Exemple de corrigé du CAPES de mathématiques

épreuve 1, session 2015

Nathalie DAVAL
ESPE-IREM Réunion

Problème 1

Partie A

I. 1. Tout nombre complexe z s'écrit sous la forme algébrique $z = a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$ est la partie réelle de z et $b \in \mathbb{R}$ sa partie imaginaire.
Or, on pour tous réels a et b : $a^2 \leqslant a^2 + b^2$, avec égalité lorsque b est nul, soit $|a| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$.
De plus, $a \leqslant |a|$ donc, $a \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$.

$\boxed{\textit{Pour tout nombre complexe } z,\ \mathrm{Re}(z) \leqslant |z|}$

Le cas d'égalité est obtenu si, et seulement si, $\left\{\begin{array}{l} a^2 = a^2 + b^2 \\ a = |a| \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b = 0 \\ a \geqslant 0 \end{array}\right.$;

donc lorsque z est un nombre réel positif ou nul.

$\boxed{\textit{On a l'égalité } \mathrm{Re}(z) = |z| \textit{ si, et seulement si, } z \textit{ est un nombre réel positif ou nul.}}$

2. Calculons $|z_1 + z_2|^2$ pour tout couple de nombres complexes (z_1, z_2) :

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\
&\leqslant |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 && \text{d'après la question } \textbf{A.I.1.} \\
&\leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
|z_1 + z_2|^2 &\leqslant (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}$$

Les quantités étant positives, on obtient $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

$\boxed{\textit{Pour tout couple } (z_1, z_2) \textit{ de nombres complexes, } |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.}$

3. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
On a égalité dans l'expression précédente si, et seulement si, $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}|$, ce qui signifie que $z_1\overline{z_2}$ est un nombre réel positif d'après la question **A.I.1.**
z_1 et z_2 étant non nuls, on en déduit que $z_1\overline{z_2}$ est un nombre réel strictement positif :

$$\begin{aligned}
&\exists\, k \in \mathbb{R}_+^* \;;\; z_1\overline{z_2} = k \\
&\iff \quad \overline{z_2} = \frac{k}{z_1} && z_1 \neq 0 \\
&\iff \quad \overline{z_2} = \frac{k\,\overline{z_1}}{z_1\overline{z_1}} \\
&\iff \quad z_2 = \frac{k}{|z_1|^2}\, z_1
\end{aligned}$$

En choisissant $\lambda = \dfrac{k}{|z_1|^2}$, qui est bien un réel strictement positif, on a $z_2 = \lambda z_1$.

On dit que z_1 et z_2 sont positivement liés.

Inversement, si $z_2 = \lambda z_1$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ alors
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |z_1 + \lambda z_1| \\ &= (1+\lambda)|z_1| \quad \text{car } 1+\lambda > 0 \\ &= |z_1| + |\lambda z_1| \\ |z_1 + z_2| &= |z_1| + |z_2| \end{aligned}$$

$\boxed{|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \textit{ si, et seulement si, il existe un réel strictement positif } \lambda \textit{ tel que } z_2 = \lambda z_1.}$

On a alors $\dfrac{z_1}{z_2} = \lambda$, donc $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(\lambda)$
$$\iff \arg(z_1) - \arg(z_2) = 0\,[2\pi]$$
$$\iff \arg(z_1) = \arg(z_2)\,[2\pi]$$

$\boxed{\textit{Lorsqu'on a l'égalité, } z_1 \textit{ et } z_2 \textit{ ont le même argument, modulo } 2\pi.}$

Remarque : il existe également une deuxième inégalité triangulaire :

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$$

Idée de la démonstration : $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|$, *soit* $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$.
On fait la même chose avec $|z_2|$ *puis on conclut !*

II. 1. Montrons par récurrence que l'on a :

$$\forall\, n \geqslant 2\,; \forall\,(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n\,,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| \quad (\mathcal{H}_n)$$

- **Initialisation :** pour $n = 2$, on a $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ d'après la question **A.I.2.**
  Donc, $(\mathcal{H}_2)$ est vraie.

- **Hérédité :** supposons l'hypothèse vraie au rang n.
  On choisit le $(n+1)$-uplet $(z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1})$ de nombres complexes. On a :
  $$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1}\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| && \text{d'après la question } \textbf{A.I.2}. \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| \end{aligned}$$
  L'hypothèse reste donc encore vraie au rang $n+1$.

On en conclut donc que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

$$\boxed{\forall\,(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n\,,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|}$$

2. Soit $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes tous non nuls.
Supposons que $\forall\, k \in [\![1, n]\!], \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+,\ z_k = \lambda_k z_1$.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k z_1)\right| \\
&= \left|\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) z_1\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right| |z_1| \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) |z_1| && \text{car les } \lambda_k \text{ sont tous positifs, leur somme également} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k |z_1|) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k z_1| && \text{car les } \lambda_k \text{ sont positifs} \\
\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| &= \sum_{k=1}^{n} |z_k|
\end{aligned}$$

Inversement, supposons que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ et montrons par récurrence que l'on a :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, z_k = \lambda_k z_1 \quad (\mathcal{H}'_n)$$

- **Initialisation :** pour $n = 2$, on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire démontré en **A.I.3.** Donc, $(\mathcal{H}'_2)$ est vraie.

- **Hérédité :** supposons l'hypothèse vraie au rang n.
On choisit le $(n+1)$-uplet $(z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1})$ de nombres complexes non nuls tels que $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| \quad (\star)$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1}\right| && (1) \\
&\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| && \text{d'après la question } \textbf{A.I.2.} \quad (2) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| && \text{par hypothèse} \quad (3) \\
\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| &= \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| && \text{d'après } (\star) \quad (4)
\end{aligned}$$

On en déduit alors que toutes les expressions sont égales.

  - en particulier les lignes (2) et (3) :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + \cancel{|z_{n+1}|} = \sum_{k=1}^{n} |z_k| + \cancel{|z_{n+1}|}$$

D'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre n, $\forall\, k \in [\![1, n]\!], \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, z_k = \lambda_k z_1$.

- et les lignes (1) et (2) :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}|$$

D'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre 2, $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^{n} z_k$.

Donc, $z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_1 = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda\lambda_k\right) z_1$.

En posant $\lambda_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda\lambda_k$ qui est positif comme somme de termes positifs, on a

$$\forall\, k \in [\![1, n+1]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, z_k = \lambda_k z_1$$

L'hypothèse reste donc encore vraie au rang $n+1$.

On en conclut donc que $\mathcal{H}'_n$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

> *Si $z_1, \ldots, z_n$ sont des nombres complexes tous non nuls,*
> $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff \forall\, k \in [\![1, n]\!], \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+,\ z_k = \lambda_k z_1.$

On a alors $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$,
$$\begin{aligned}\arg(z_k) &= \arg(\lambda_k) + \arg(z_1)\\ &= \arg(z_1)[2\pi].\end{aligned}$$

> *Les points d'affixe z_k ont le même argument modulo 2π.*
> *Ils sont situés sur une même droite.*

Partie B

I. Soit $n \geqslant 3, \forall\, k \in [\![1, n]\!]$, on pose $z_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}$. Le $n-$uplet $(z_1, \ldots, z_n)$ des racines $n-$ièmes de l'unité vérifie clairement les conditions (i), (ii) et (iii). Montrons qu'il vérifie également (iv) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}}{1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}\right)^k\\ &= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n} \times \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}} \qquad \text{avec } \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}\right)^n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1\\ \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} &= 0\end{aligned}$$

> *Le $n-$uplet $(z_1, \ldots, z_n)$ tel que $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $z_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}$ vérifie la dernière égalité.*

II. 1. Pour tout nombre entier k de l'intervalle $[\![1,n]\!]$ et tout point $M(z)$ du plan, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}(z-z_k) &= \sum_{k=1}^{n} \overline{\left(\frac{z_k}{|z_k|}\right)}(z-z_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|}z - \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|}z_k \\
&= z\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}z_k}{|z_k|} \\
&= z \times 0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|^2}{|z_k|} && \text{d'après (iv)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}(z-z_k) = -\sum_{k=1}^{n} |z_k|}$$

2. u_k est un nombre complexe de norme 1, on a donc $|u_k| = |\overline{u_k}| = 1$, d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |z-z_k| &= \sum_{k=1}^{n} |\overline{u_k}||z-z_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\overline{u_k}(z-z_k)| \\
&\geqslant \left|\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}(z-z_k)\right| && \text{d'après } \mathbf{A.2.1.} \\
&\geqslant \left|-\sum_{k=1}^{n} |z_k|\right| && \text{d'après } \mathbf{B.2.1.}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} |z-z_k| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|} \quad (\star)$$

3. L'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\overline{u_k}(z-z_k)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}(z-z_k)\right|$.
Supposons tout d'abord que M soit distinct de tous les A_k.
$\forall\, k \in [\![1,n]\!], \overline{u_k}(z-z_k)$ sont des nombres complexes tous non nuls puisque $u_k \neq 0$ et $z \neq z_k$.
D'après la question **A.II.2.**, on a donc égalité si, et seulement si,
$\forall\, k \in [\![1,n]\!], \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+,\ \overline{u_k}(z-z_k) = \lambda_k \overline{u_1}(z-z_1)$.

- **Supposons que** $\forall\, k \in [\![1,n]\!], \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+,\ \overline{u_k}(z-z_k) = \lambda_k \overline{u_1}(z-z_1)$, alors

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n} \overline{u_k}(z-z_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{u_1}(z-z_1) \\
\iff \quad & -\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \overline{u_1}(z-z_1)\sum_{k=1}^{n} \lambda_k && \text{d'après } \mathbf{B.2.1.} \\
\iff \quad & \overline{u_1}(z-z_1) = \frac{-\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} && \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \lambda_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k = 1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k > 0
\end{aligned}$$

$\overline{u_1}(z-z_1)$ est donc un nombre réel négatif, et il en est de même pour $\overline{u_k}(z-z_k) = \lambda_k \overline{u_1}(z-z_1)$ puisque les λ_k sont positifs.

- **Inversement, supposons que** $\forall\, k \in [\![1,n]\!]$, $\overline{u_k}(z-z_k)$ est un réel négatif.
  On a alors $\forall\, k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{\overline{u_k}(z-z_k)}{\overline{u_1}(z-z_1)} = \lambda_k \in \mathbb{R}_+$, soit $\overline{u_k}(z-z_k) = \lambda_k \overline{u_1}(z-z_1)$.

Le cas où M est confondu avec l'un des A_k, par exemple $z = z_i$ avec $i \in [\![1,n]\!]$ se démontre de manière analogue :
l'égalité démontrée en **B.II.1.** reste vraie puisqu'elle est valable pour tout point M du plan.
On a donc égalité si, et seulement si, $\forall\, k \in [\![1,n]\!], k \neq i$, $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \overline{u_k}(z-z_k) = \lambda_k \overline{u_1}(z-z_1)$.
Le reste de la démonstration se fait de manière identique en réorganisant les sommations si nécessaire.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} |z-z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff \forall\, k \in [\![1,n]\!],\ \overline{u_k}(z-z_k) \in \mathbb{R}_-}$$

4. - **Si** $z = 0$, alors $\overline{u_k}(z-z_k) = \dfrac{\overline{z_k}}{|z_k|} \times (-z_k) = -|z_k| \in \mathbb{R}_-$.

   - **Si** $\overline{u_k}(z-z_k) \in \mathbb{R}_-$, alors $\dfrac{\overline{z_k}}{|z_k|}(z-z_k) = \dfrac{\overline{z_k}z}{|z_k|} - |z_k|$ est un nombre réel négatif donc : $\dfrac{\overline{z_k}z}{|z_k|} \leqslant |z_k| \Longrightarrow \overline{z_k}z \leqslant |z_k|^2 \leqslant 0$.

     Si z est non nul, procédons par disjonction des cas :
     - si $z \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\forall\, k \in [\![1,n]\!], z_k \in \mathbb{R}_-$;
     - si $z \in \mathbb{R}_-^*$, alors $\forall\, k \in [\![1,n]\!], z_k \in \mathbb{R}_+$;
     - si $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}_+^*$, alors $\forall\, k \in [\![1,n]\!], z_k \in \mathrm{i}\mathbb{R}_+$;
     - si $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}_-^*$, alors $\forall\, k \in [\![1,n]\!], z_k \in \mathrm{i}\mathbb{R}_-$;
     - si z n'est ni réel ni imaginaire pur, l'inégalité est impossible.

     Dans les quatre premiers cas, les points A_k sont sur une même demi-droite, ce qui contredit l'hypothèse (iii) de départ. On en déduit alors que z est nul.

On vient de démontrer que $\forall\, k \in [\![1,n]\!]$, $\overline{u_k}(z-z_k) \in \mathbb{R}_- \iff z = 0$, et en vertu de la question **B.II.3.**, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} |z-z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff z = 0}$$

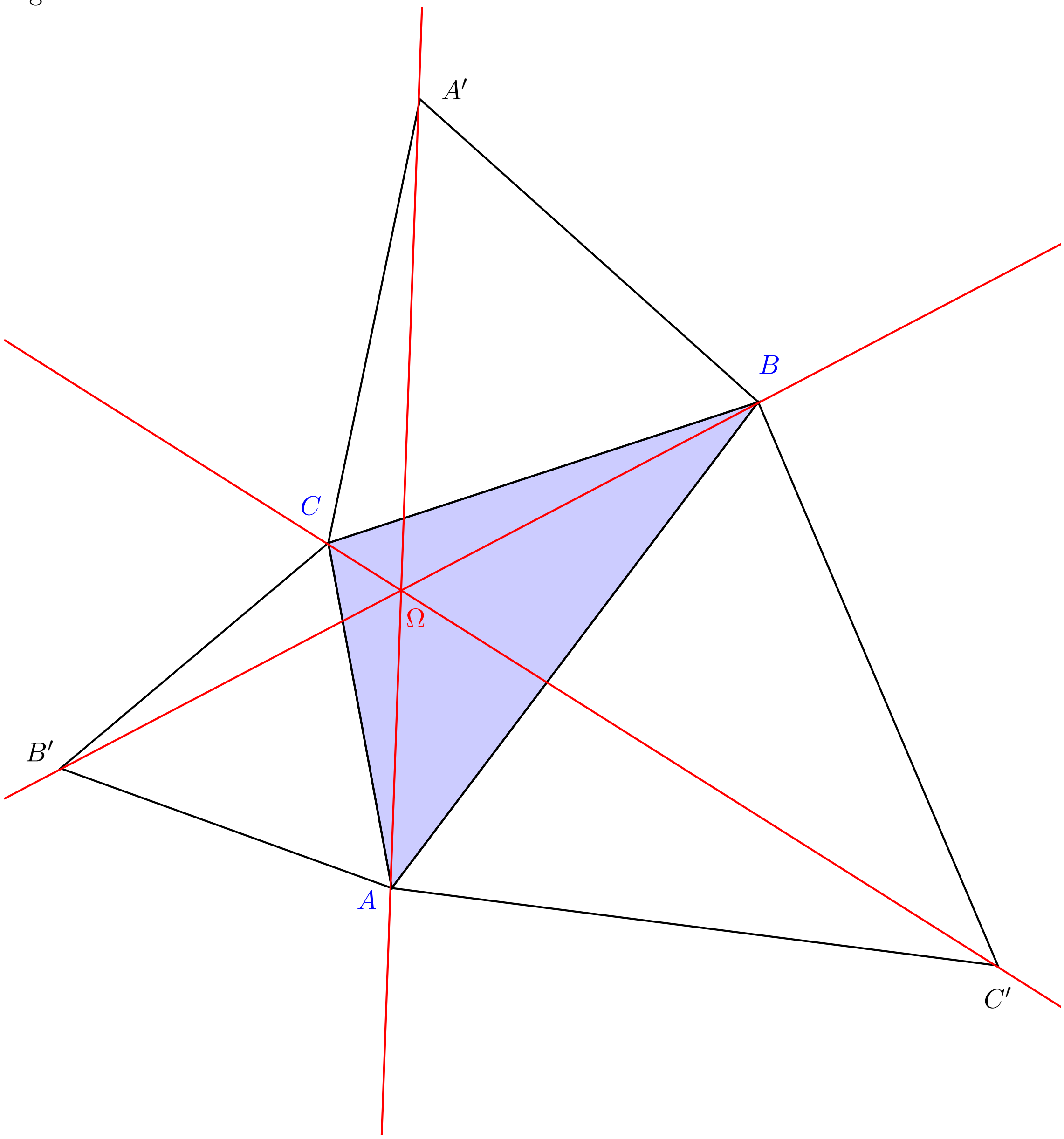
5. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} MA_k = \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|$
   $\displaystyle\geqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ avec égalité si, et seulement si, $z = 0$ d'après la question **B.II.4.**

   Donc, l'expression $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} MA_k$ atteint son minimum en un point unique d'affixe $z = 0$

$$\boxed{\textit{La somme } \sum_{k=1}^{n} MA_k \textit{ atteint son minimum en l'unique point } O\textit{, origine du repère.}}$$

Partie C

I. Figure.



II. La rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ transforme C en B' puisque ACB' est un triangle équilatéral direct par construction : en effet, on a construit le triangle ACB' à l'extérieur, les points B' et B sont de part et d'autre de (AC), donc le triangle ACB' est direct et $(AC, AB') = \dfrac{\pi}{3}$.

