Le nombre d'Alice et Bertrand

a. Sujet[1]

<u>Pour chacun des problèmes</u>, tu écriras sous forme **<u>d'une narration de recherche</u>** toutes les idées qui te viennent en tête pour le résoudre.
Tu écriras **<u>toutes les étapes de ta recherche</u>**, y compris les étapes qui n'ont pas abouties.

Problème 1 :
a) Arthur a une calculatrice sur laquelle il affiche un nombre.
Il multiplie le nombre affiché par 3 puis il ajoute 5.
La calculatrice affiche alors 8,9. Quel nombre a-t-il affiché au départ ?
b) Peux-tu trouver le nombre qu'Arthur a choisi au départ si la calculatrice affiche à la fin 3725 ?

Problème 2 :
Alice et Bertrand dispose chacun d'une calculatrice sur laquelle ils affichent le même nombre.
Alice multiplie le nombre affiché par 5 puis retranche 1 au résultat obtenu.
Bertrand multiplie le nombre affiché par 3 puis ajoute 2 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat !
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Problème 3 :
Alice et Bertrand dispose chacun d'une calculatrice sur laquelle ils affichent le même nombre.
Alice multiplie le nombre affiché par 26 puis ajoute 22 au résultat obtenu.
Bertrand multiplie le nombre affiché par 6 puis ajoute 149 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat !
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Problème 4 :
Alice et Bertrand dispose chacun d'une calculatrice sur laquelle ils affichent le même nombre.
Alice multiplie le nombre affiché par 5 puis retranche 2 au résultat obtenu.
Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 3 au résultat obtenu.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat !

<u>Remarque</u> :
Cette activité a été faite en juin 2011.
Les élèves n'avaient pas à l'époque le tableur en libre-service.
Ils n'ont pas été évalués car elle a servi à introduire la notion d'équation en 4ème (situation-problème).

[1] Sujet créé à partir du document d'accompagnement EDUSCOL : « *Du calcul numérique au calcul littéral* ».

b. Contexte

Ce problème sera effectué en 4ème en classe entière, soit :

- En classe avec ordinateurs en libre-service
- En salle informatique

Il peut également être donné en 5ème, le but étant d'initier les élèves aux équations par des tests d'égalités conformément au programme[2].

Un travail de groupe sera effectué.
Toute la mise en œuvre est explicitée en annexe II.

Pour gagner du temps, les élèves travaillent sur une seule table et seuls deux élèves n'ont qu'à retourner leur chaise.

Les élèves auront déjà fait les trois tâches complexes précédentes.
L'activité étant assez longue, afin qu'il n'y ait pas d'abandon de la part d'un ou de plusieurs groupes, le professeur pourra effectuer des **« plénières de régulation »**[3] .
Cela permettra, au travers d'un débat animé par le professeur, de mettre en commun les premières solutions trouvées et de relancer tous les groupes.
Il y aurait donc un « aller-retour » entre le travail de groupe et des « plénières-débats ».

Remarque sur la constitution des groupes
Le choix des groupes peut se faire suivant **plusieurs critères de plus en plus fins** :

• **Organisation spatiale :** afin de gagner du temps, on forme les groupes à partir d'élèves qui sont proches dans la classe.

• **Hétérogénéité :** on peut également essayer de travailler **l'hétérogénéité, la différenciation**.
Le professeur décide du ***degré d'hétérogénéité du groupe*** suivant la qualité des travaux de groupe réalisés tout au long de l'année : on peut avoir de bonnes surprises en créant un groupe hétérogène. Bien sûr, si cela ne marche pas, le professeur a le pouvoir de changer la constitution des groupes et de reconstituer des groupes moins hétérogènes…
L'idée de constituer que des groupes homogènes peut conforter les élèves en difficulté dans leur situation d'échec. De plus, cela ne favorise pas les confrontations des diverses démarches (personnelles et expertes).

• **Affinités :** lorsque les deux critères précédemment utilisés ne suffisent plus, le professeur peut décider de former les groupes par affinités. Il peut demander aux élèves avec qui ils veulent absolument travailler. Bien sûr, le professeur sera d'autant **plus exigeant** sur **l'investissement et le travail de ce groupe** puisqu'il a accepté leur demande.

---

[2] BO du 28 août 2008
[3] *« Des maths, ensemble et pour chacun »*, Rouquès J-P et Staïner Hélène.

En jouant sur ces critères, **avec l'expertise du professeur** ayant pratiqué plusieurs travaux de groupe en cours d'année, **la constitution des groupes s'affine**. De plus, les élèves apprennent tout au long de l'année, lors de ces travaux de groupe, à mieux se connaître et à travailler ensemble.

c. Prérequis

Ce problème s'intègre dans une **progression spiralée** où le calcul littéral est vu tout au long de l'année (Voir Annexe III).
Séquence 1 (1er trimestre) : calcul littéral, sens, production d'une expression littérale, variable.
Séquence 2 (Début 2ème trimestre) : factorisation (rappels 5ème), réduction d'une expression.
Séquence 3 (Fin 2ème trimestre) : double distributivité.

Concernant les outils informatiques pouvant être utilisés, les élèves y ont été initiés en plénière **progressivement, par petites touches, en spirale**
Les élèves savent notamment manipuler **le tableur**, insérer, généraliser des formules.
En fin d'année, avec toutes ces tâches complexes effectuées, la plupart des élèves devraient être bien habitués à ce logiciel.

Les élèves sont également habitués à la pratique des narrations de recherche et au travail de groupe.

d. Objectifs

- **Généraux**

Les élèves doivent « résoudre un problème » et mettre ainsi en œuvre des Compétences du Socle Commun : compétence 3 – Domaine « Résoudre un problème » - Items C1, C2, C3, C4.
La partie « narration de recherche » permet d'évaluer la compétence 1 et le travail de groupe (suivi du débat) permet d'évaluer les compétences 6 et 7 du Socle Commun.

Ce problème est **une situation-problème** qui permet **d'introduire la notion d'équation** comme un outil qui va s'avérer **progressivement indispensable pour résoudre un problème numérique.**

Nous sommes ici dans **une approche « constructiviste »** de l'enseignement.
Les élèves doivent utiliser leurs conceptions antérieures (raisonnements arithmétiques, calculs numériques, essais-erreurs…) qui s'avèrent efficaces au départ (Cf. problèmes 1 et 2).
Mais **en changeant les variables didactiques**, les élèves vont se rendre compte de **l'insuffisance de leurs conceptions antérieures**, soit car elles ne sont plus « économiques » (problème 3 – solution décimale), soit car elles ne permettent plus du tout de trouver une solution exacte mais uniquement une valeur approchée (problème 4 – solution non décimale).

- **Calculs manuels – « compétences » développées**

Pour le problème 1, on doit résoudre une équation du type $ax+b = c$ où la méthode « experte » s'avère inutile. L'élève peut effectuer des essais au hasard, ensuite réajuster ses essais. Il peut écrire les calculs sur feuille (même s'il utilise la calculatrice) afin de garder une trace de ses essais. Les capacités utilisées concernent les opérations usuelles.
Tous les élèves peuvent entrer dans le sujet avec leur propre démarche personnelle.
Pour ce problème, les opérations sont « inversibles ». Un élève ayant une bonne pratique des programmes de calcul, du sens des opérations, pourra trouver systématiquement le nombre inconnu par un raisonnement arithmétique.

Les autres problèmes concernent la résolution d'équations du type $ax+b = cx+d$.
Pour le problème 2, la solution est triviale.
Des essais au hasard peuvent rapidement permettre de trouver l'inconnue.

Ensuite, les élèves peuvent organiser des essais et travailler sur l'écart obtenu par les deux expressions. Là encore, les capacités de calcul utilisées concernent les opérations usuelles. Mais ici, les opérations n'étant pas inversibles, le nombre inconnu devient de plus en plus dur à trouver.

Les élèves étant initiés depuis le début de l'année au programme de calcul et au calcul littéral pourront avoir l'idée d'introduire une lettre, de produire des expressions littérales et finalement de **<u>mettre en équation ces problèmes</u>**. Même s'ils ne savent pas les résoudre par la méthode experte, ce sera l'occasion d'introduire le vocabulaire associé aux équations (inconnue, mise en équation, solution…).

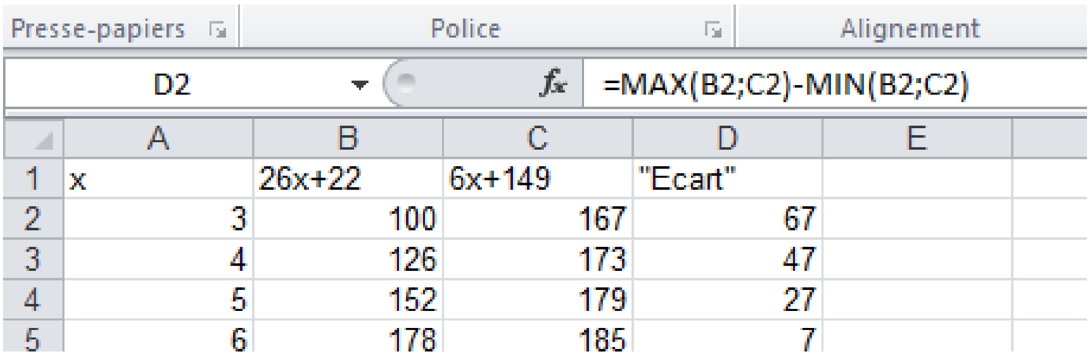
- **Calculs instrumentés – Influence des outils**

L'élève va sûrement utiliser sa calculatrice pour les premiers problèmes vu que cela est suggéré dans le texte.

A partir des problèmes 2 et 3, le changement de variables didactiques devrait amener les élèves à changer de stratégie. Notamment, il devrait inciter les élèves à utiliser le tableur, plus performant pour garder une trace des essais et faire des ajustements. Il sera intéressant de voir quelles sont les stratégies adoptées par les élèves afin de « s'approcher » de la solution.
Des raisonnements de « dichotomie » pourront être observés.

Les élèves pourront également observer en situation « la monotonie » des fonctions affines.

Ils pourront observer que l'on se rapproche de la solution lorsque l'écart entre les deux résultats tend vers 0. Cette notion d'écart peut être implémentée sur tableur pour aider les élèves dans leur recherche de la solution :



	A	B	C	D	E
1	x	26x+22	6x+149	"Ecart"	
2	3	100	167	67	
3	4	126	173	47	
4	5	152	179	27	
5	6	178	185	7	

La manipulation du tableur offre ici une nouvelle stratégie pour trouver la solution ou du moins s'en approcher. Les élèves doivent réfléchir sur les résultats obtenus par le logiciel afin de s'approcher de la solution.
Ils vont également se rendre compte de l'insuffisance des procédures utilisées, ce qui permettra de justifier pleinement la méthode experte de résolution des équations à travers ces problèmes.

L'insertion des formules dans le tableur facilite également la mise en équation du problème et la production d'expressions littérales.

e. Différentes phases

Durée approximative : 2h00

Phases	Rôle du professeur	Rôles de l’élève
Phase 1 : 10 min **Dévolution du problème**	Demander aux élèves de lire l’énoncé, en priorité les problèmes 1 et 2. (car le reste est identique) *Avez-vous compris le problème ? Quels sont les mots que vous ne comprenez-pas ?* Bien dire aux élèves qu’ils ont droit à tous les supports (papier, calculatrice, informatique…) à condition de remplir le questionnaire Eventuellement, le professeur peut donner un exemple similaire aux problèmes 1 et 2 en faisant participer les élèves pour faciliter la compréhension.	Lire l’énoncé Poser des questions concernant la compréhension du sujet
Phase 2 : 20 min **Recherche individuelle**	Observer les réponses d’élèves Inciter les élèves à laisser des traces de tous leurs essais.	Débuter la résolution du problème sous forme d’une narration de recherche. Les élèves peuvent utiliser l’outil informatique si besoin est.
Phase 3 : 35 min **Travail de groupe**	Observer les différentes stratégies adoptées dans chaque groupe Laisser les groupes plus autonomes Proposer des aides (voir ci-dessous) si les élèves bloquent et avec parcimonie	Echanger, discuter des diverses solution, stratégies. Bâtir une solution commune dont le but est de convaincre les autres groupes Choisir un porte-parole pour la phase de débat Utilisation éventuelle de l’outil informatique
Phase 4 : 35 min **Plénière de régulation** **Mise en commun des diverses méthodes sur les problèmes 1, 2 et 3.**	Le professeur orchestre le débat et recense les diverses procédures utilisées dans chaque problème. Il est important également de comparer l’efficacité de chaque procédure en commençant par la moins efficace (***mais tout en valorisant chaque méthode***)	Participer au débat Exposer leur démarche.

Phase 5 : 20 min **Relance de la recherche des problèmes 3 et 4 en travail de groupe.**	Le professeur, à partir des méthodes recensées ou suggérées (notamment avec « l'écart » et l'outil instrumenté) pourra relancer la recherche	Utilisation de l'outil instrumenté (calculatrice, tableur) et de raisonnements divers (dichotomie…) afin de tenter de trouver les solutions.
Phase 6 : 25 min **Mise en commun des productions – Débat**	Prendre les photos des productions et les visualiser via un vidéo-projecteur Orchestrer le débat en agençant dans un ordre précis les diverses productions Illustration avec le tableur. Le professeur doit bien poser les questions qui mettent en évidence les limites de l'outil instrumenté et l'intérêt d'une nouvelle méthode.	Ecouter les groupes Exprimer, décrire leurs solutions. Trouver les formules à insérer dans le tableur et expliquer comment arriver aux solutions.
Phase 7 : 25 min **Synthèse - Solution**	Introduction du vocabulaire lié aux équations (solution, mise en équation…) Recenser toutes les méthodes, les avantages et leurs limites.	Participer à l'animation du professeur Ecrire ce qu'ils ont retenu de l'activité

Remarque :
Le document ressource sur la « *mise en œuvre d'une tâche complexe* » sur le site académique de la Réunion détaille également toutes ces phases, la gestion du débat…
http://maths.ac-reunion.fr/College/Socle-commun/Mise-en-oeuvre-gestion-et

f. Blocage et aides éventuelles

Cette partie est fondamentale : Tous les groupes ne vont pas forcément aboutir à la solution. Certains vont bloquer.

Il est fondamental de réfléchir sur ces éventuels blocages et d'anticiper des questions permettant d'aider les élèves à avancer sans pour autant leur donner la démarche de résolution.

Les aides doivent dont être formulées sous forme de questions, en permettant toujours **une réflexion de la part de l'élève**.

Elles doivent être différenciées suivant l'interlocuteur et délivrées avec parcimonie en essayant le plus possible de ne pas induire la démarche de résolution et favoriser ainsi la réflexion, l'autonomie et l'initiative.

