Méthode d'approximation des nombres métalliques

Pour comprendre la démarche qui va me permettre d'approximer les nombres métalliques, il faut repartir dans l'histoire des mathématiques à la découverte du nombre d'or, au travers d'Euclide et de Fibonacci :

- **Le nombre d'or est défini par Euclide comme un segment coupé de "manière harmonieuse", ce qui correspond à des proportions d'auto similaires.**

Le nombre d'or est donc le résultat du partage d'un segment en deux parties a et b vérifiant :

$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ = Φ , **le nombre d'or**

- **l'algèbre a permis de déterminer l'équation caractéristique du nombre d'or.**

Le nombre d'or est la racine positive de l'équation caractéristique du nombre d'or , $\boxed{x^2 = x+1}$

- **La suite de Fibonacci permet d'approximer le nombre d'or.**

* La suite de Fibonacci associée au nombre d'or est donc définie par :

$U_0 = 0$; $U_1 = 1$ et par la relation de récurence $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$

ce qui correspond à la suite de nombres **0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 etc.**

* la suite de Fibonacci permet d'approximer le nombre d'or grâce à une propriété qui est $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi$

On trouve : $\Phi \approx 1{,}618033988749$, *proportion qui fut utilisée par Léonard de Vinci.*

- **Le nombre d'or correspond également à la fraction continue :** $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}}$

Pour découvrir les nombres métalliques suivants , je reprendrai l'harmonie d'Euclide,
j'utiliserai l'agèbre pour retrouver leurs équations caractéristiques,
puis j'utiliserai leurs équations caractéristiques pour trouver leurs suites associées.
Enfin, grâce à ces suites associées, j'approximerai ces nombres métalliques .

Chaque nombre métallique est la racine positive de l'équation caractéristique $x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots x^2 + x + 1$.

Le 2° nombre métallique est le nombre d'argent, noté γ_{Ag} , correspond à l'équation de degré 3

J'ai utilisé la table de Mandéliev pour nommer les nombres métalliques suivants:

Le 3° nombre métallique est le nombre de cuivre noté γ_{Cu} ;correspond à l'équation de degré 4
Le 4° nombre métallique est le nombre de nickel, noté γ_{Ni} , correspond à l'équation de degré 5
Le 5° nombre métallique est le nombre de cobalt, noté γ_{Co} , correspond à l'équation de degré 6
Le 6° nombre métallique est le nombre de fer, noté γ_{Fe} , correspond à l'équation de degré 7
Le 7° nombre métallique est le nombre de manganèse, noté γ_{Ma} , correspond à l'équation de degré 8
Le 8° nombre métallique est le nombre de chrome, noté γ_{Cr} , correspond à l'équation de degré 9.
Le 8° nombre métallique est le nombre de vanadium, noté γ_{Va} , correspond à l'équation de degré 10
Le 10° nombre métallique est le nombre de titane, noté γ_{Ti} , correspond à l'équation de degré 11.

Titane 22 **Ti** 47,867 (1)	Vanadium 23 **V** 50,9415 (1)	Chrome 24 **Cr** 51,9961 (6)	Manganèse 25 **Mn** 54,938044	Fer 26 **Fe** 55,845 (2)	Cobalt 27 **Co** 58,933194	Nickel 28 **Ni** 58,6934 (4)	Cuivre 29 **Cu** 63,546 (3)	Zinc 30 **Zn** 65,38 (2)
Zirconium 40 **Zr** 91,224 (2)	Niobium 41 **Nb** 92,90637	Molybdène 42 **Mo** 95,95 (1)	Technétium 43 **Tc** [98]	Ruthénium 44 **Ru** 101,07 (2)	Rhodium 45 **Rh** 102,90550	Palladium 46 **Pd** 106,42 (1)	Argent 47 **Ag** 107,8682 (2)	Cadmium 48 **Cd** 112,414 (4)
Hafnium 72 **Hf** 178,49 (2)	Tantale 73 **Ta** 180,94788	Tungstène 74 **W** 183,84 (1)	Rhénium 75 **Re** 186,207 (1)	Osmium 76 **Os** 190,23 (3)	Iridium 77 **Ir** 192,217 (3)	Platine 78 **Pt** 195,084 (9)	Or 79 **Au** 196,966569	Mercure 80 **Hg** 200,592 (3)

NIVEAU 2 : Approximation du nombre d'or, noté Φ

I. Le nombre d'or : Entre construction et algèbre du nombre d'or Φ

a) Définition euclidienne :

Dans son livre des éléments, Euclide évoque la propriété permettant « le partage d'un segment en extrême et moyenne raison ».
Le nombre d'or est donc le résultat du partage d'un segment en deux parties a et b vérifiant :

$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \Phi$, le nombre d'or

b) Définition analytique du nombre d'or :

Comme le nombre d'or vérifie : $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$, on obtient $a^2 = b(a+b)$ soit $a^2 = b^2 + ab$.

En divisant par b^2 , on obtient : $\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} + \frac{ab}{b^2}$ soit $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} + 1\cdot$.

On effectue alors le changement de variable $\boldsymbol{x = \frac{a}{b}}$ et on obtient l'équation $\boxed{x^2 = x+1}$.

L'équation caractéristique du nombre d'or est donc $\boxed{x^2 = x+1}$, c'est une équation de degré 2.

dont la racine positive est $\boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, appelée le nombre d'or et noté Φ (phi) , en souvenir de Philéas.

II. Découverte de la suite associée au nombre d'or , nommée suite de Fibonacci :

Fibonacci à découvert une suite approximant le nombre d'or. Le nombre d'or vérifie $\boxed{x^2 = x+1}$,
en multipliant par x , on obtient : $x^3 = x^2 + x$, on remplace x^2 par $x+1$, on a $x^3 = x+1+1$
d'où $\boxed{x^3 = 2x+1}$

- On multiple l'équation par x , on a $x^4 = 2x^2 + x$ donc en remplaçant et x^2 par $x+1$,
  On obtient $x^4 = 2(x+1)+x$ donc $\boxed{x^4 = 3x+2}$.

On recommence le même procédé , on obtient $x^5 = 3x^2 + 2x$ donc $x^5 = 3(x+1)+2x$ donc $\boxed{x^5 = 5x+3}$

- De fil en aiguille, on a $\boxed{x^2 = x+1}$; $\boxed{x^3 = 2x+1}$; $\boxed{x^4 = 3x+1}$; $\boxed{x^5 = 5x+3}$; $\boxed{x^6 = 8x+5}$; $\boxed{x^6 = 13x+8}$

En résumé, on a donc:

$\boxed{x^2 = x+1}$
$\boxed{x^3 = 2x+1}$
$\boxed{x^4 = 3x+2}$
$\boxed{x^5 = 5x+3}$
$\boxed{x^6 = 8x+5}$
$\boxed{x^6 = 13x+8}$

En prenant les coefficients des termes en x , on obtient la suite de Fibonacci :

1 2 - 3 5 8 13 21 34 etc.

On a bien , à partir du 3° terme,

3= 2+1 ; 5= 3+2 ; 8= 5+3 ; 13 = 8 + 5 ....

La suite (Un) de Fibonacci est donc définie afin de respecter la relation $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$.

On peut déterminer les premiers termes en remarquant que 2 =1+ **<u>1</u>** et 1 =1 + **<u>0</u>.**
On ajoute alors 0 et 1 comme premiers termes de la suite,

On obtient alors la suite de Fibonaccci : **0 1 - 1 2 3 5 8 13 21 34 ... etc...**

Suite de Fibonacci : **0 1 - 1 2 3 5 8 13 21 34 ... etc...**

La suite de Fibonacci associée au nombre d'or est donc définie par :

$U_0 = 0$; $U_1 = 1$ et par la relation de récurence : pour tout $n \geqslant 0$ **, on a:** $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$

La suite (Un) de Fibonacci a permis d'approximer le nombre d'or Φ , car cette suite à la propriété suivante: $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi$

On trouve : $\Phi \approx 1{,}6180339887499$ *, proportion qui fut utilisée par Léonard de Vinci.*

<u>Approximation du nombre d'or, Φ, par la suite de Fibonacci à l'aide d'un tableur :</u>

		APPROXIMATION DU NOMBRE D'OR PAR LA SUITE DE FIBONACCI :		
u(0) =	0	définie par : u(0) = 0 , u(1) = 1 et u(n+2) = u(n+1) + u(n) pour tout entier n		
u(1) =	1	valeur approchée		
u(2) =	1	du nombre d'or	décimale	apparition de la
u(3) =	2		Identique 2 x	nième décimale
u(4) =	3	1,50000000000000		1
u(5) =	5	1,66666666666670	1	1,6
u(6) =	8	1,60000000000000	1,6	
u(7) =	13	1,62500000000000		
u(8) =	21	1,61538461538460		1,61
u(9) =	34	1,61904761904760	1,61	
u(10) =	55	1,61764705882353 0		
u(11) =	89	1,61818181818182 0	1	1,618
u(12) =	144	1,61797752808989 0		
u(13) =	233	1,61805555555556 0		1,6180
u(14) =	377	1,61802575107296 0	1,6180	
u(15) =	610	1,61803713527851 0		1,61803
u(16) =	987	1,61803278688525 0		
u(17) =	1597	1,61803444782168 0	à finir ...	
u(18) =	2584	1,61803381340013 0		1,618033
u(19) =	4181	1,61803405572755 0		
u(20) =	6765	1,61803396316671 0		1,6180339
u(21) =	10946	1,61803399852180 0		
u(22) =	17711	1,61803398501736 0		1,61803398
u(23) =	28657	1,61803399017560 0		
u(24) =	46368	1,61803398820533 0		1,618033988
u(25) =	75025	1,61803398895790 0		
u(26) =	121393	1,61803398867044 0		
u(27) =	196418	1,61803398878024 0		1,6180339887
u(28) =	317811	1,61803398873830 0		
u(29) =	514229	1,61803398875432 0		
u(30) =	832040	1,61803398874820 0		1,61803398874
u(31) =	1346269	1,61803398875054 0		
u(32) =	2178309	1,61803398874965 0		1,618033988749
u(33) =	3524578	1,61803398874999 0		
u(34) =	5702887	1,61803398874986 0		
u(35) =	9227465	1,61803398874991 0		
u(36) =	14930352	1,61803398874989 0		
u(37) =	24157817	1,61803398874990 0		
u(38) =	39088169	1,61803398874989 0		
u(39) =	63245986	1,61803398874990 0		1,6180339887499
u(40) =	102334155	1,61803398874989 0		
u(41) =	165580141	1,61803398874990 0	calcul limité	
u(42) =	267914296	1,61803398874990 0		
u(43) =	433494437	1,61803398874990 0		
u(44) =	701408733	1,61803398874990 0		
u(45) =	1134903170	1,61803398874990 0		
u(46) =	1836311903	1,61803398874990 0		
u(47) =	2971215073	1,61803398874990 0		
u(48) =	4807526976	1,61803398874990 0		
u(49) =	7778742049	1,61803398874990 0		
u(50) =	12586269025	1,61803398874990 0		
u(51) =	20365011074	1,61803398874990 0		

on obtient une approximation
du nombre d'or qui est à 10^-13 près :
1,6180339887499

NIVEAU 3 **: Approximation du nombre d'argent , noté $\mathcal{Y}_{ag}$**

I. Le nombre d'argent : Entre construction et algèbre du nombre d'argent $\mathcal{Y}_{ag}$

a. Définition euclidienne du nombre d'argent :

Le nombre d'argent serait le rapport obtenu en découpant d'une certaine manière un segment en trois parties de manière « harmonieuse ».