D'où, $b' - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c - a)$, soit : $b' = a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c - a)$.
Avec la même démarche, la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ transforme C' en B.
Donc, $b - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c' - a)$, soit : $b = a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c' - a)$.

$\boxed{b' = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a) \text{ et } b = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(c' - a)}$

III. On commence par calculer le rapport de $b'-b$ et de $c-c'$:

$$\begin{aligned}\frac{b'-b}{c-c'} &= \frac{\cancel{a}+\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-a)-\cancel{a}-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c'-a)}{c-c'}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-\cancel{a}-c'+\cancel{a})}{c-c'}\\ &= \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

On a donc $\left|\dfrac{b'-b}{c-c'}\right| = \left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = 1$

et $\quad \arg\left(\dfrac{b'-b}{c-c'}\right) = \arg\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

$\boxed{\textit{Le module et un argument de } \dfrac{b'-b}{c-c'} \textit{ sont respectivement } 1 \textit{ et } \dfrac{\pi}{3}.}$

IV. Remarquons tout d'abord que le résultat fourni dans la question précédente nous donne $\arg\left(\dfrac{b'-b}{c-c'}\right) = (\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{BB'}) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On a alors, modulo 2π :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) &= (\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}) && \text{puisque } \Omega \in [B'B] \text{ et } \Omega \in [C'C]\\ &= -(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{B'B})\\ &= -(\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{BB'}) + \pi\\ &= -\frac{\pi}{3} + \pi\\ (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

De même, en utilisant la rotation de centre B transformant A' en C et A en C', on a : $c = b + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a'-b)$ et $c' = b + \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-b)$ soit $c - c' = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a'-a)$.
On a alors, modulo 2π :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}) &= (\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{A'A})\\ &= \arg\left(\frac{a-a'}{c-c'}\right)\\ &= \arg\left(\frac{a-a'}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a'-a)}\right)\\ &= \arg\left(-\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\\ &= \arg\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)\\ (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}) &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

Enfin, $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) + (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) + (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}) = 2\pi$,
soit $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2\pi - \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

$\boxed{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) = (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}) = \dfrac{2\pi}{3}}$

V. Posons $\overrightarrow{u_A} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A}$, $\overrightarrow{u_B} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B}$ et $\overrightarrow{u_C} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C}$.

$$\begin{cases} |\overrightarrow{u_A}| = |\overrightarrow{u_B}| = |\overrightarrow{u_C}| = 1 \\ (\overrightarrow{u_A}, \overrightarrow{u_B}) = (\overrightarrow{u_B}, \overrightarrow{u_C}) = (\overrightarrow{u_C}, \overrightarrow{u_A}) = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_B} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \overrightarrow{u_A} = \mathrm{j}\, \overrightarrow{u_A} \\ \overrightarrow{u_C} = \mathrm{j}\, \overrightarrow{u_B} = \mathrm{j}^2\, \overrightarrow{u_A} \end{cases} \text{, d'où :}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_A} + \overrightarrow{u_B} + \overrightarrow{u_C} &= \overrightarrow{u_A} + \mathrm{j}\, \overrightarrow{u_A} + \mathrm{j}^2\, \overrightarrow{u_A} \\ &= (1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2)\, \overrightarrow{u_A} \\ \overrightarrow{u_A} + \overrightarrow{u_B} + \overrightarrow{u_C} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

$$\boxed{\dfrac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A} + \dfrac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B} + \dfrac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C} = \overrightarrow{0}}$$

VI. On se place dans le plan complexe $\mathcal{P}$, dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $\Omega(\omega)$.
Dans ce repère, les points A, B, C ont pour affixes respectives $a - \omega, b - \omega, c - \omega$.

(i) Les points A, B, C sont distincts de Ω car le triangle ABC possède des angles de mesures inférieures strictement à $\dfrac{2\pi}{3}$.

(ii) A, B, C sont deux à deux distincts pour que le triangle existe.

(iii) Il n'existe aucune droite du plan $\mathcal{P}$ contenant les trois points puisque ceux-ci ne sont pas alignés.

(iv) $\dfrac{a-\omega}{|a-\omega|} + \dfrac{b-\omega}{|b-\omega|} + \dfrac{c-\omega}{|c-\omega|}$ est l'affixe de $\dfrac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A} + \dfrac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B} + \dfrac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C}$ qui vaut 0 d'après la question **C.V.**

D'après la partie **II.**

La somme $MA + MB + MC$ atteint son minimum en l'unique point Ω, origine du repère.

Problème 2

Partie A

I. 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et non majorée.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, ce qui se traduit par :

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ u_N > A$$

La suite étant également croissante, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant u_N > A)$$

et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et majorée.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré, il admet alors une borne supérieure notée M qui est le plus petit des majorants :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M \text{ et } \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N},\ M - \varepsilon < u_N \leqslant M$$

La suite est également croissante, on en déduit que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n > N \Longrightarrow u_n \geqslant u_N)$$

$$\Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n > \mathbb{N},\ M - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant u_n \leqslant M \leqslant M + \varepsilon$$
$$\text{soit } |u_n - M| \leqslant \varepsilon$$

et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = M$.

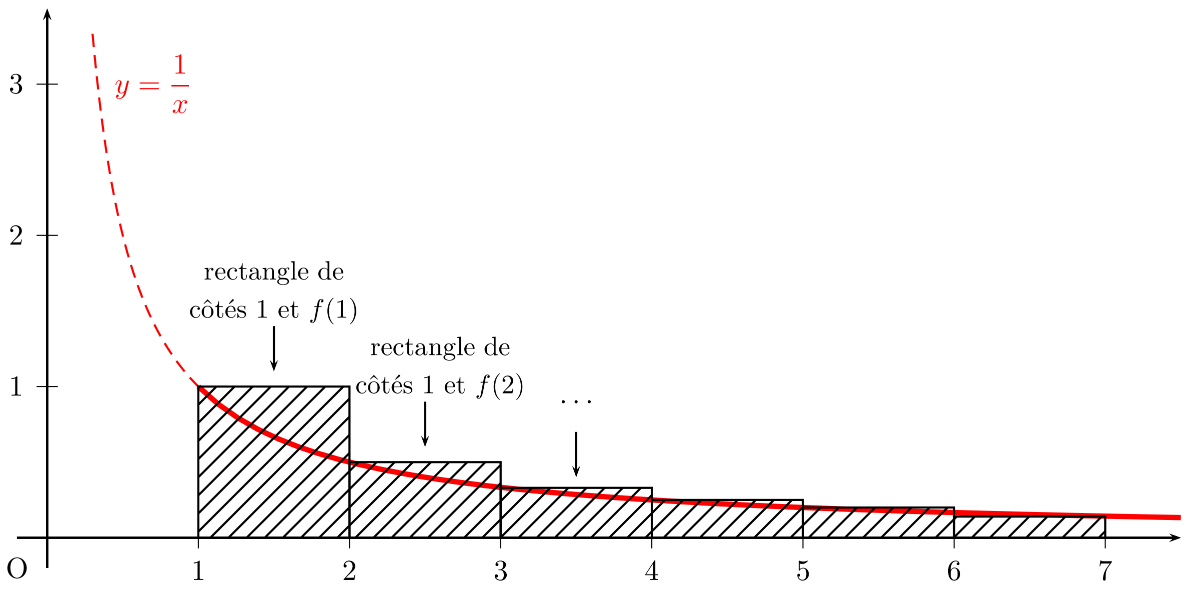
Toute suite croissante majorée converge.

3. Si on applique le résultat de la question **A.I.2** à la suite réelle $-(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $-(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, minorée, et elle converge. Donc, une condition suffisante pour qu'une suite décroissante converge est qu'elle soit minorée.

Inversement, si on applique le résultat de la question **A.I.1** à la suite réelle $-(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $-(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, non minorée, et elle diverge. Donc, une condition nécessaire pour qu'une fonction décroissante converge est qu'elle soit minorée.

Une suite décroissante converge si, et seulement si, elle est minorée.

II. 1. Figure



Graphiquement, a_n correspond à la somme des aires des rectangles de côtés 1 et $f(k)$ pour k variant de 1 à n. On obtient une majoration de l'intégrale de la fonction inverse sur l'intervalle $[1\,;n+1]$.

2. a. $\forall\, n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
a_{2n} - a_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\
&\geqslant \sum_{k=n+1}^{n+n} \frac{1}{2n} \qquad\qquad \text{car } n+1 \leqslant k \leqslant 2n \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n} \\
&\geqslant \cancel{n} \times \frac{1}{2\cancel{n}} \\
a_{2n} - a_n &\geqslant \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1,\ a_{2n} - a_n \geqslant \frac{1}{2}.}$$

b. Procédons par l'absurde et supposons que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ. La suite $(a_{2n})_{n\geqslant 1}$ est une suite extraite de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$, donc elle converge également, vers la même limite ℓ. La somme de deux suites convergentes étant convergente, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} (a_{2n} - a_n) &= \lim_{n\to+\infty} a_{2n} - \lim_{n\to+\infty} a_n \\
&= \ell - \ell = 0
\end{aligned}$$

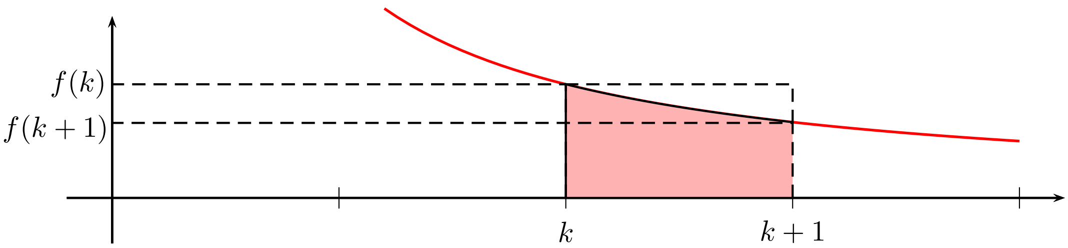
Mais d'autre part, d'après la question **A.II.2.a**, $\forall\, n \geqslant 1,\ a_{2n} - a_n \geqslant \frac{1}{2}$ ce qui contredit le résultat précédent, et donc notre hypothèse de départ est fausse.

$$\boxed{\textit{La suite } (a_n)_{n\geqslant 1} \textit{ n'est pas convergente.}}$$

3. a. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$. Donc, pour tout entier naturel k non nul :

$$\begin{aligned} k \leqslant t \leqslant k+1 &\iff \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k} \\ &\iff \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\mathrm{d}t \quad \text{les quantités sont positives} \\ &\iff \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Graphiquement, l'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, et les droites d'équations respectives $x = k$ et $x = k+1$ est encadrée par l'aire des deux rectangles de côtés 1 et respectivement $\dfrac{1}{k}$ et $\dfrac{1}{k+1}$.



$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{k}.}$$

b. Sommons ces inégalités pour des valeurs de k allant de 1 à $(n-1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} &\iff \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ &\implies \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 \leqslant [\ln t]_1^n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &\implies a_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant a_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant a_n.}$$

c. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et non majorée puisque

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n \geqslant \ln n \quad \text{(question } \mathbf{A.II.3.b}\text{)}$$

donc elle diverge vers $+\infty$ d'après la question **A.I.1**, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
Toujours d'après la question **A.II.3.b**, on a successivement, pour tout entier non nul n :

$$\begin{aligned} a_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant a_n &\iff \frac{a_n - 1}{a_n} \leqslant \frac{\ln n}{a_n} \leqslant \frac{a_n}{a_n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n \neq 0 \\ &\iff 1 - \frac{1}{a_n} \leqslant \frac{\ln n}{a_n} \leqslant 1 \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{a_n} = 1$. D'après le théorème d'encadrement pour les suites (parfois appelé « théorème des gendarmes »), $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{a_n} = 1$.

$$\boxed{\ln n \textit{ est un équivalent de } a_n \textit{ au voisinage de } +\infty.}$$

4. D'après la question **A.II.3.b.**, $\forall\, n \geqslant 1, a_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant a_n$, soit $-1 \leqslant \ln n - a_n \leqslant 0$.
On a donc $\forall\, n \geqslant 1$, $0 \leqslant b_n \leqslant 1$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, et :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= (a_{n+1} - a_n) - (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ b_{n+1} - b_n &\leqslant 0 && \text{d'après la question } \textbf{A.II.3.a.} \end{aligned}$$

$\forall\, n \geqslant 1$, $b_{n+1} \leqslant b_n$, la suite est donc décroissante.
En résumé, la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante minorée par 0, donc elle converge d'après **A.I.3.**

$\boxed{\textit{La suite } (b_n)_{n\geqslant 1} \textit{ converge.}}$

Partie B

I. 1. a. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 donc :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall\, n \geqslant n_0, |u_n| \leqslant \varepsilon \qquad (\star)$$

Or, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k$, et on a :

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k\right| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} \varepsilon && \text{d'après } (\star) \\ &\leqslant \frac{n-n_0}{n}\varepsilon \\ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k\right| &\leqslant \varepsilon && \text{car } n_0 > 0 \end{aligned}$$

Autrement dit, $-\varepsilon \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leqslant \varepsilon$,

et donc, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k - \varepsilon \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \dfrac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \varepsilon$.

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall\, n \geqslant n_0,\ \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon}$$

b. Posons $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k$. Ce nombre est une constante non nulle.

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{A}{n} = 0$ soit : $\forall\, \varepsilon_1 > 0, \exists\, n_1 \in \mathbb{N}^*, \forall\, n \geqslant n_1, -\varepsilon_1 \leqslant \dfrac{A}{n} \leqslant \varepsilon_1$, soit
$\forall\, (\varepsilon, \varepsilon_1) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $\exists\, (n_0, n_1) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $\forall\, n \geqslant \sup(n_0, n_1)$, $-(\varepsilon + \varepsilon_1) \leqslant v_n \leqslant \varepsilon + \varepsilon_1$,
ce qui traduit le fait que :

$\boxed{\textit{La suite } (v_n)_{n\geqslant 1} \textit{ converge vers } 0.}$

2. Dire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers le réel ℓ est équivalent à dire que la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout entier n non nul par $w_n = u_n - \ell$ converge vers 0.
D'après la question **B.I.1.**, si la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est de limite nulle, alors la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout entier n non nul par $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$ converge vers 0. Or,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k-\ell)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell\\
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{\cancel{n}}\times\cancel{n}\times\ell
\end{aligned}$$

soit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k + \ell$$

On peut calculer la limite puisque la moyenne de Césàro de w_n converge vers 0 :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k + \lim_{n\to+\infty}\ell\\
&= 0+\ell=\ell
\end{aligned}$$

D'où la généralisation du résultat trouvé à la question **B.I.1** :

$\boxed{\textit{Soit } (u_n)_{n\geqslant 1} \textit{ une suite de nombres réels convergeant vers } \ell, \textit{ alors } (u_n)_{n\geqslant 1} \textit{ converge au sens de Césàro vers } \ell.}$

II. 1. Montrons par récurrence que l'on a :

$$\forall n\geqslant 2\,,\ 0<x_n<1 \quad (\mathcal{H}_n)$$

- **Initialisation :** pour $n=2$, $\begin{aligned}[t] x_2 &= \dfrac{x_1(1+x_1)}{1+2x_1}\\ &= \dfrac{1\times(1+1)}{1+2\times 1}\\ &= \dfrac{2}{3}\in\,]\,0\,;\,1\,[.\end{aligned}$

  Donc, $(\mathcal{H}_2)$ est vraie.

- **Hérédité :** supposons l'hypothèse vraie au rang n, on a $0<x_n<1$ donc :

  les quantités $x_n, 1+x_n$ et $1+2x_n$ sont positives, et $\begin{aligned}[t] \dfrac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} &< \dfrac{x_n(1+2x_n)}{1+2x_n}\\ &< x_n\\ &< 1\end{aligned}$

  On a donc $0<x_{n+1}<1$, et l'hypothèse reste encore vraie au rang $n+1$.

On en conclut donc que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n\geq 2$.

