Géométrie dans l'espace

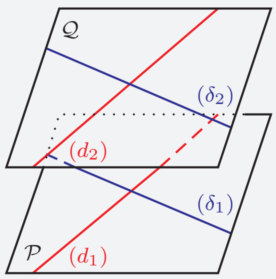
Terminale S

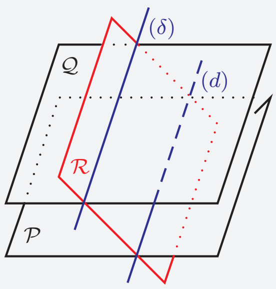
N.Daval

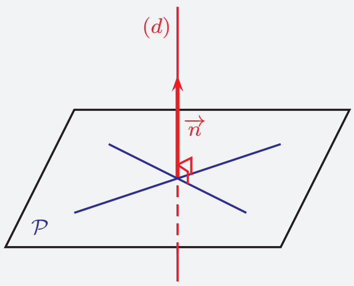
Règles d'incidence

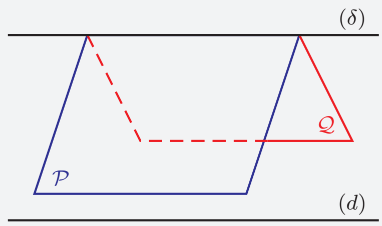
- ✧ Si une droite (d) est parallèle à une droite (δ) d'un plan $\mathcal{P}$, alors la droite (d) est parallèle au plan $\mathcal{P}$
- ✧ Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles
- ✧ Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles
- ✧ Si deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$ sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{Q}$, alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles
- ✧ Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles
- ✧ Une droite (d) est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}$. Elle est alors orthogonale à toutes les droites de ce plan. Un vecteur $\vec{n}$ qui dirige (d) est un vecteur normal à $\mathcal{P}$
- ✧ Théorème du toit : si une droite (d) est parallèle à deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, alors (d) est parallèle à la droite (δ) d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{Q}$

Illustrations des quatre dernières règles









Vecteurs

- ✧ Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- ✧ $\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$; $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- ✧ $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- ✧ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff \vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$
- ✧ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires $\iff \vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

Coplanarité

Des points ou des droites ou des vecteurs sont coplanaires s'ils sont inclus dans le même plan

Produit scalaire

Écritures :

- ✧ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$
- ✧ $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- ✧ $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- ✧ $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ où H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA)

Propriétés :

- ✧ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\iff \vec{u}.\vec{v} = 0$
- ✧ Deux droites (d) et (δ) de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonales $\iff \vec{n}.\vec{n'} = 0$
- ✧ Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont parallèles ou confondus $\iff \vec{n} = k\vec{n'}$

Équations de droites et de plans

Écriture vectorielle :

- ✧ $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$: droite passant par A de vecteur direct. $\vec{u}$
- ✧ $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$: plan passant par A de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires
- ✧ $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$: plan passant par A de vecteurs normal $\vec{n}$

Représentations paramétriques :

- ✧ Droite (d) passant A et de vecteur directeur $\vec{u}$:

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \text{ avec } \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

- ✧ Plan $\mathcal{P}$ passant par A dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases} \text{ avec } \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} t, t' \in \mathbb{R}$$

Equation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}$:

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ où } \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$