Chaque partie étant plus petite que l'autre et vérifiant la relation : $\boxed{\dfrac{a+b+c}{a}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}} = \mathcal{Y}_{ag}$

où $\mathcal{Y}_{ag}$ est appelé le nombre d'argent.

b. Définition analytique du nombre d'argent :

Comme le nombre d'argent vérifie l'égalité: $\boxed{\dfrac{a+b+c}{a}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}}$ Or la dernière égalité : $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ donc $\boxed{c=\dfrac{b^2}{a}}$

$\dfrac{a+b+c}{a}=\dfrac{a}{b}$ si $1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}=\dfrac{a}{b}$ **on remplace c par** $\boldsymbol{\dfrac{b^2}{a}}$ et on obtient $1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{\frac{b^2}{a}}{a}=\dfrac{a}{b}$ puis $1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{a}{b}$.

On multiplie par $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$ et on obtient $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\dfrac{b}{a}+\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\dfrac{b^2}{a^2}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\dfrac{a}{b}$ donc $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\dfrac{a}{b}+1=\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$.

On effectue alors le changement de variable $\boldsymbol{x=\dfrac{a}{b}}$ et on obtient l'équation $\boxed{x^3=x^2+x+1}$

On définit alors le nombre d'argent $\mathcal{Y}_{ag}$ comme étant la racine positive de l'équation $\boxed{x^3=x^2+x+1}$

Après moult difficultés, on a fini par trouver que $\mathcal{Y}_{ag}=\dfrac{\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}+1}{3}$

II. Découverte de la suite associée au nombre d'argent , nommée suite de tribonacci :

Le nombre d'argent est solution de l'équation $\boxed{x^3=x^2+x+1}$. Nous allons procéder à la même méthode que Fibonacci pour trouver cette suite.

- On multiplie cette équation par x , on obtient $x^4=x^3+x^2+x$,

- puis **on remplace** x^3 par x^2+x+1 , on obtient $x^4=x^2+x+1+x^2+x$ soit $\boxed{x^4=2x^2+2x+1}$

- On recommence le procédé, on obtient $x^5=2x^3+2x^2+x$, puis on obtient $\boxed{x^5=4x^2+3x+2}$

De même $x^6=4x^3+3x^2+2x$, on obtient $\boxed{x^6=7x^3+6x+4}$

On obtient $\boxed{x^7=13x^2+11x+7}$; $\boxed{x^8=24x^2+20x+13}$; $\boxed{x^9=44x^2+37x+24}$; $\boxed{x^{10}=81x^2+68x+44}$

En résumé, on a donc:

$\boxed{x^3=x^2+x+1}$
$\boxed{x^4=2x^2+2x+1}$
$\boxed{x^5=4x^2+3x+2}$
$\boxed{x^6=7x^3+6x+4}$
$\boxed{x^7=13x^2+11x+7}$
$\boxed{x^8=24x^2+20x+13}$
$\boxed{x^9=44x^2+37x+24}$
$\boxed{x^{10}=81x^2+68x+44}$

En prenant les coefficients des termes en x , on obtient la suite de tribonacci :

1 2 4 - 7 13 24 44 , 81 etc.

On a bien , à partir du 4° terme, 7= 4+2+1 ; 13= 7+4+2 ; 24= 13+7+4 , etc .....

- En prenant les coefficients de chaque terme en x^2 , on obtient ***la suite de tribonacci :***

1 2 4 7 13 24 44 , 81 etc. On remarque qu'à partir du 3° terme, 7 = 4 + 2 + 1 ; 13 = 7 + 4 + 2, etc..

- Or 1+1+2 = 4 et 0+1+1 = 2 . On ajoute 0 et 1 comme premiers termes ,

On obtient alors la suite de tribonacci : 0 1 1 2 4 7 13 24 44 , 81 etc.

Suite de tribonacci :   0   1   1 - 2   4   7   13   24   44 , 81 etc.

La suite de tribonnacci associée au nombre d'argent est donc définie par :
$U_0 = 0$; $U_1 = 1$; $U_2 = 1$ et, à partir de $n \geqslant 0$ ***par la relation :*** $\boxed{U_{n+3} = U_{n+2} + U_{n+1} + U_n}$

La suite de Fibonacci a permis d'approximer le nombre d'or ϕ , car cette suite à la propriété $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi$

La suite de tribonacci permettra donc d'approximer le nombre d'argent γ_{ag} **car** $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \gamma_{Ag}$

On trouve une approximation du nombre d'argent $\boldsymbol{\gamma_{ag} \approx 1{,}839286755\ldots}$ ce qui correspond à sa valeur exacte .

Approximation du nombre d'argent γ_{ag} par la suite de tribonacci à l'aide d'un tableur :

APPROXIMATION DU NOMBRE D'ARGENT PAR LA SUITE DE TRIBONACCI :
définie par: u(0)=0, u(1)=1, u(2)=1 et u(n+3) = u(n+2) + u(n+1) + u(n)

		valeur approchée du nombre d'argent	décimale Identique 2 x	apparition de la nième décimale
u(0) =	0			
u(1) =	1			
u(2) =	1			
u(3) =	2			
u(4) =	4	2,000000000000000		
u(5) =	7	1,750000000000000		1
u(6) =	13	1,857142857142860		1,8
u(7) =	24	1,846153846153850	1,8	
u(8) =	44	1,833333333333330		
u(9) =	81	1,840909090909090		
u(10) =	149	1,839506172839510		1,83
u(11) =	274	1,838926174496640	1,83	
u(12) =	504	1,839416058394160		1,839
u(13) =	927	1,839285714285710	1,839	1,8392
u(14) =	1705	1,839266450916940	1,8392	
u(15) =	3136	1,839296187683280		
u(16) =	5768	1,839285714285710		1,83928
u(17) =	10609	1,839285714285710	1,8392857 !!	Etrange !!
u(18) =	19513	1,839287397492690		
u(19) =	35890	1,839286629426540		1,839286
u(20) =	66012	1,839286709389800	1,839286	1,8392867
u(21) =	121415	1,839286796340060	1,839287	
u(22) =	223317	1,839286743812540		
u(23) =	410744	1,839286753807370		1,83928675
u(24) =	755476	1,839286757688490	1,83928675	
u(25) =	1389537	1,839286754311190		
u(26) =	2555757	1,839286755228540		1,839286755
u(27) =	4700770	1,839286755352720	1,839286755	
u(28) =	8646064	1,839286755148620		
u(29) =	15902591	1,839286755221800		1,8392867552
u(30) =	29249425	1,839286755221210	1,8392867552	
u(31) =	53798080	1,839286755209720		
u(32) =	98950096	1,839286755215060		1,83928675521
u(33) =	181997601	1,839286755214470	1,83928675521	1,839286755214
u(34) =	334745777	1,839286755213880		
u(35) =	615693474	1,839286755214240		
u(36) =	1132436852	1,839286755214170	1,839286755214	
u(37) =	2082876103	1,839286755214140		
u(38) =	3831006429	1,839286755214170		
u(39) =	7046319384	1,839286755214160		1,8392867552146
u(40) =	12960201916	1,839286755214160	1,8392867552146	
u(41) =	23837527729	1,839286755214160	calcul limité	
u(42) =	43844049029	1,839286755214160		
u(43) =	80641778674	1,839286755214160		
u(44) =	148323355432	1,839286755214160		
u(45) =	272809183135	1,839286755214160		
u(46) =	501774317241	1,839286755214160		
u(47) =	922906855808	1,839286755214160		
u(48) =	1697490356184	1,839286755214160		
u(49) =	3122171529233	1,839286755214160		
u(50) =	5742568741225	1,839286755214160		
u(51) =	1,0562231E+13	1,839286755214160		

on obtient une approximation
du nombre d'argent qui est à 10^-13 près :
1,8392867552146

NIVEAU 4 : Approximation du nombre de cuivre, noté γ_{cu}

I. Le nombre de cuivre : Entre construction et algèbre du nombre de cuivre γ_{cu}

a. Définition euclidienne du nombre de cuivre :

Le nombre de cuivre serait le rapport obtenu en découpant d'une certaine manière un segment en quatres parties de manière « harmonieuse ».

a b c d

Chaque partie étant plus petite que l'autre et vérifiant la relation : $\dfrac{a+b+c+d}{a} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d} = \gamma_{cu}$

où γ_{cu} est appelé le nombre de cuivre.

b. Définition analytique du nombre de cuivre :

$\dfrac{a+b+c+d}{a} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d}$ or $c = \dfrac{b^2}{a}$; $d = \dfrac{b^3}{a^2}$ et en faisant le changement de variable $x = \dfrac{a}{b}$,

on obtient l'équation $x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$

On definit donc le nombre de cuivre γ_{cu} comme étant la racine positive de l'équation $x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$

II. Découverte de la suite associée au nombre de cuivre , nommée suite de quartbonacci :

$x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$

$x^5 = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

$x^6 = 4x^3 + 4x^2 + 3x + 2$

$x^7 = 8x^3 + 7x^2 + 6x + 4$

$x^8 = 15x^3 + 14x^2 + 12x + 8$

$x^9 = 29x^3 + 27x^2 + 23x + 15$

- En prenant les coefficients de chaque terme en x^3 ,

on obtient *la suite de « quartbonacci »*

1 2 4 8 - 15 29 56 108 etc.

On a bien , à partir du 5° terme, 15= 8+4+2+1 ; 29= 15+8+4+2 etc...

APPROXIMATION DU NOMBRE DE CUIVRE PAR LA SUITE DE QUARTBONACCI :
définie par : u(0) = 0, u(1) = 1 , u(2) = 1 et u(3) = 2
et par la relation u(n+4) = u(n+3) + u(n+2) + u(n+1) + u(n) (pour tout entier n)

		valeur approchée du nombre de cuivre	décimale Identique 2 x	apparition de la nième décimale
u(0) =	0			
u(1) =	1			
u(2) =	1			
u(3) =	2			
u(4) =	4			
u(5) =	8	2,00000000000000		
u(6) =	15	2,00000000000000		
u(7) =	29	1,87500000000000		
u(8) =	56	1,93333333333330		
u(9) =	108	1,93103448275862 0		
u(10) =	208	1,92857142857143 0		
u(11) =	401	1,92592592592593 0		
u(12) =	773	1,92788461538462 0		
u(13) =	1490	1,92768079800499 0		
u(14) =	2872	1,92755498059508 0		
u(15) =	5536	1,92751677852349 0		
u(16) =	10671	1,92757660167131 0		
u(17) =	20569	1,92756502890173 0		
u(18) =	39648	1,92756067847437 0		
u(19) =	76424	1,92756089260538 0		
u(20) =	147312	1,92756255044391 0		
u(21) =	283953	1,92756202240134 0		
u(22) =	547337	1,92756190941675 0		
u(23) =	1055026	1,92756195567576 0		
u(24) =	2033628	1,92756199562609 0		
u(25) =	3919944	1,92756197477598 0		
u(26) =	7555935	1,92756197298621 0		
u(27) =	14564533	1,92756197537516 0		
u(28) =	28074040	1,92756197611546 0		
u(29) =	54114452	1,92756197538225 0		
u(30) =	104308960	1,92756197540504 0		
u(31) =	201061985	1,92756197549594 0		
u(32) =	387559437	1,92756197550047 0		
u(33) =	747044834	1,92756197547736 0		
u(34) =	1439975216	1,92756197548094 0		
u(35) =	2775641472	1,92756197548379 0		
u(36) =	5350220959	1,92756197548333 0		
u(37) =	10312882481	1,92756197548269 0		
u(38) =	19878720128	1,92756197548289 0		
u(39) =	38317465040	1,92756197548296 0		
u(40) =	73859288608	1,92756197548293 0		
u(41) =	142368356257	1,92756197548292 0		
u(42) =	274423830033	1,92756197548293 0	calcul limité	
u(43) =	528968939938	1,92756197548293 0		
u(44) =	1019620414836	1,92756197548293 0		
u(45) =	1965381541064	1,92756197548293 0		
u(46) =	3788394725871	1,92756197548293 0		
u(47) =	7302365621709	1,92756197548293 0		
u(48) =	1,4075762E+13	1,92756197548293 0		
u(49) =	2,7131904E+13	1,92756197548293 0		
u(50) =	5,2298427E+13	1,92756197548293 0		
u(51) =	1,0080846E+14	1,92756197548293 0		

on obtient une approximation
du nombre de cuivre qui est à 10^-13 près :
1,9275619754829

La suite de Quartbonacci correspondant à :

1 2 4 8 - 15 29 56 108 etc.

