MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

EBE MAT 1

SESSION 2015

CAPES
CONCOURS EXTERNE
ET CAFEP

Sections :

MATHÉMATIQUES
LANGUES RÉGIONALES : BRETON

PREMIÈRE ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ

Durée : 5 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.
De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

A

Tournez la page S.V.P.

Problème n° 1

Notations

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

La partie réelle du nombre complexe z est notée $\operatorname{Re} z$.

Le module du nombre complexe z est noté $|z|$ et on rappelle que, pour tout nombre complexe z, $|z|^2 = z \times \overline{z}$.

Soient p et q deux entiers relatifs tels que $p \leqslant q$, on note $[\![p, q]\!]$ l'ensemble des entiers relatifs k tels que $p \leqslant k \leqslant q$.

Préambule

Ce problème est composé de trois parties.

La partie A généralise l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ et son cas d'égalité.

La partie B est une application d'un résultat de la partie A à un problème d'optimisation.

La partie C est une application d'un résultat de la partie B à un problème de géométrie du triangle.

Partie A

On considère un entier naturel n non nul.

I. **1.** Justifier que, pour tout nombre complexe z, $\operatorname{Re} z \leqslant |z|$ et étudier le cas d'égalité.

2. **Question de cours.** — Démontrer que, pour tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes, $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

3. On suppose z_1 et z_2 sont des nombres complexes non nuls. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement s'il existe un réel positif λ tel que $z_2 = \lambda z_1$. Interpréter ce résultat en termes d'argument.

II. **1.** Démontrer que, pour tout n-uplet $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ de nombres complexes,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

2. Montrer que, si $z_1, \ldots, z_n$ sont des nombres complexes tous non nuls, l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+, \quad z_k = \lambda_k z_1.$$

Interpréter ce résultat en termes d'arguments.

Partie B

On se place désormais dans le plan complexe $\mathscr{P}$, d'origine O. Soit un entier $n \geqslant 3$. On considère n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, d'affixes respectives $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tels que :

(i) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, A_k est distinct de O.

(ii) Les A_k sont deux à deux distincts.

(iii) Il n'existe aucune droite du plan $\mathscr{P}$ contenant tous les A_k.

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0$.

I. Donner un exemple de n-uplet $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ vérifiant l'égalité précédente.

II. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $u_k = \dfrac{z_k}{|z_k|}$. Soit M un point de $\mathscr{P}$ d'affixe z.

1. Vérifier que
$$\sum_{k=1}^{n} \overline{u}_k (z - z_k) = -\sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

2. En déduire l'inégalité $(\star)$ ci-dessous :
$$\sum_{k=1}^{n} |z - z_k| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|. \qquad (\star)$$

3. En utilisant la question II.2 de la partie A, démontrer que l'inégalité $(\star)$ est une égalité si et seulement si, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\overline{u}_k(z - z_k)$ est un réel négatif.

4. En déduire que l'inégalité $(\star)$ est une égalité si et seulement si $z = 0$.

5. Établir que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} MA_k$ atteint son minimum en un unique point M que l'on précisera.

Partie C

On se place toujours dans le plan complexe $\mathscr{P}$. On considère trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c et tels que :

- Les points A, B, C ne sont pas alignés.
- Chacun des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ possède une mesure appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi/3[$.

Sur les côtés du triangle ABC, on construit vers l'extérieur trois triangles équilatéraux $AC'B$, $BA'C$ et $CB'A$. On nomme a', b', c' les affixes respectives des points A', B', C'.

I. Faire une figure et tracer les droites (AA'), (BB') et (CC').

II. On admet que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point Ω strictement compris à l'intérieur du triangle ABC. En utilisant une rotation de centre A exprimer b' en fonction de a et c et b en fonction de a et c'.

III. En déduire le module et un argument de $\dfrac{b' - b}{c - c'}$.

IV. Déterminer une mesure de chacun des angles $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C})$, $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A})$ et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$.

V. Démontrer que
$$\frac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A} + \frac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B} + \frac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C} = \overrightarrow{0}.$$

VI. En utilisant les résultats de la partie B, établir que la somme $MA + MB + MC$ admet son minimum en un unique point que l'on précisera.

Problème n° 2

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}_+^*$ l'intervalle $]0,+\infty[$.

La partie imaginaire du nombre complexe z est notée $\operatorname{Im} z$.

Préambule

Dans tout le problème, les suites considérées sont à valeurs réelles.

La partie A aborde la convergence des suites monotones et aboutit à quelques résultats sur la série harmonique.

Les parties B et C envisagent l'étude de la convergence au sens de CESÀRO et son lien avec la convergence au sens usuel.

Partie A

I. Questions de cours

1. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
2. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée alors elle converge.
3. Établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite décroissante soit convergente.

II. On considère la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Donner une interprétation graphique de a_n à partir de la représentation graphique de la fonction inverse sur l'intervalle $[1, n+1]$.
2. **a.** Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_{2n} - a_n \geqslant \frac{1}{2}.$$

   b. La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?
3. Recherche d'un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$.

   a. Démontrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant a_n$.

   c. En déduire un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$.
4. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = a_n - \ln n$. À l'aide des résultats des questions II.3.a et II.3.b, démontrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Partie B

À toute suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, on associe la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall n \geqslant 1, v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge au sens de CESÀRO si la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

I. **1.** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de limite nulle et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon.$$

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2. Énoncer et démontrer la généralisation du résultat précédent au cas où la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ quelconque.

II. Application à la recherche d'un équivalent :

On considère la suite définie par

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $0 < x_n < 1$.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

3. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

4. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{1+x_n}.$$

5. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

6. Exprimer v_n en fonction de x_{n+1} et x_1 et en déduire un équivalent de x_n au voisinage de $+\infty$.

III. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle.

1. On suppose que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Montrer que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

2. On suppose que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un nombre réel ℓ.

a. Montrer que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser sa limite.

b. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans le cas où $\ell \neq 0$.

c. Dans le cas où $\ell = 0$, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle nécessairement convergente ?

Partie C

I. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Conclure quant à la validité de la réciproque de la proposition énoncée à la question I.2 de la partie B.

II. Soit α un nombre réel. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sin n\alpha$ et $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque $\alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $c_n = \cos n\alpha$. Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de c_{n+1} et $u_{n+2} + u_n$ en fonction de u_{n+1}.
3. On suppose dans cette question que $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$.
   - **a.** On fait l'hypothèse que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. En utilisant les deux relations établies à la question II.2, démontrer qu'alors la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ converge également et préciser les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$.
   - **b.** Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
   - **c.** En remarquant que $\sin k\alpha = \operatorname{Im}\left(e^{ik\alpha}\right)$, montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner la valeur de sa limite.

III. Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

1. Démontrer, pour tout $n \geqslant 1$, l'inégalité
$$n u_{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k .$$
2. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} \leqslant 2v_{2n} - v_n$.
3. Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et préciser sa limite.
4. Énoncer la propriété ainsi démontrée sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante.