

## Projet TraAM : Formation au calcul et résolution de problèmes

« Dans la culture, les deux termes, **calcul mathématique et raisonnement** apparaissent comme **antagonistes**. Le calcul est opposé au raisonnement tant dans les démarches de pensée qu'il met en oeuvre que dans les formes d'apprentissage qu'il requiert. Le calcul renvoie à une **activité mécanique, automatisable, sans intelligence, il est réduit à sa part mécanisée**. Son **apprentissage renvoie à l'idée d'entraînement purement répétitif**. En bref, le calcul est perçu comme renvoyant aux basses oeuvres du travail mathématique, tandis que sa partie noble, celle liée au raisonnement, est plutôt associée à la résolution de problèmes géométriques. Cette image, ancrée dans la culture, est aussi portée par l'enseignement. »<sup>1</sup>

Dans le programme de Seconde, on lit : « **Les activités de calcul nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner**. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, l'anticipation et **l'intelligence du calcul**. Le cas échéant, cela s'accompagne **d'une mobilisation éclairée et pertinente** des logiciels de calcul formel. » De même, le document Ressource pour la classe sur le calcul au Collège réaffirme la nécessité d'un entraînement aux techniques de calcul, aussi bien mental que posé, et encourage l'utilisation de calcul instrumenté pour la modélisation, l'exploration de phénomènes numériques ou algébriques, ainsi que pour la résolution de problèmes complexes. En Lycée Professionnel, les T.I.C. doivent être utilisées afin d'expérimenter, de conjecturer ou d'émettre des hypothèses, de vérifier des résultats.

**L'objectif du groupe de travail est de proposer des scénarios de formation des élèves pour les conduire à mettre en oeuvre de manière autonome une stratégie de résolution de problèmes ouverts (« tâches complexes ») en lien avec des capacités de calcul du programme.**

Une réflexion particulière sera portée sur la contribution des outils numériques (tableur, calcul formel) ainsi que sur les compétences développées et leur évaluation.

---

<sup>1</sup> Extrait de « L'Enseignement des Sciences Mathématiques », Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, sous la direction de JEAN-PIERRE KAHANE

## SOMMAIRE

<b>I. Problématique.....</b>	<b>3</b>
<b>II. Thèmes choisis.....</b>	<b>5</b>
<b>III. Mise en œuvre d'une tâche complexe – Différentes phases.....</b>	<b>6</b>
<b>IV. Logiciels – Outils numériques utilisés .....</b>	<b>7</b>
<b>V. Préparation de fond : Progression spiralée.....</b>	<b>7</b>
1. Piste pour l'introduction des tâches techniques.....	7
2. Phase de prise en main des outils numériques.....	11

# I. Problématique

L'objectif des groupes sera de proposer **des scénarios de formation** des élèves pour les conduire à mettre en œuvre **de manière autonome** une stratégie de résolution de problèmes ouverts (« tâches complexes ») en lien avec **des capacités de calcul du programme**.

Une réflexion particulière sera portée sur **la contribution des outils numériques** (tableur, calcul formel) ainsi que sur les compétences développées et leur évaluation.

L'outil instrumenté est inévitable dans notre société actuelle.

Il est également décrié par beaucoup de personnes :

*« les élèves ne savent plus calculer, c'est la faute de la calculatrice ! ».*

Il est vrai que les outils numériques (calculatrice, calcul formel...) permettent aux élèves d'éviter de travailler les capacités techniques, d'exécution. Mais l'activité de calcul en Mathématiques ne se résume pas à une activité automatisable et technique. Comme le souligne Michèle Artigue (« *L'enseignement du calcul aujourd'hui : Problèmes, défis et perspectives* »), les besoins actuels en calculs se sont « déplacés » et il convient de nos jours de développer d'autres capacités **liées à l'anticipation, le contrôle, l'interprétation**.

On développe ainsi ce qu'on appelle **l'intelligence de calcul** clairement évoquée sous diverses formes dans les divers programmes de l'école primaire au lycée.

Comme l'ont montré des études sérieuses (L. Trouche ; D. Guin : « Calculatrice symboliques »), les outils numériques ne diminuent pas forcément les capacités liées aux calculs.

L'outil numérique peut ici avoir une place significative dans l'apprentissage du calcul en mathématique :

Il doit être utilisé **à bon escient, de manière régulée et non systématiquement**.

Son utilisation, son intégration doit-être pensée, réfléchi ; introduite de manière ***progressive*** en fonction des besoins, à travers des activités qui permettront à l'élève de **garder une activité mathématique et de développer cette « intelligence de calcul »**.

Nous avons donc essayé de réfléchir sur l'apport de l'outil numérique dans le développement des compétences liées au calcul.

Le projet TraAM nous a également invités à réfléchir sur **la dialectique entre « sens et technique »** :

Citons de nouveau Michèle Artigue :

*« [...]L'intelligence du calcul, qu'il soit numérique ou algébrique, nécessite un répertoire mémorisé*

*[...]L'intelligence du calcul, pour pouvoir se développer et s'exercer, nécessite que l'on s'autorise à sortir des seuls exercices routiniers et souvent des seules obligations du programme »*

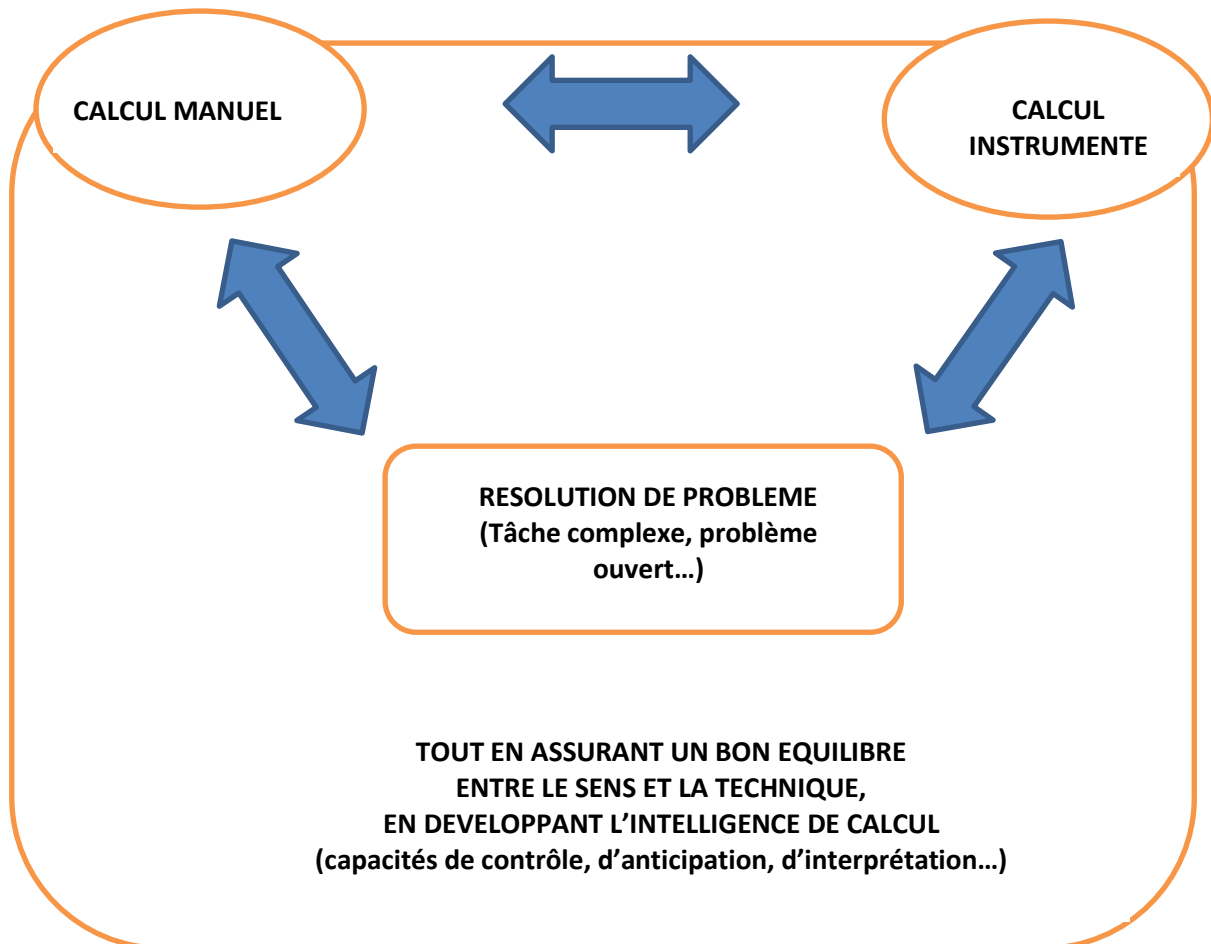
Nous abordons ici un problème qui touche tous les enseignants et qui entretient le débat.