Le professeur a donc en sa possession une liste de questions qu'il va pouvoir utiliser **de manière différenciée en fonction de son interlocuteur**.

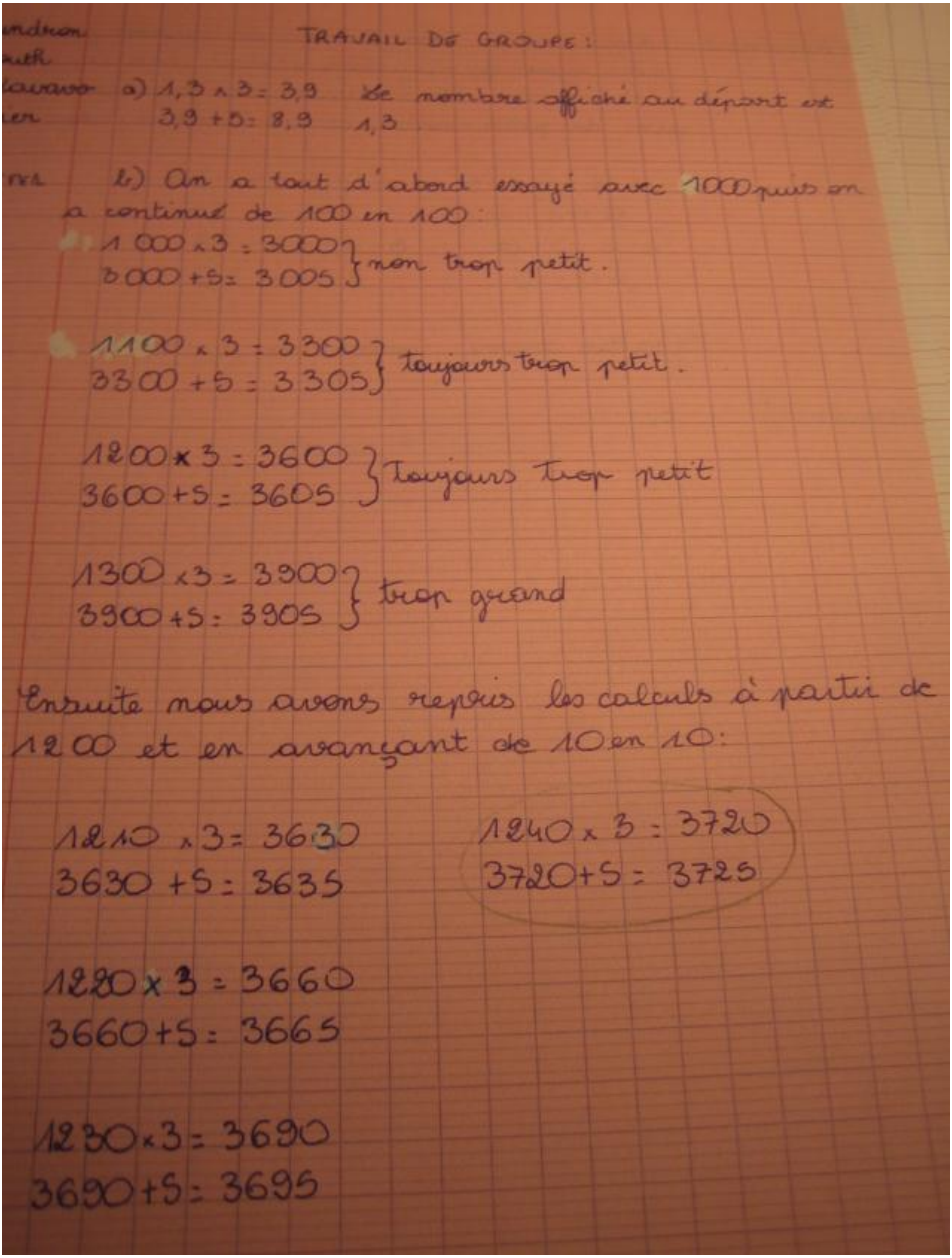
Afin de former les élèves à **des compétences transversales, créer des méthodologies**, le professeur peut demander aux élèves de noter l'aide du professeur ou il peut également faire coller sur la production de l'élève des bandelettes en papier où figurent les questions (elles auront été préparées à l'avance).