- Or 8 = 4 + 2 + 1 + 1 et 4 = 2 + 1 +1 + 0 ,

On ajoute 0 et 1 comme premiers termes ,

et on obtient **La suite de quartbonacci :**

0 1 1 2 - 4 8 - 15 29 56 108 etc...

La suite de quartbonacci associée

au nombre de cuivre est donc définie par :

$U_0 = 0$; $U_1 = 1$; $U_2 = 1$ et $U_3 = 2$,

et, à partir de $n \geqslant 0$ par la relation :

$U_{n+4} = U_{n+3} + U_{n+2} + U_{n+1} + U_n$

On trouve une approximation du nombre de cuivre

$\boldsymbol{\gamma_{cu} \approx 1{,}9275619754829}$

ce qui semble correspondre à la solution positive

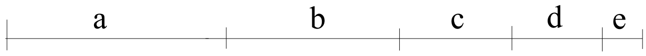
de $x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$.

NIVEAU 5 : **Approximation du nombre de nickel, noté γ_{ni}**

I. Le nombre de nickel : Entre construction et algèbre du nombre de nickel γ_{ni}

a. Définition euclidienne du nombre de nickel :

Le nombre de nickel serait le rapport obtenu en découpant d'une certaine manière un segment en cinq parties de manière « harmonieuse ».



Chaque partie étant plus petite que l'autre et vérifiant la relation : $\dfrac{a+b+c+d+e}{a} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{d}{e} = \gamma_{ni}$

où γ_{ni} est appelé le nombre de nickel.

b. Définition analytique du nombre de nickel :

$\dfrac{a+b+c+d+e}{a} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{d}{e}$ en prenant $c = \dfrac{b^2}{a}$ $d = \dfrac{b^3}{a^2}$ et $e = \dfrac{b^4}{a^3}$ puis avec un changement de variable $x = \dfrac{a}{b}$, on obtient l'équation $x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, équation caractéristique du nombre de nickel.

On definit donc le nombre de nickel γ_{ni} comme étant la racine positive de l'équation $x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

II. Découverte de la suite associée au nombre de nickel , nommée suite de quintebonacci :

$x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$x^6 = 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

$x^7 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 2$

$x^8 = 8x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 6x + 4$

$x^9 = 16x^4 + 15x^3 + 14x^2 + 12x + 8$

$x^{10} = 31x^4 + 30x^3 + 28x^2 + 24x + 16$

$x^{11} = 61x^4 + 59x^3 + 55x^2 + 47x + 31$

$x^{12} = 120x^4 + 116x^3 + 108x^2 + 92x + 61$

En prenant les coefficients des termes en x^4 ,
on obtient ce que j'appelle ***la suite de « quintebonacci »*** :

1 2 4 8 16 - 31 61 120 236 etc...

On remarque qu'à partir du 6° terme , 31 = 16+8+4+2+1 ; 61= 2+4+8+16+31 ; 120 = 61+31+16+8+4

On rajoute les premiers termes 0 et 1 :

0 1 1 2 4 8 16 31 61 120 236 etc...

La suite de Quintebonacci associée au nombre de nickel est donc définie par :

$U_0 = 0$; $U_1 = 1$; $U_2 = 1$ et $U_3 = 2$ et $U_4 = 4$,

à partir de $n \geqslant 0$ par :

$U_{n+5} = U_{n+4} + U_{n+3} + U_{n+2} + U_{n+1} + U_n$

				APPROXIMATION DU NOMBRE DE NICKEL PAR LA SUITE DE QUINTEBONACCI :		
u(	0	) =	0	définie par : u(0) = 0, u(1) = 1 , u(2) = 1, u(3) = 2 et u(4) = 4		
u(	1	) =	1	et par la relation u(n+5) = u(n+4) + u(n+3) + u(n+3) + u(n+1)+ u(n) (pour tout entier n)		
u(	2	) =	1	valeur approchée		
u(	3	) =	2	du nombre de nickel	décimale	apparition de la
u(	4	) =	4		Identique 2 x	nième décimale
u(	5	) =	8	2,00000000000000		
u(	6	) =	16	2,00000000000000		
u(	7	) =	31	2,00000000000000		
u(	8	) =	61	1,93750000000000		
u(	9	) =	120	1,96774193548370		
u(	10	) =	236	1,96721311475410		
u(	11	) =	464	1,96666666666670		
u(	12	) =	912	1,96610169491525		
u(	13	) =	1793	1,96551724137931		
u(	14	) =	3525	1,96600877192982		
u(	15	) =	6930	1,96597880646960		
u(	16	) =	13624	1,96595744680851		
u(	17	) =	26784	1,96594516594517		
u(	18	) =	52656	1,96594245449207		
u(	19	) =	103519	1,96594982078853		
u(	20	) =	203513	1,96594879975691		
u(	21	) =	400096	1,96594828002589		
u(	22	) =	786568	1,96594812125024		
u(	23	) =	1546352	1,96594817243861		
u(	24	) =	3040048	1,96594827147812		
u(	25	) =	5976577	1,96594824464288		
u(	26	) =	11749641	1,96594823502787		
u(	27	) =	23099186	1,96594823424847		
u(	28	) =	45411804	1,96594823620568		
u(	29	) =	89277256	1,96594823731018		
u(	30	) =	175514464	1,96594823671837		
u(	31	) =	345052351	1,96594823658111		
u(	32	) =	678355061	1,96594823660801		
u(	33	) =	1333610936	1,96594823664888		
u(	34	) =	2621810068	1,96594823665656		
u(	35	) =	5154342880	1,96594823664523		
u(	36	) =	10133171296	1,96594823664397		
u(	37	) =	19921290241	1,96594823664506		
u(	38	) =	39164225421	1,96594823664570		
u(	39	) =	76994839906	1,96594823664564		
u(	40	) =	151367869744	1,96594823664545		
u(	41	) =	297581396608	1,96594823664546		
u(	42	) =	585029621920	1,96594823664548	calcul limité	
u(	43	) =	1150137963599	1,96594823664549		
u(	44	) =	2261111681777	1,96594823664549		
u(	45	) =	4445228523648	1,96594823664548		
u(	46	) =	8739089177552	1,96594823664549		
u(	47	) =	1,7180597E+13	1,96594823664549		
u(	48	) =	3,3776164E+13	1,96594823664549		
u(	49	) =	6,6402191E+13	1,96594823664549		
u(	50	) =	1,3054327E+14	1,96594823664549		
u(	51	) =	2,5664131E+14	1,96594823664549		