- « *Faut-il passer son temps à entraîner les élèves à des tâches techniques en se disant ensuite qu'ils arriveront forcément à résoudre des problèmes plus complexes ?* »
- « *Ou au contraire, faut-il former les élèves qu'à des résolutions de problèmes permettant de donner sens aux calculs en se disant que la partie technique « coulera de source » ?* »

Sur ces deux points de vue, personne ne détient la bonne réponse.

Le développement de la technique est nécessaire mais non suffisant pour la résolution d'un problème. Il est nécessaire de sortir des exercices stéréotypés, de changer de cadre, de registre... (R. Douady, R. Duval) afin qu'une notion puisse être réellement comprise par un élève. On forme ainsi les élèves à des capacités transversales liées à la résolution de problèmes (expérimenter, réaliser, raisonner, communiquer...), fondamentales notamment **pour la formation de l'esprit, du citoyen.**

**Le sens et la technique doivent se nourrir l'un de l'autre, progressivement dans l'apprentissage, au travers la résolution de problèmes, tout en réfléchissant à l'influence, la contribution des outils numériques.**



Ainsi, le professeur doit lui aussi repenser son enseignement, créer des activités qui prennent en compte toutes ces remarques.

C'est sur ces activités, leurs mises en œuvre, les capacités de calculs développées, la réflexion autour de toutes ces questions que nous avons travaillé.

## II. Thèmes choisis

Le thème choisi pour l'académie de la Réunion est le « calcul littéral » avec un éventuel élargissement sur les fonctions.

Nous savons tous que le passage du calcul numérique au calcul littéral constitue un obstacle majeur au collègue.

Beaucoup d'élèves ont des difficultés sur des capacités concernant le calcul littéral : développer, factoriser, réduire une expression littérale, utiliser les identités remarquables...

Un prérequis essentiel est bien sûr la maîtrise du calcul numérique : les 4 opérations, les règles de priorité, les tables, les puissances...

Aussi, les activités proposées commencent systématiquement par des calculs numériques et mettent en œuvre des capacités diverses (règles de priorité, carré d'un nombre...).

Conformément au document d'accompagnement « *Le calcul numérique au collège* »<sup>2</sup>, nous nous sommes intéressés aux divers types de calculs pouvant être mis en jeu :

	<b>Calcul automatisé</b>	<b>Calcul réfléchi ou raisonné</b>
<b>Calcul mental</b>	Résultats mémorisés Procédures automatisées	Procédures construites ou reconstruites Choix des arrondis
<b>Calcul écrit</b> (papier-crayon)	Techniques opératoires (calcul posé)	Procédures construites ou reconstruites Choix des arrondis
<b>Calcul instrumenté</b> (calculatrice, logiciel)	Calculs usuels (quatre opérations), racines carrées, calculs trigonométriques, fonctions statistiques, utilisation des fonctions simples d'un tableur...	- programmation d'un calcul complexe - adaptation de la procédure aux possibilités de la machine

L'aspect générique permet d'établir des conjectures et d'amener progressivement au calcul littéral en **lui donnant du sens**.

Les tâches complexes vont être expérimentées progressivement dans l'année. Une réflexion a été faite sur la contribution des logiciels utilisés, leurs influences que nous verrons plus en détails dans les scénarios. Une attention particulière a été faite sur **l'apport du calcul formel**.

Elle permet notamment de développer **l'intelligence de calcul, l'esprit critique sur les résultats obtenus**.

En outre, nous nous sommes intéressés au développement de **l'aspect structural d'une expression algébrique**, comme le document d'accompagnement « *du numérique au littéral au collège* »<sup>3</sup> le préconise.

