{DC}{AB} = \dfrac{HC}{HA}$. En remplaçant par les noms des longueurs : $\dfrac{q}{p} = \dfrac{t}{r+s}$. D'où $\boxed{q \times (r+s) = t \times p}$.		
De même, en appliquant le théorème de Thalès dans les triangles EAG et FGC : $\dfrac{AE}{CF} = \dfrac{AG}{GC}$ ce qui s'écrit encore : $\dfrac{q}{p} = \dfrac{r}{s+t}$. D'où $\boxed{q \times (s+t) = r \times p}$.		
Calculons alors $q\left(r+s-(s+t)\right)$. En développant, on a : $q\left(r+s-(s+t)\right) = q(r+s) - q(s+t)$. En utilisant les deux égalités encadrées au-dessus et en les remplaçant dans notre expression, on obtient : $q\left(r+s-(s+t)\right) = tp - rp = p(t-r)$ Il en résulte donc que : $\dfrac{q}{p} = \dfrac{t-r}{r+s-(s+t)}$.		
Maintenant, en réduisant le dénominateur de l'expression précédente, on conclut que : $\dfrac{q}{p} = \dfrac{t-r}{r-t} = (-1) \times \dfrac{r-t}{r-t} = -1$		
$\dfrac{q}{p} = -1$ donc $p = -q$. Par conséquent $\boxed{p+q=0}$. Ainsi, nous venons de prouver que dans un trapèze, la somme des longueurs des côtés parallèles est nulle !		

1. Que pensez-vous du résultat démontré : « dans un trapèze, la somme des longueurs des côtés parallèles est nulle » ?
2. Cochez vrai ou faux à chaque étape de la démonstration. Si vous n'êtes pas d'accord avec un résultat énoncé, expliquez pourquoi vous pensez qu'il est faux, corrigez-le et poursuivez le reste de la démonstration avec votre argument.
3. Si vous êtes d'accord avec chaque étape de la démonstration, à votre avis, où se cache le problème dans cette démonstration ?
4. Que vous apporte de chercher ce genre d'exercices ? Que vous apprend-il en mathématiques ? Que vous apprend-il sur vous ? Vous fait-il progresser ou régresser et de quelle manière ?

Annexe 8 Problèmes liés à la calculatrice

Les chiffres de la calculatrice

A. ➡ Les chiffres qu'elle affiche

1. Faites afficher l'écriture décimale de $\sqrt{2}$ sur votre calculatrice.

2. Quel est le nombre décimal d qu'a affiché la calculatrice ? Si on calculait à la main d^2, quel serait son dernier chiffre ? La calculatrice a-t-elle affiché la valeur exacte de $\sqrt{2}$?

B. ➡ Les chiffres avec lesquels elle calcule

1. Paul a obtenu l'écran suivant sur sa calculatrice :

```
√2
          1.414213562
■
```

a. Combien de chiffres a affiché sa calculatrice ?

b. S'il calcule $\sqrt{2} - 1{,}414213562$, que doit-il obtenir d'après vous ?

c. Quand il tape $\sqrt{2} - 1{,}414213562$, sa calculatrice affiche 3,7309E-10.
Donner l'écriture décimale de ce résultat.
Quelle valeur de $\sqrt{2}$ sa calculatrice a-t-elle donc bien pu prendre pour arriver à ce résultat ?

d. Avec combien de chiffres sa calculatrice calcule-t-elle ?

2. Reproduire une expérience similaire sur votre calculatrice pour déterminer avec combien de chiffres elle calcule.

Point info

Les mathématiciens travaillent avec des nombres dont l'écriture décimale peut comporter une infinité de chiffres. Une calculatrice ne travaille qu'avec « quelques » nombres décimaux : ceux qui n'ont pas trop de chiffres avant et après la virgule !

Les limites de la calculatrice

A. ➡ Les limites de calcul

1. Calculez à la main : $2500000 + 0{,}0000002$.
Effectuez le calcul à la calculatrice. Obtenez-vous le même résultat ? Pourquoi ?

2. À quelle condition une fraction $\frac{a}{b}$ vaut-elle 1 ? Calculez à la calculatrice $\frac{2 \times 10^{20}}{1 + 2 \times 10^{20}}$.
La calculatrice donne-t-elle la valeur exacte de ce quotient ?

3. Inventez à votre tour un exemple pour « piéger » la calculatrice.

B. ➡ Les limites de l'interprétation

1. Comparez $a = \frac{9530883}{6739352}$ et $b = \frac{23009587}{16270235}$ avec votre calculatrice.

2. Quel est le chiffre des unités de $9\,530\,883 \times 16\,270\,235$?
de $23\,009\,587 \times 6\,739\,352$?

3. A-t-on $a = b$? Quelle leçon pouvez-vous tirer de cet exemple ?

Extrait du manuel *Math 2^e^*, Belin, 2000

Exercice 3. La machine cache des chiffres

1. La machine peut-elle calculer la valeur exacte de $\frac{43}{7}$?

2. a. Écrire la valeur approchée complète a affichée pour $\frac{43}{7}$.

   b. Compter le nombre total de chiffres, s, qu'affiche votre machine pour écrire a. Ce nombre s est appelé le nombre de chiffres significatifs que fournit la machine pour a (registre d'affichage).

3. a. Effectuer à la machine le calcul $\frac{43}{7}-a$. Que constate-t-on ?

   b. En déduire, avec le maximum de précision, une valeur approchée de $\frac{43}{7}$.

   c. Avec combien de chiffres significatifs de $\frac{43}{7}$ votre machine calcule-t-elle ? (Dans son registre de calcul, la calculatrice utilise plus de chiffres que dans le registre d'affichage ; ces chiffres supplémentaires sont appelés chiffres de garde).

Exercice 4. La machine ment

1. Compléter : $\frac{1}{3} \approx$

2. Compléter le tableau suivant en effectuant les calculs avec et sans machine, sachant que :

$$a_1 = \frac{1}{3} \ ; \ a_2 = 1000a_1 - 333 \ ; \ a_3 = 1000a_2 - 333 \ ; \ a_4 = 1000a_3 - 333 \ ; \text{ etc.}$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Avec machine						
Sans machine	$\frac{1}{3}$					

Pourquoi une telle défaillance ?

Exercice 5. La machine délire

Mettre en mémoire les entiers naturels $x = 1\,960$ et $y = 4\,801$.
On veut calculer le nombre $A = 36x^4 - y^4 + 2y^2$ de trois façons différentes.

1. Calculer A à l'aide de la machine.

2. On veut réaliser un calcul approché de A en remarquant que $\frac{y}{x}$ est proche de $\sqrt{6}$.

   a. Comparer les valeurs affichées par la machine pour $\sqrt{6}$ et pour $\frac{y}{x}$.

   b. Comparer $36x^4$ et y^4 en remplaçant y par $x\sqrt{6}$. Que devient alors A ?

   c. Calculer A en utilisant l'expression obtenue à la question précédente et comparer les résultats avec ceux obtenus à la question 1.

3. Factoriser $36x^4 - y^4$.

   Calculer, à l'aide de la machine, $6x^2 - y^2$.

   Calculer A en simplifiant son expression.

4. Quelle est la valeur exacte de A ?

Extrait de « Espace modules seconde », CRDP d'Aquitaine