on obtient une approximation
du nombre de nickel qui est à 10^-12 près :
1,965948236645 ..

On trouve une approximation du nombre de nickel

$\gamma_{ni} \approx$ **1,965948236645 ....**

ce qui semble correspondre à la solution positive de son équation caractéristique qui est
$x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

NIVEAU 6 : **Approximation du nombre de cobalt noté γ_{Co}**

I. Le nombre de cobalt : Entre construction et algèbre du nombre de cobalt , γ_{co}

a. Définition euclidienne du nombre de nickel :

Le nombre de cobalt serait le rapport obtenu en découpant d'une certaine manière un segment en six parties de manière « harmonieuse ».

a b c d e f

Chaque partie étant plus petite que l'autre et vérifiant : $\frac{a+b+c+d+e+f}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\frac{e}{f}=\gamma_{co}$

où γ_{co} est appelé le nombre de cobalt

b. Définition analytique du nombre du nombre de cobalt :

$\frac{a+b+c+d+e+f}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\frac{e}{f}$ on a : $c=\frac{b^2}{a}$ $d=\frac{b^3}{a^2}$ $e=\frac{b^4}{a^3}$ or $f=\frac{b^5}{a^4}$

On obtient l'équation $x^6=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ qui est l'équation caractéristique du nombre de cobalt.

On definit donc le nombre de cobalt γ_{co} comme étant la solution positive de l'équation $x^6=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

II. Découverte de la suite associée au nombre de cobalt, nommée suite de sixbonacci :

- Le nombre de cobalt est solution de l'équation $x^6=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.
- Nous allons procéder à la même méthode que Fibonacci pour trouver la suite associée à ce nombre.

On multiplie cette équation par x , et on remplace x^6 , on obtient

$x^6=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

$x^7=2x^5+2x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

$x^8=4x^5+4x^4+4x^3+4x^2+3x+2$

$x^9=8x^5+8x^4+8x^3+7x^2+6x+4$

$x^{10}=16x^5+16x^4+15x^3+14x^2+12x+8$

$x^{11}=32x^5+31x^4+30x^3+28x^2+24x+16$

$x^{12}=63x^5+62x^4+60x^3+56x^2+48x+32$

$x^{13}=125x^5+124x^4+120x^3+112x^2+96x+64$

suite de sixbonacci associée nombre de cobalt :

(0 1) 1 2 4 8 16 32 - 63 125 ……

63 = 32+16+8+4+2+1 ; 125 = 63+32+16+8+4+2 etc ..

La suite (Un) de sixbonacci est :

$U_0=0$; $U_1=1$; $U_2=1$; $U_3=2$,

$U_4=4$ et $U_5=8$

et à partir de $n\geqslant 0$ par la relation :

$U_{n+6}=U_{n+5}+U_{n+4}+U_{n+3}+U_{n+2}+U_{n+1}+U_n$

On obtient une approximation du nombre de cuivre

$\gamma_{Co}\approx$ **1,9835828434243…**

ce qui semble correspondre à la solution positive de son équation caractéristique qui est

$x^6=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

		APPROXIMATION DU NOMBRE DE COBALT PAR LA SUITE DE SIXTEBONACCI :		
u(0) =	0	définie par : u(0) =0, u(1) =1 , u(2) =1 et u(3) =2 u(4) =4 et u(6) = 8		
u(1) =	1	et par la relation u(n+6) = u(n+5) + u(n+4) + u(n+3) + u(n+3) + u(n+1)+ u(n) (pour tout entier n)		
u(2) =	1	valeur approchée		
u(3) =	2	du nombre de cobalt	décimale	apparition de la
u(4) =	4		Identique 2 x	nième décimale
u(5) =	8	2,000000000000000		
u(6) =	16	2,000000000000000		
u(7) =	32	2,000000000000000		
u(8) =	63	2,000000000000000		
u(9) =	125	1,968750000000000		
u(10) =	248	1,984126984126980		
u(11) =	492	1,984000000000000		
u(12) =	976	1,983870967741940		
u(13) =	1936	1,983739837398370		
u(14) =	3840	1,983606557377050		
u(15) =	7617	1,983471074380170		
u(16) =	15109	1,983593750000000		
u(17) =	29970	1,983589339635030		
u(18) =	59448	1,983585942153680		
u(19) =	117920	1,983583583583580		
u(20) =	233904	1,983582290405060		
u(21) =	463968	1,983582089552240		
u(22) =	920319	1,983583008413710		
u(23) =	1825529	1,983582919511690		
u(24) =	3621088	1,983582866375680		
u(25) =	7182728	1,983582840918990		
u(26) =	14247536	1,983582834772310		
u(27) =	28261168	1,983582839277780		
u(28) =	56058368	1,983582845482900		
u(29) =	111196417	1,983582844134400		
u(30) =	220567305	1,983582843510540		
u(31) =	437513522	1,983582843321290		
u(32) =	867844316	1,983582843341170		
u(33) =	1721441096	1,983582843412090		
u(34) =	3414621024	1,983582843446310		
u(35) =	6773183680	1,983582843429460		
u(36) =	13435170943	1,983582843423620		
u(37) =	26649774581	1,983582843422900		
u(38) =	52862035640	1,983582843423740		
u(39) =	104856226964	1,983582843424430		
u(40) =	207991012832	1,983582843424530		
u(41) =	412567404640	1,983582843424350		
u(42) =	818361625600	1,983582843424310	calcul limité	
u(43) =	1623288080257	1,983582843424310		
u(44) =	3219926385933	1,983582843424320		
u(45) =	6386990736226	1,983582843424330		
u(46) =	1,2669125E+13	1,983582843424330		
u(47) =	2,5130259E+13	1,983582843424330		
u(48) =	4,9847952E+13	1,983582843424330		
u(49) =	9,8877541E+13	1,983582843424330		
u(50) =	1,9613179E+14	1,983582843424330		
u(51) =	3,8904366E+14	1,983582843424330		