<sup>2</sup> *Le calcul numérique au collège*, DGESCO, Janvier 2007

<sup>3</sup> *Du numérique au littéral au collège*, DGESCO, Février 2008

### III. Mise en œuvre d'une tâche complexe – Différentes phases

(Cette partie sera développée plus en détails en annexe II)

Les élèves doivent être formés à la mise en œuvre de tâches complexes. Ces dernières permettent l'évaluation du Socle Commun.

**La tâche complexe fait partie intégrante de la notion de compétence et permet son évaluation.**

La mise en œuvre préconisée permettant l'autonomie et la prise d'initiative est **le travail de groupe**<sup>4</sup>.

Les tâches complexes peuvent également être données à la maison.

Dans les deux cas, il convient également d'inciter les élèves à laisser **traces de toutes leurs démarches, essais**. Il est donc fondamental de former les élèves à **une activité métacognitive très utile et efficace : les narrations de recherche**.

Elles pourront servir de **diagnostic** pour le professeur **pour cibler les points forts des élèves ainsi que les points où ils doivent progresser**.

Elles permettent d'observer **des manifestations positives des compétences du Socle Commun**.

Le travail de groupe s'effectue habituellement en plusieurs phases<sup>5</sup> :

- ❖ **Phase de dévolution du problème (compréhension du sujet)**
- ❖ **Phase de recherche individuelle**
- ❖ **Travail de groupe**
- ❖ **Mise en commun des diverses procédures – Débat**<sup>6</sup>
- ❖ **Synthèses – Solution du problème**

---

<sup>4</sup> Préconisé par la DGESCO. « *Conseils pour mener un travail de groupe* » : <http://eduscol.education.fr/pid23228-cid56349/banque-de-situations-d-apprentissage-a-telecharger.html>

<sup>5</sup> Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur sur des documents ressources :

- *Les pratiques du problème ouvert*, Gilbert Arzac, Michel Mante, CRDP Académie de Lyon, 2007.
- *MISE EN OEUVRE, GESTION ET EVALUATION DES TACHES COMPLEXES DANS LE CADRE DU SOCLE COMMUN*, Document ressource de la Réunion, mars 2011.
- « *Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse* », Marc Legrand, Repère IREM n°10

<sup>6</sup> Le document ressource sur la « *mise en œuvre d'une tâche complexe* » sur le site académique de la Réunion donne des détails sur la gestion du débat (voir p17 à 19) <http://maths.ac-reunion.fr/College/Socle-commun/Mise-en-oeuvre-gestion-et>

## IV. Logiciels – Outils numériques utilisés

Le professeur a à sa disposition un ordinateur avec vidéoprojecteur. Les productions des élèves sont prises avec un appareil photo numérique. Le transfert se fait rapidement grâce à un lecteur de carte SD. On peut également utiliser un scanner ou une tablette-PC.

Les logiciels utilisés par les élèves sont :

- Le tableur : Excel ou Calc d'OpenOffice
- Calculatrice « niveau Collège »
- Un logiciel de calcul formel : Xcas<sup>7</sup>, WxMaxima<sup>8</sup>

Pour rendre des productions liées au tableur ou au logiciel de calcul formel Xcas, les élèves peuvent également donner leur fichier via une clé USB ou en l'enregistrant sur le réseau du collège.

Nous expliquons comment nous avons introduit ces logiciels ainsi que les savoir-faire associés dans l'annexe III-2.

## V. Préparation de fond : Progression spiralée

### 1. Piste pour l'introduction des tâches techniques

(Cette partie sera plus développée en Annexe III.)

Rappelons un des objectifs du projet : faire résoudre des problèmes par les élèves **de manière autonome** en lien **avec des capacités de calcul (« manuel » mais aussi instrumenté)**.

Il paraît alors indispensable de réfléchir :

- Aux obstacles, difficultés concernant les capacités de calculs.
- Sur les prérequis en terme de savoir-faire sur les calculs numériques, littéraux (ayant choisi ce thème) et instrumentés.
- **Sur une progression** permettant d'arriver aux objectifs fixés (les élèves ne seront en mesure de résoudre en autonomie une tâche complexe si nous ne les formons pas !).