$\boxed{\forall n\geqslant 2\,,\ 0<x_n<1.}$

2. $\forall\, n \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} - x_n \\ &= \frac{\cancel{x_n} + x_n^2 - \cancel{x_n} - 2x_n^2}{1+2x_n} \\ x_{n+1} - x_n &= -\frac{x_n^2}{1+2x_n} \end{aligned}$$

D'après la question **B.II.1.**, x_n est strictement positif, donc $\forall\, n \geqslant 2$, $x_{n+1} - x_n < 0$.
Ceci étant vérifié également pour $n = 1$: $x_2 - x_1 = -\dfrac{1}{3} < 0$ on conclut :

$\boxed{\textit{La suite } (x_n)_{n\geqslant 1} \textit{ est décroissante.}}$

3. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante minorée par 0 d'après les questions **B.II.1.** et **B.II.2.**, donc elle converge d'après la question **A.I.3.**
De plus, sa limite ℓ vérifie $0 \leqslant \ell \leqslant 1$ d'après la question **B.II.1.**

La fonction $x \mapsto \dfrac{x(1+x)}{1+2x}$ est continue sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,,\,+\infty\right[$, et en particulier sur $[\,0\,,\,1\,]$. Elle est donc continue en ℓ.
Si la suite converge, elle ne peut converger que vers une point fixe de f. On a donc, en passant à la limite dans l'expression de la suite :

$$\begin{aligned} \ell = \frac{\ell(1+\ell)}{1+2\ell} &\iff \ell(1+2\ell) = \ell(1+\ell) \qquad \text{avec } 1+2\ell \neq 0 \\ &\iff \ell(\cancel{1} + 2\ell - \cancel{1} - \ell) = 0 \\ &\iff \ell \times \ell = 0 \\ \ell = \frac{\ell(1+\ell)}{1+2\ell} &\iff \ell = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\textit{La suite } (x_n)_{n\geqslant 1} \textit{ est convergente, de limite nulle.}}$

4. On a pour tout entier n non nul :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} &= \frac{1+2x_n}{x_n(1+x_n)} - \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{(\cancel{1} + 2x_n) - (\cancel{1} + x_n)}{x_n(1+x_n)} \\ &= \frac{\cancel{x_n}}{\cancel{x_n}(1+x_n)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{1+x_n}}$$

5. On a, d'après la question **B.II.4** : $u_n = \dfrac{1}{1+x_n}$.
Or, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue sur $]-1\,,\,+\infty\,[$. En particulier, elle l'est en 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x_n} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$\boxed{\textit{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \textit{ converge vers } 1.}$

6. On a pour tout entier n non nul :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_1}\right) && \text{par téléscopage} \\ v_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - 1\right) \end{aligned}$$

Or, la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite de Césàro de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de limite 1. D'après la question **B.I.2.**, la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1 également.
On peut alors écrire $v_n - 1 = \mathrm{o}(1)$, ou encore $v_n = 1 + \mathrm{o}(1)$, d'où :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - 1\right) = 1 + \mathrm{o}(1) \\ \iff & \frac{1}{x_{n+1}} - 1 = n + \mathrm{o}(n) \\ \iff & \frac{1}{x_{n+1}} = n + 1 + \mathrm{o}(n) \\ \iff & \frac{1}{x_n} = n + \mathrm{o}(n) \end{aligned}$$

Donc, $\dfrac{1}{x_n} \sim n$ au voisinage de $+\infty$, soit :

Un équivalent de x_n au voisinage de $+\infty$ est $\dfrac{1}{n}$.

III. 1. Supposons que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ, alors la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\geqslant 1}$ converge également comme différence de deux suites convergentes. On peut préciser que la limite de cette suite est $\ell - \ell = 0$.

Si la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ, alors la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2. a. La suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un nombre réel ℓ, d'après la question **B.I.2.**, la suite des moyennes de Césàro converge également vers ℓ. Or,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) &= \frac{1}{n}(x_{n+1} - x_1) && \text{par téléscopage} \\ &= \frac{x_{n+1}}{n} - \frac{x_1}{n} && \text{soit} \\ \frac{x_{n+1}}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) + \frac{x_1}{n} && \text{et} \\ \frac{x_{n+1}}{n+1} &= \frac{n}{n+1}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) + \frac{x_1}{n}\right] \end{aligned}$$

Or, on a successivement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = \ell \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{x_1}{n} = 0, \quad \text{donc :}$$

La suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ.

b. La suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ non nul : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall\, n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} & \left|\frac{x_n}{n} - \ell\right| \leqslant |\ell|\varepsilon \\ \iff & \left|\frac{x_n}{n\ell} - 1\right| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

On a alors $x_n \sim n\ell$ en $+\infty$, donc la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$ si ℓ est positif, et elle diverge vers $-\infty$ si ℓ est négatif.

Si ℓ est non nul, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers l'infini.

c. La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie dans la partie **A.2.** ne converge pas alors que $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1}$ est une suite convergeant vers 0. Donc :

Si ℓ est nul, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas nécessairement convergente.

Partie C

I. 1. Étudions les suites extraites $(v_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(v_{2n+1})_{n\geqslant 1}$:

$$\begin{aligned} v_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{2k-1} + (-1)^{2k}\right) \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(-1+1) \\ v_{2n} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{2n+1} &= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k \\ &= \frac{1}{2n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{2k-1} + (-1)^{2k}\right) + (-1)^{2n+1}\right] \\ &= \frac{1}{2n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}(-1+1) + (-1)\right] \\ v_{2n+1} &= \frac{-1}{2n+1} \end{aligned}$$

Les suites $(v_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(v_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ convergent toutes les deux vers 0, donc :

La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas alors que sa suite des moyennes de Césàro converge,

La réciproque de la proposition énoncée en **B.I.2.** *n'est pas vraie.*

II. 1. Si $\alpha \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ \pi), \exists\, k \in \mathbb{Z}$, $\alpha = k\pi$, et $\forall\, n \geqslant 1$, $u_n = \sin(nk\pi) = 0$.
La suite des moyennes de Césàro converge vers la même limite 0 d'après la question **B.I.2.**

Si $\alpha \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ \pi)$, les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergent vers 0.