on obtient une approximation
du nombre de cobalt qui est à 10^-13 près :
1,9835828434243 ...

→ Observons les termes de plus grand degré des polynômes (qui sont les coefficients des suites associées)

Suite de Fibonacci et nombre d'or : **(0 1) - 1 2 3 5 8 13 etc ….**

$\boxed{x^2=x+1}$ $2^0 = 1$ → équation de degré 2 : équation caractéristique du nombre d'or Φ

$x^3=2x+1$ $2^1 = 2$
$x^4=3x+2$ 1+2 = 3
$x^5=5x+3$ 3+2 = 5
$x^6=8x+5$ 5+3 = 8

suite de Tribonacci et nombre d'argent : **(0 1) 1 - 2 4 7 13 etc …..**

$\boxed{x^3=x^2+x+1}$ $2^0 = 1$ → équation de degré 3 : équation caractéristique du nombre d'argent γ_{Ag}

$x^4=2x^2+2x+1$ $2^1 = 2$ coeff 1
$x^5=4x^2+3x+2$ $2^2 = 4$ coeff 3x+2
$x^6=7x^2+6x+4$ 1+2+4 = 7 coeff $7x^2+6x+4$ tous différents
$x^7=13x^2+11x+7$ 2+4+7 = 13

suite de Quartbonacci et nombre de cuivre: **(0 1) 1 2 - 4 8 15 29 etc …...**

$\boxed{x^4=x^3+x^2+x+1}$ $2^0 = 1$ → équation de degré 4 :équation caractéristique du nombre de cuivre γ_{Cu}

$x^5=2x^3+2x^2+2x+1$ $2^1 = 2$ coeff 1
$x^6=4x^3+4x^2+3x+2$ $2^2 = 4$ coeff 3x+2
$x^7=8x^3+7x^2+6x+4$ $2^3 = 8$ coeff $7x^2+6x+4$
$x^8=15x^3+14x^2+12x+8$ 1+2+4+8 = 15 coeff $15x^3+14x^2+12x+8$ tous différents
$x^9 = 29x^3+27x^2+23x+15$ 2+4+8+15 = 29

suite de Quintebonacci et nombre de nickel : **(0 1) 1 2 4 - 8 16 31 61 120 …...**

$\boxed{x^5=x^4+x^3+x^2+x+1}$ $2^0 = 1$ → équation de degré 5: équation caractéristique du nombre de nickel γ_{ni}

$x^6=2x^4+2x^3+2x^2+2x+1$ $2^1 = 2$
$x^7=4x^4+4x^3+4x^2+3x+2$ $2^2 = 4$
$x^8=8x^4+8x^3+7x^2+6x+4$ $2^3 = 8$
$x^9=16x^4+15x^3+14x^2+12x+8$ $2^4 = 16$
$x^{10}=31x^4+30x^3+28x^2+24x+16$ 1+2+4+8+16 = 31 coeff ok
$x^{11}=61x^4+59x^3+55x^2+47x+31$ 2+4+8+16+31 = 61
$x^{12}=120x^4+116x^3+108x^2+92x+61$ 4+8+16+31+61= 120

suite de Sixbonacci et nombre de cobalt : **(0 1) 1 2 4 8 - 16 32 63 125 …...**

$\boxed{x^6=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}$ $2^0 = 1$ → équation de degré 6: équation caractéristique du nombre de cobalt γ_{Co}

$x^7=2x^5+2x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ $2^1 = 2$
$x^8=4x^5+4x^4+4x^3+4x^2+3x+2$ $2^2 = 4$
$x^9=8x^5+8x^4+8x^3+7x^2+6x+4$ $2^3 = 8$
$x^{10}=16x^5+16x^4+15x^3+14x^2+12x+8$ $2^4 = 16$
$x^{11}=32x^5+31x^4+30x^3+28x^2+24x+16$ $2^5 = 32$
$x^{12}=63x^5+62x^4+60x^3+56x^2+48x+32$ 1+2+4+8+16+32 = 63
$x^{13}=125x^5+124x^4+120x^3+112x^2+96x+64$ 2+ 4+8+16+32+63 = 125

suite de Francesconi et nombre de fer : **(0 1) 1 2 4 8 16 - 32 64 127 253 etc**

$\boxed{x^7=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}$ $2^0 = 1$ → équation de degré 7: équation caractéristique du nombre de fer γ_{Fe}

$x^8=2x^6+2x^5+2x^4+2x^3+2x^2+2x+1$ $2^1 = 2$
$x^9=4x^6+4x^5+4x^4+4x^3+4x^2+3x+2$ $2^2 = 4$
$x^{10}=8x^6+8x^5+8x^4+8x^3+7x^2+6x+4$ $2^3 = 8$
$x^{11}=16x^6+16x^5+16x^4+15x^3+14x^2+12x+8$ $2^4 = 16$
$x^{12}=32x^6+32x^5+31x^4+30x^3+28x^2+24x+16$ $2^5 = 32$
$x^{13}=64x^6+63x^5+62x^4+60x^3+56x^2+48x+32$ $2^6 = 64$
$x^{14}=127x^6+126x^5+124x^4+120x^3+112x^2+96x+64$ 1+2+4+8+16+12+64 = 127

A partir du degré 7, les suites associées sont plus "personnalisées" , les suites "...bonacci" étant, à partir d'un certain degré trop ennuyeuses ....