Les tâches complexes proposées ont pour but de développer des capacités liées au calcul mais aussi de développer l'intelligence de calcul.

Elles nécessitent **un répertoire automatisé (un ensemble de techniques)** pour pouvoir être réalisées.

A partir de ces savoir-faire, la tâche complexe va permettre :

- **Soit d'introduire un nouveau savoir : on parlera alors plutôt de situation-problème.**
- **Soit de résoudre un problème en mobilisant des connaissances, capacités et attitudes.**

*La question est de comment travailler ses techniques, développer ces automatismes chez l'élève tout en l'intégrant dans nos cours de l'année sans pour autant faire « que de la technique » avant de résoudre une tâche complexe.*

<sup>7</sup> Pour télécharger le logiciel Xcas : [http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/install\\_fr](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/install_fr)

<sup>8</sup> Pour télécharger le logiciel WxMaxima : <http://andrejv.github.com/wxmaxima/>

**Nous pensons qu'il est fondamental de mettre en place une *progression spiralée* (à petites touches, comme le préconise le document ressource sur le Socle Commun) liée aux capacités de calcul (prérequis) afin qu'elles deviennent des automatismes que l'élève devra mobiliser lors de la tâche complexe.**

Nous ne prétendons pas avoir toutes les réponses mais nous proposons quelques exemples (non exhaustifs) de mise en œuvre de progression spiralée autour des capacités de calculs et la mise en place d'automatismes :

#### ❖ **Des pistes pour bâtir une progression spiralée**

Il convient *d'identifier* toutes les connaissances et capacités à enseigner durant l'année pour chaque thème important du programme (calcul littéral, proportionnalité, calcul numérique...).

La progression deviendra ensuite « spiralée » si elle permet d'aborder **tous les champs, tous les thèmes majeurs du programme** à un 1<sup>er</sup> niveau (en prenant par exemple comme repère les capacités du Socle Commun pour chaque thème).

Puis nous reprenons ces thèmes à un 2<sup>ème</sup> niveau (capacité hors Socle) permettant de les enrichir.

Le 3<sup>ème</sup> niveau (Expert) doit être une ambition pour tous mais cela dépend bien sûr du profil de la classe. Il est également important de faire ressortir dans une progression spiralée **le décroisement des chapitres**.

**Un thème peut être vu sous plusieurs angles, en fil rouge, dans plusieurs champs de données**, ce qui permet à l'occasion d'entretenir par petites touches la notion et ce qui aide aussi à **la construction du savoir** (changement de cadre et de registre – R. Douady, R. Duval).

Une progression spiralée se fait aussi « au quotidien », soit pour préparer des apprentissages (évaluation diagnostique), soit pour entretenir et/ou enrichir une notion.

Plusieurs pistes sont envisageables :

- Proposer des devoirs à la maison, des QCM préparant un apprentissage et revenant sur des notions des classes antérieures.
- Proposer des tâches complexes mobilisant uniquement des savoir-faire que les élèves sont sensés connaître (ce qui permet de ne plus faire « des révisions » car ces tâches complexes mettent en jeu des attitudes et ne sont pas de simples rappels)
- Proposer des « **apprentissages parallèles** » (H. Staïner<sup>9</sup>) durant une séquence :

---

<sup>9</sup> « Des maths ensembles et pour chacun », H. Staïner et JP. Rouquès.



❖ Exemples illustrant ces pistes : (le lecteur trouvera en annexe III plus de détails et d'exemples).

✚ **Exemple du calcul littéral en 4<sup>ème</sup> :**

Rappelons les connaissances et capacités liées au programme de 4<sup>ème</sup> concernant le calcul littéral (Extraits)

