$$\boxed{M \in [AB] \text{ ssi } \left[\begin{array}{l} \exists t \in [0\,;1], \\ M \text{ Barycentre de } A(t), B(1-t) \end{array}\right.}$$

(1) $\Longleftrightarrow$ (2)

- **Condition suffisante** (2) $\Longrightarrow$ (1)

Supposons qu'il existe t de l'intervalle $[0\,;1]$ tel que M soit barycentre de $A(t)$, $B(1-t)$.

D'après la pté fondamentale du barycentre, on a :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad t\,\vec{PA} + (1-t)\,\vec{PB} = \underbrace{(t+1-t)}_{1}\,\vec{PM}$$

En mettant P en A, on obtient :

$$(1-t)\,\vec{AB} = 1\,\vec{AM} \quad \text{càd} \quad \vec{AM} = (1-t)\,\vec{AB}$$

mais comme $t \in [0\,;1]$: $0 \leq t \leq 1$

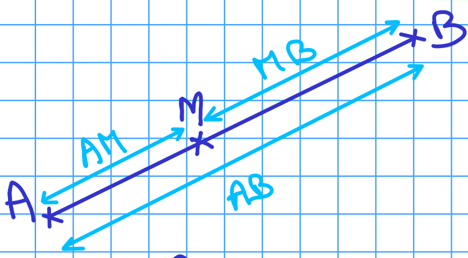
$$-1 \leq -t \leq 0$$

$$0 \leq 1-t \leq 1$$

d'où $1-t \in [0\,;1]$

Et finalement $M \in [AB]$.

- **Condition nécessaire** (1) $\Longrightarrow$ (2)



$M \in [AB]$. On a :

$$\vec{AM} = \frac{AM}{AB}\,\vec{AB} \qquad (*)$$

On a : $MA + MB = AB$ donc $\dfrac{MA}{AB} + \dfrac{MB}{AB} = 1$

$\boxed{\text{Posons } t = \dfrac{MB}{AB}}$ $t \in [0\,;1]$ puisque $M \in [AB]$ et $\dfrac{MA}{AB} = 1-t$

$(*)$ s'écrit alors : $\vec{AM} = (1-t)\,\vec{AB}$

$$\vec{AM} - (1-t)\,\vec{AB} = \vec{0}$$

$$(t+1-t)\,\vec{AM} - (1-t)\,\vec{A\overset{M}{\wedge}B} = \vec{0}$$

$$t\,\vec{AM} + \cancel{(1-t)\,\vec{AM}} - \cancel{(1-t)\,\vec{AM}} - (1-t)\,\vec{MB} = \vec{0}$$

$$t\,\vec{MA} + (1-t)\,\vec{MB} = \vec{0}$$

Finalement,

M est barycentre de $A(t)$, $B(1-t)$.