- Des élèves peuvent ne pas comprendre les consignes…
  Des aides sur la capacité C1 : « extraire l'information utile » permet à beaucoup d'élèves d'entrer dans le sujet (*comme préconisé par le document ressource EDUSCOL sur le Socle Commun en mathématiques sorti en mai 2011*).
    - Avez-vous compris la consigne ?
    - Quels sont les mots qui vous posent problème ?
- Des élèves peuvent avoir du mal à trouver une méthode pour répondre aux problèmes.
    - As-tu laissé des traces de tes essais ?
    - Quels sont tes résultats obtenus ? Quelles observations peux-tu faire ?
    - Quelle a été ta démarche ?
    - As-tu fait d'autres essais ?
    - Quels sont les différents nombres que tu connais ? Les as-tu tous essayés ?
    - Comment as-tu choisis tes nombres ? Que serait-il intéressant de faire ?
    - Comment organiser tes essais pour éviter de « tomber dessus au hasard » ?
    - Quel outil peux-tu utiliser pour faciliter les calculs ?
    - Quelles formules peux-tu insérer ?
    - Comment peut-on savoir si on « s'approche » du nombre cherché ou si on s'en éloigne ?

g. Analyse a posteriori

Vu qu'il y avait plusieurs problèmes et que la recherche a été assez longue, le professeur a effectué des **« allers-retours entre plénière et travail de groupe »** afin de mutualiser les méthodes et permettre à chacun d'avancer.

- ✓ ***Méthode essais-réajustements***



TRAVAIL DE GROUPE :

a) 1,3 × 3 = 3,9
3,9 + 5 = 8,9
Le nombre affiché au départ est 1,3

b) On a tout d'abord essayé avec 1000 puis on a continué de 100 en 100 :

1 000 × 3 = 3000
3 000 + 5 = 3 005
non trop petit.

1100 × 3 = 3 300
3300 + 5 = 3 305
toujours trop petit.

1200 × 3 = 3600
3600 + 5 = 3605
Toujours trop petit

1300 × 3 = 3900
3900 + 5 = 3905
trop grand

Ensuite nous avons repris les calculs à partir de 1200 et en avançant de 10 en 10 :

1210 × 3 = 3630
3630 + 5 = 3635

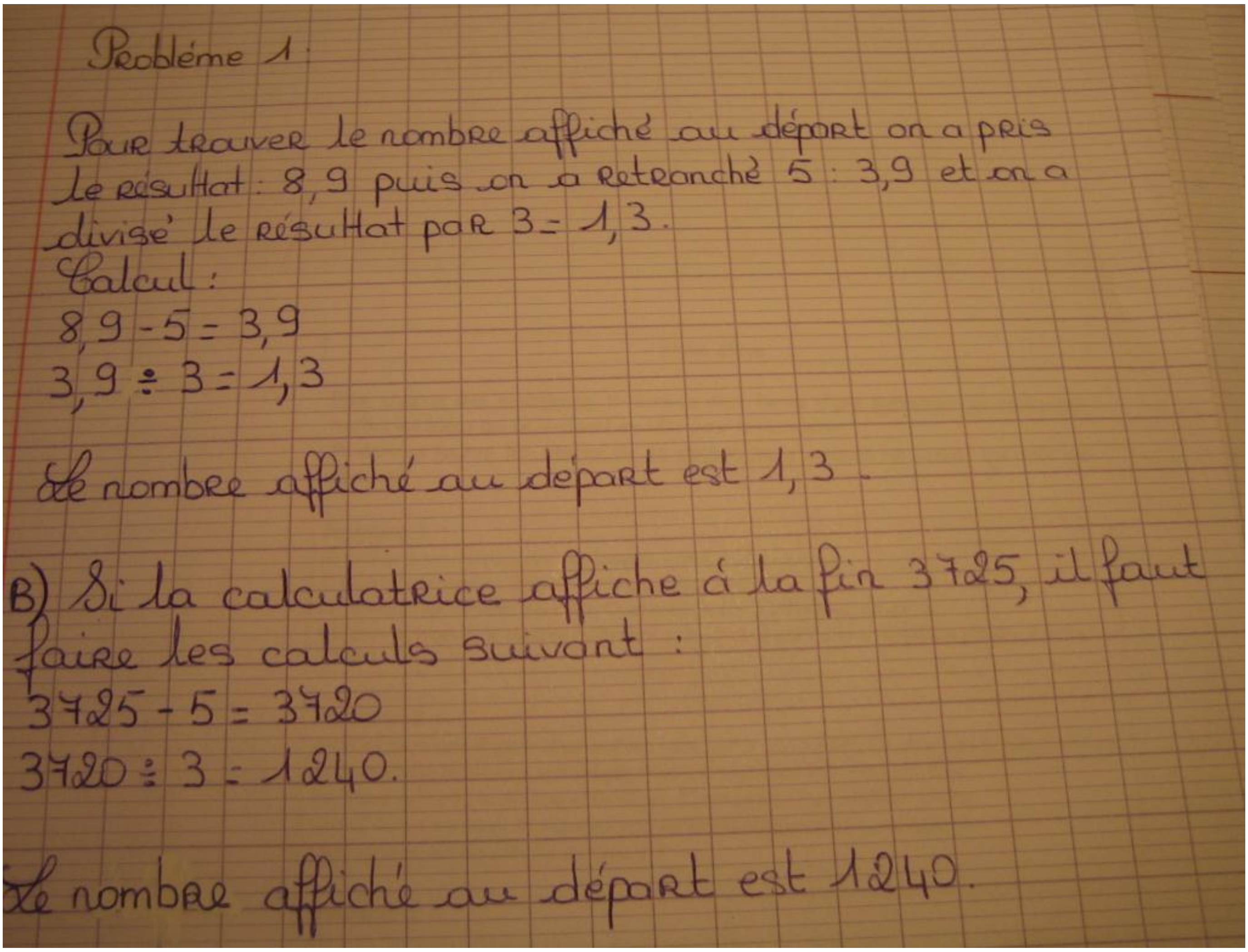
1220 × 3 = 3660
3660 + 5 = 3665

1230 × 3 = 3690
3690 + 5 = 3695

1240 × 3 = 3720
3720 + 5 = 3725

✓ ***Opérations inversibles***

Ces deux productions ont permis de comparer le type de présentation d'un calcul et de faire un rappel sur les règles de priorité.