<p><b>2.2. Calcul littéral</b> Développement.</p>	<p>- Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.</p> <p>- Réduire une expression littérale à une variable, du type : <math>3x - (4x - 2)</math>, <math>2x^2 - 3x + x^2</math>...</p> <p>- Développer une expression de la forme <math>(a + b)(c + d)</math>.</p>	<p>L'apprentissage du calcul littéral est conduit très progressivement à partir de situations qui permettent aux élèves de donner du sens à ce type de calcul.</p> <p>Le travail proposé s'articule autour de trois axes :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ;</li> <li>- utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ;</li> <li>- utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique).</li> </ul> <p>Les situations proposées doivent exclure tout type de virtuosité et viser un objectif précis (résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique, établissement d'un résultat général).</p> <p>L'objectif reste de développer pas à pas puis de réduire l'expression obtenue. Les identités remarquables ne sont pas au programme. Les activités de factorisation se limitent aux cas où le facteur commun est du type <math>a</math>, <math>ax</math> ou <math>x^2</math>.</p>
<p>Résolution de problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.</p>	<p>- Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.</p>	<p>Les problèmes issus d'autres parties du programme et d'autres disciplines conduisent à l'introduction d'équations et à leur résolution. À chaque fois sont dégagées les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.</p> <p>Les élèves, dans le cadre du socle commun, peuvent être amenés à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible.</p>

Le passage du calcul numérique au calcul littéral est un obstacle pour les collégiens.

Il convient de l'aborder de manière progressive, en partant des représentations des élèves et de revenir par petites touches sur les notions enseignées tout en les enrichissant.

**1<sup>ère</sup> phase : Savoir-faire de 5<sup>ème</sup>**

**2<sup>ème</sup> phase : Enrichissement des savoir-faire de 5<sup>ème</sup> – Produire une expression, donner du sens au calcul littéral, calculer la valeur d'une expression littérale**

**3<sup>ème</sup> phase : Réduire une expression littérale avec ou sans parenthèse**

**4<sup>ème</sup> phase : Double-distributivité**

**5<sup>ème</sup> phase : Mise en équation de problème**

**Remarque : les thèmes parallèles prennent ici tout leur sens dans la préparation des apprentissages.**



## **Conclusion**

Nous pouvons voir que l'apprentissage parallèle, au travers de ces exemples, est un outil puissant et efficace dans le cadre d'une progression spiralée.

- ✓ **Il permet d'éviter des révisions** : Il suffit d'identifier les prérequis techniques et de les effectuer en apprentissage parallèle en amont.
- ✓ Il permet de **revenir par petites touches, à tout moment**, régulièrement sur des techniques, des savoirs. En cela, **il favorise le développement des automatismes**.
- ✓ **Il donne du sens aux techniques enseignées** car si la progression est bien pensée, ces techniques vont être utilisées dans la découverte d'un nouveau savoir ou vont être utilisées dans la résolution de problèmes (tâche complexes...). Elles vont être également vues dans divers cadres et registres.
- ✓ Cet apprentissage parallèle fait office également **d'évaluation diagnostique** et permet de repérer rapidement **les difficultés des élèves**. Après avoir repéré ces élèves, l'apprentissage parallèle pourra servir comme **outil de remédiation** : il suffira d'interroger en plénière ces élèves afin que tout le monde puisse en profiter (**différenciation de la remédiation par l'oral**).

## **2. Phase de prise en main des outils numériques**

Afin de pouvoir résoudre de manière autonome les tâches complexes proposées, les élèves doivent être capables d'utiliser les logiciels. Ils doivent donc acquérir **des savoir-faire liés au logiciel utilisé**.

Attention, il ne s'agit pas de faire un cours d'informatique aux élèves !

Ces savoir-faire doivent être **au service d'une activité mathématique, notamment lors de la résolution de problèmes**.

Cette phase de prise en main des logiciels doit être intégrée **dans une progression spiralée**. Les fonctionnalités sont introduites progressivement. Elles doivent être ensuite réactivées et entretenues quotidiennement dans le cours par des exercices à la maison, devoirs maison, devoirs surveillés... **Elles permettent également de former l'élève au quotidien à l'intelligence de calcul sur des petits exercices routiniers (voir exemples ci-dessous)**

Il n'est donc pas nécessaire d'aller en salle informatique pour initier les élèves à un logiciel. Une simple démonstration du professeur avec quelques élèves essayant le logiciel peut servir de point de départ, ce qui permet la validation de quelques items du B2i.

(Des pistes de phase de prise en main de la calculatrice, du tableur, de logiciel de calcul formel Xcas, WxMaxima sont développées en Annexe III-2.)