2. Pour tout entier n non nul, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} - u_n &= \sin(n+2)\alpha - \sin n\alpha \\
&= 2\sin\left[\frac{(\cancel{n}+2-\cancel{n})\alpha}{2}\right]\cos\left[\frac{(n+2+n)\alpha}{2}\right] && \text{formule de Simpson} \\
&= 2\sin\alpha\cos(n+1)\alpha \\
u_{n+2} - u_n &= 2\sin\alpha\, c_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{n+2} + u_n &= \sin(n+2)\alpha + \sin n\alpha \\
&= 2\cos\left[\frac{(\cancel{n}+2-\cancel{n})\alpha}{2}\right]\sin\left[\frac{(n+2+n)\alpha}{2}\right] && \text{formule de Simpson} \\
&= 2\cos\alpha\sin(n+1)\alpha \\
u_{n+2} + u_n &= 2\cos\alpha\, u_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1,\ u_{n+2} - u_n = 2\sin\alpha\, c_{n+1} \quad \textit{et} \quad u_{n+2} + u_n = 2\cos\alpha\, u_{n+1}.}$$

3. a. Supposons que $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$ et que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ.
Avec la première égalité de la question **C.II.2.**, on obtient :

$$c_{n+1} = \frac{u_{n+2} - u_n}{2\sin\alpha} \quad \text{avec } \sin\alpha \neq 0 \text{ car } \alpha \neq 0\,(\text{mod}\pi)$$

Donc, la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la limite de $\dfrac{u_{n+2} - u_n}{2\sin\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
Cette limite vaut 0.

Avec la seconde égalité de la question **C.II.2.**, on obtient en passant à la limite :

$$\begin{aligned}
& \ell + \ell = 2\cos\alpha \times \ell \\
\Longleftrightarrow\ & 2\ell(1-\cos\alpha) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \ell = 0 && \text{car } \cos\alpha \neq 1
\end{aligned}$$

Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge, alors la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ converge également et les deux suites ont pour limite 0.

b. Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge, alors elle converge vers 0 d'après la question **C.II.3.a.** il en est de même pour la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$. Or,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ u_n^2 + c_n^2 = \sin^2 n + \cos^2 n = 1$$

On obtient alors, en passant à la limite dans l'égalité : $0 + 0 = 1$ ce qui n'est pas possible.
Notre hypothèse de départ est donc fausse, c'est à dire :

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas.

c. On a toujours $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{n}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{n}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^k\right) \\
&= \frac{1}{n}\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \times \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\right) && \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq 1 \\
&= \frac{1}{n}\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \times \frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\alpha}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}n\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\alpha}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\alpha}{2}}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{n}\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n+1)\alpha}{2}} \times \frac{\cancel{-2\mathrm{i}}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\cancel{-2\mathrm{i}}\sin\frac{\alpha}{2}}\right) \\
v_n &= \frac{1}{n} \times \sin\frac{(n+1)\alpha}{2} \times \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|v_n| &= \left|\frac{1}{n} \times \sin\frac{(n+1)\alpha}{2} \times \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \\
&= \frac{1}{n} \times \left|\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\right| \times \left|\sin\frac{n\alpha}{2}\right| \times \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \\
|v_n| &\leqslant \frac{1}{n\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = 0$, donc, par le théorème de comparaison des limites :

$\boxed{\textit{La suite } (v_n)_{n\geqslant 1} \textit{ converge vers } 0.}$

III. 1. Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{2n} u_k &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_{n+1} && \text{car la suite } (u_n) \text{ est croissante} \\
&\geqslant u_{n+1} \times (2n-n) \\
\sum_{k=n+1}^{2n} u_k &\geqslant n\, u_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\textit{Pour tout } n \geqslant 1,\ n\,u_{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k.}$$

2. Pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
2\,v_{2n} - v_n &= \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}n} \sum_{k=1}^{2n} u_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{2n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2n+1}^{2n} u_k \\
2\,v_{2n} - v_n &\geqslant \frac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\, u_{n+1} && \text{d'après } \mathbf{C.III.1.}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\textit{Pour tout } n \geqslant 1,\ u_{n+1} \leqslant 2\,v_{2n} - v_n.}$$

3. La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge, donc, la suite $(v_{2n})_{n\geqslant 1}$, qui est une suite extraite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$, converge vers la même limite.
D'où la suite $(2v_{2n} - v_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente comme différence de deux suites convergentes. Cette suite est donc bornée. Notons M sa borne supérieure :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ u_{n+1} \leqslant 2\,v_{2n} - v_n \leqslant M$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante majorée, donc elle converge.

Supposons que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ, et notons ℓ' la limite de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
D'après la question **C.III.2.**, on a $\ell' \leqslant 2\ell - \ell \iff \ell' \leqslant \ell \quad (1)$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_n && \text{par croissance de la suite } u_n \\
&\leqslant \frac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\, u_n \\
v_n &\leqslant u_n
\end{aligned}$$

On obtient alors, en passant à la limite : $\ell \leqslant \ell' \quad (2)$.
Compte tenu de (1) et de (2), on en déduit que $\ell = \ell'$.

$$\boxed{\textit{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \textit{ converge vers la même limite que } (v_n)_{n\geqslant 1}.}$$

4. On vient de démontrer que si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, et qu'elle converge au sens de Césàro, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la même limite.
De manière analogue, on peut montrer la même propriété pour une suite décroissante, en posant $d_n = -u_n$.
Inversement, d'après la question **B.I.2.**, si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge, elle converge au sens de Césàro vers la même limite. D'où :

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite monotone, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge si, et seulement si, elle converge au sens de Césàro.