Probléme 1 :

Pour trouver le nombre affiché au départ on a pris le résultat : 8,9 puis on a retranché 5 : 3,9 et on a divisé le résultat par 3 = 1,3.

Calcul :

8,9 - 5 = 3,9

3,9 ÷ 3 = 1,3

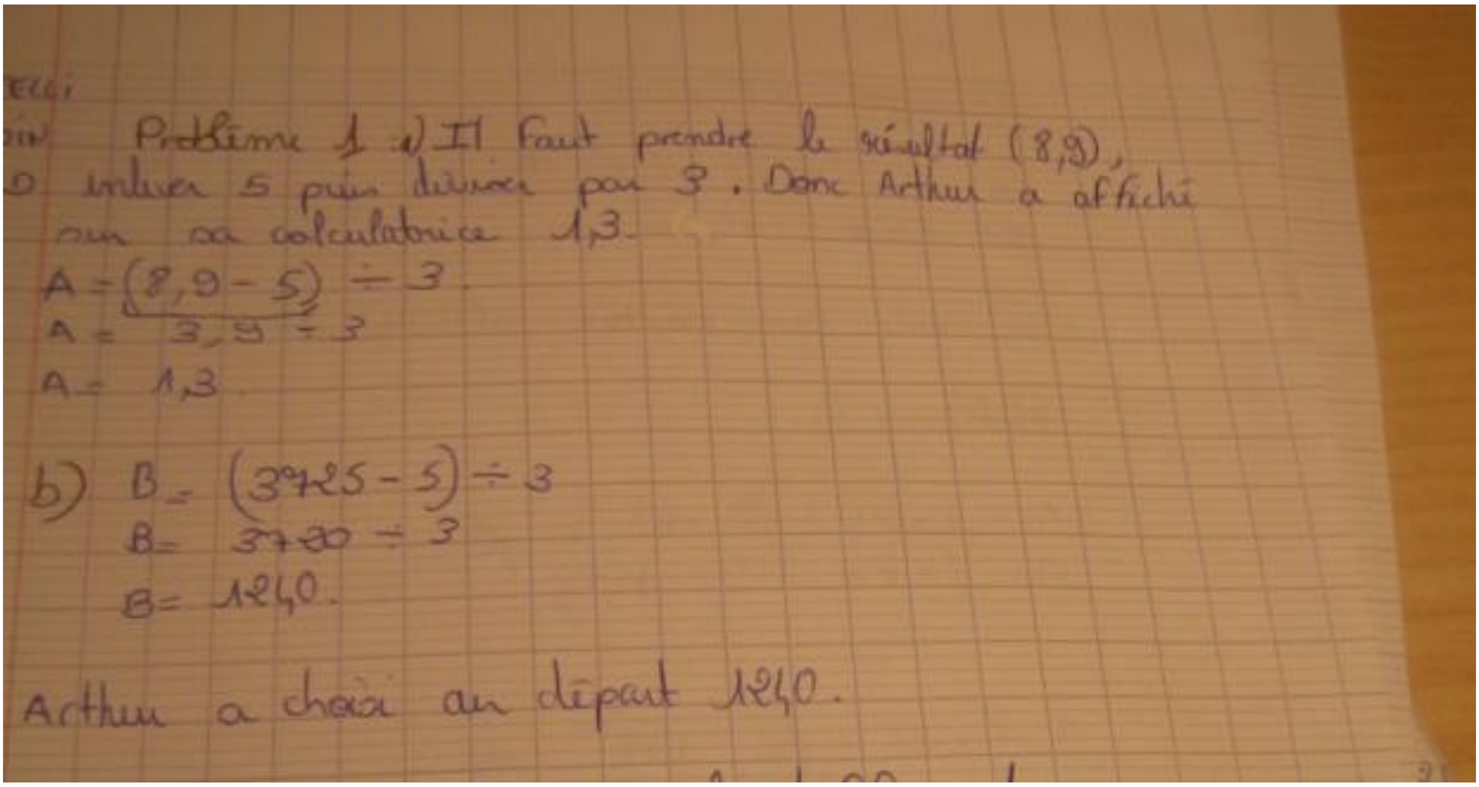
Le nombre affiché au départ est 1,3.

B) Si la calculatrice affiche à la fin 3725, il faut faire les calculs suivant :

3725 - 5 = 3720

3720 ÷ 3 = 1240.

Le nombre affiché au départ est 1240.



Problème 1 a) Il faut prendre le résultat (8,9), enlever 5 puis diviser par 3. Donc Arthur a affiché sur sa calculatrice 1,3.

A = (8,9 - 5) ÷ 3

A = 3,9 ÷ 3

A = 1,3

b) B = (3725 - 5) ÷ 3

B = 3720 ÷ 3

B = 1240.

Arthur a choisi au départ 1240.

✓ ***Vers la dichotomie – Encadrer la solution***

Problème 2 : On a pris le chiffre 1.

$A = 1 \times 5 - 1 = 4$

$B = 1 \times 3 + 2 = 5$.

On a remarqué que le résultat obtenu par l'opératio
B est plus grand que celui du A.
Donc on a pris le chiffre 2.

$A = 2 \times 5 - 1 = 9$

$B = 2 \times 3 + 2 = 8$

On a remarqué que le résultat obtenu par l'opérat
A est plus grand que l'opération B.
Donc il faut prendre un chiffre compris entre 1 et
On que c'est un nombre décimale.

Problème 3 :

$A = 1 \times 26 + 22 = 48$
$B = 1 \times 6 + 149 = 155$ $\neq$

$A = 6 \times 26 + 22 = 178$
$B = 6 \times 6 + 149 = 185$ $\neq$

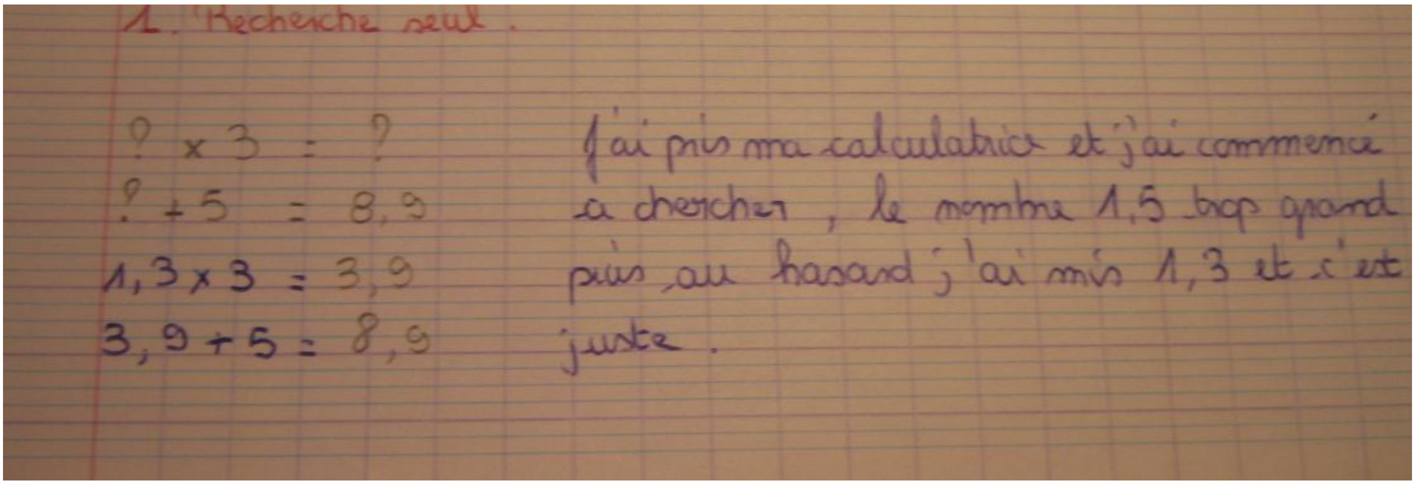
$A = 10 \times 26 + 22 = 282$ $\neq$

Donc le nombre est compris entre 6 et 10

Après avoir commenté cette solution, cela a été l'occasion d'introduire le tableur avec la méthode liée à l'écart présentée dans les objectifs. Les élèves n'avaient pas à l'époque de tableur à leur disposition mais ont fait rapidement les essais à l'aide de leur calculatrice.

- ✓ ***Vers la mise en équation – Développer les capacités liées au calcul littéral***

Cette production a permis d'aborder la notion d'inconnue.

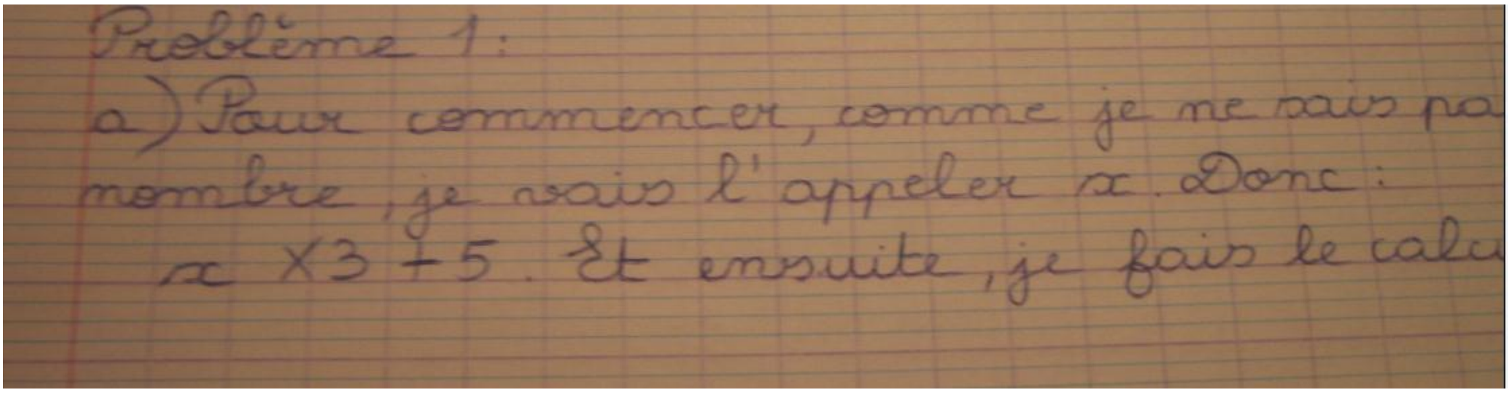


1. Recherche seul.

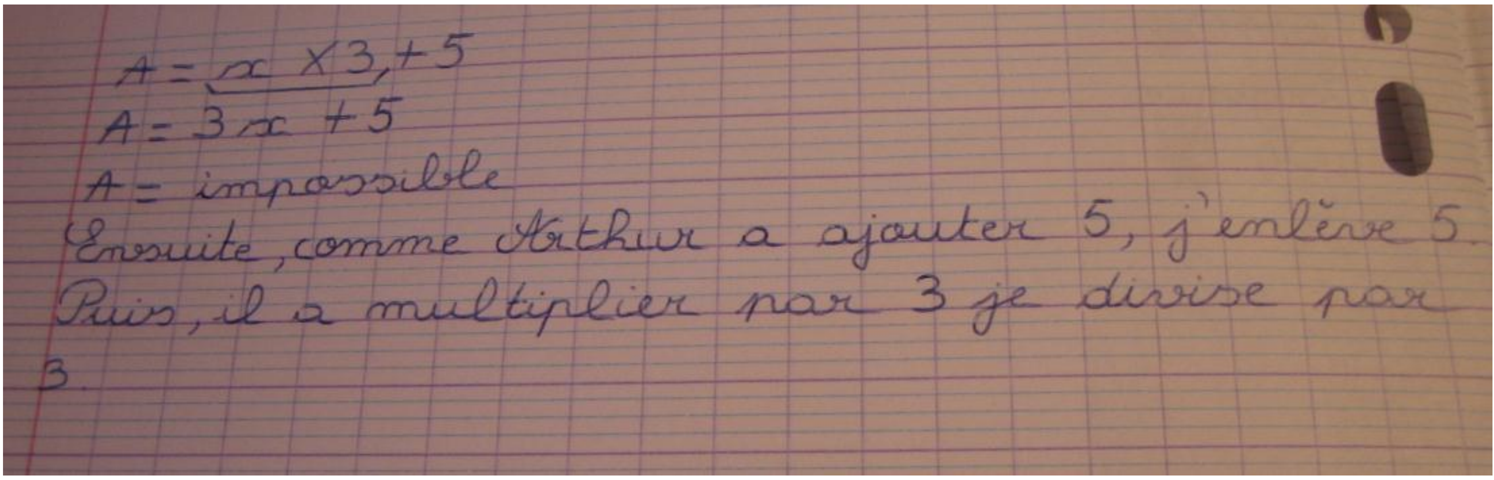
? x 3 = ?
? + 5 = 8,9
1,3 x 3 = 3,9
3,9 + 5 = 8,9

J'ai pris ma calculatrice et j'ai commencé à chercher, le nombre 1,5 trop grand puis au hasard j'ai mis 1,3 et c'est juste.

Retour sur la production d'expressions littérales.



Problème 1 :
a) Pour commencer, comme je ne sais pa
nombre, je vais l'appeler x. Donc :
x X3 + 5. Et ensuite, je fais le calc



A = x X 3, + 5
A = 3x + 5
A = impossible
Ensuite, comme Arthur a ajouter 5, j'enlève 5.
Puis, il a multiplier par 3 je divise par 3.

Développer les capacités de contrôle.

Pour vérifier !

$1240 \times 3 = 3720$

$3720 + 5 = 3725$

Mise en équation du problème.

Pour Alice nombre inconnu x donc :

$x \times 5 \rightarrow 5x - 1 = y$

on peut traduire comme une equation sauf qu'il y a un petit probleme je ne sais plus faire d'equation.

y egale $5x - 1$ et inversement.

Pour Bertrant

$x \times 3 \rightarrow 3x + 2 \Rightarrow y$

Voici le 2 calcul

$5x - 1 = y$ donc ce calcul est egal $3x + 2 = y$