Ainsi, la suite associée au nombre de Fer s'appelle la suite Francesconi car c'est moi qui l'ai trouvé, hé hé :)

Les autres suites sont les noms de mathématiciens tous issus de l'IREM de la Réunion ....

On procède de la même manière avec les aautres nombres métalliques pour obtenir leurs suites associées :

- le nombre de fer (degré 7) et sa suite associée, appelée suite de Francesconi

(0 1) 1 2 4 8 16 - 32 64 127 253 etc ....

- le nombre de manganèse (degré 8) et sa suite associée, appelée suite de Tournès

(0 1) 1 2 4 8 16 32 – 64 128 255 509 1016 etc...

- le nombre de Chrome (degré 9) et sa suite associée, appelée suite de Busser,

(0 1) 1 2 4 8 16 32 64 - 128 256 511 1021 etc....

- le nombre de Vanadium (degré 10) et sa suite associée, appelée suite de Martin,

(0 1) 1 2 4 8 16 32 64 128 - 256 512 1023 etc....

- le nombre de Titane (degré 11) et sa suite associée, appelée suite de Carier,

(0 1) 1 2 4 8 16 32 64 128 256 - 512 1024 2047 etc....

Hommage à l'Irem de la réunion!

Observons les coefficients des suites associées aux nombres métalliques:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
Degré	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u^{10}	u^{11}	u^{12}
2	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
OR	$u_0 = 0$	$u_1 = 0$	$u_2 = u_0 + u_1$		....								
3	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504
ARGENT	$u_0 = 0$	$u_1 = 0$	$u_2 = 2^0$	$u_3 = u_2 + u_1 + u_0$									
4	0	1	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401	773
CUIVRE	$u_0 = 0$	$u_1 = 0$	$u_2 = 2^0$	$u_3 = 2^1$	$u_4 = u_3 + u_2 + u_1 + u_0$								
5	0	1	1	2	4	8	16	31	61	120	236	464	912
NICKEL	$u_0 = 0$	$u_1 = 0$	$u_2 = 2^0$	$u_3 = 2^1$	$u_4 = 2^2$	$u_5 = u_4 + u_3 + u_2 + u_1 + u_0$							
6	0	1	1	2	4	8	16	32	63	125	248	492	976
COBALT	$u_0 = 0$	$u_1 = 0$	$u_2 = 2^0$	$u_3 = 2^1$	$u_4 = 2^2$	$u_5 = 2^3$	$u_6 = u_5 + u_4 + u_3 + u_2 + u_1 + u_0$						
7	0	1	1	2	4	8	16	32	64	127	253	504	1004
FER	$u_0 = 0$	$u_1 = 0$	$u_2 = 2^0$	$u_3 = 2^1$	$u_4 = 2^2$	$u_5 = 2^3$	$u_6 = 2^4$	$u_7 = u_6 + u_5 + u_4 + u_3 + u_2 + u_1 + u_0$					
8	0	1	1	2	4	8	16	32	64	128	255	509	1016
MANGANÈSE	$u_0 = 0$	$u_1 = 0$	$u_2 = 2^0$	$u_3 = 2^1$	$u_4 = 2^2$	$u_5 = 2^3$	$u_6 = 2^4$	$u_7 = 2^5$	$u_8 = u_7 + u_6 + u_5 + u_4 + u_3 + u_2 + u_1 + u_0$				
9	0	1	1	2	4	8	16	32	64	128	256	511	1021
CHROME	$u_0 = 0$	$u_1 = 0$	$u_2 = 2^0$	$u_3 = 2^1$	$u_4 = 2^2$	$u_5 = 2^3$	$u_6 = 2^4$	$u_7 = 2^5$	$u_8 = 2^6$	$u_9 = u_8 + u_7 + u_6 + u_5 + u_4 + u_3 + u_2 + u_1 + u_0$			
10	0	1	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1023
VANADIUM	$u_0 = 0$	$u_1 = 0$	$u_2 = 2^0$	$u_3 = 2^1$	$u_4 = 2^2$	$u_5 = 2^3$	$u_6 = 2^4$	$u_7 = 2^5$	$u_8 = 2^6$	$u_9 = 2^7$	$u_{10} = u_9 + u_8 + .. + u_2 + u_1 + u_0$		
11	0	1	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
TITANE	$u_0 = 0$	$u_1 = 0$	$u_2 = 2^0$	$u_3 = 2^1$	$u_4 = 2^2$	$u_5 = 2^3$	$u_6 = 2^4$	$u_7 = 2^5$	$u_8 = 2^6$	$u_9 = 2^7$	$u_{10} = 2^8$	$u_{11} = u_{10} + u_9 + ... + u_1 + u_0$	

Prenons par exemple, le nombre de manganèse (degré n = 8) et observons ses coefficients:

En dehors des 2 premiers termes u_0 et u_1 ,

on obtient la suite associée au nombre métallique de degré 8 définie en 3 parties:

- → on a : $u_0 = 0$ et $u_0 = 1$
- → de u_2 à u_7 , on a $u_i = 2^{i-2}$
- → à partir de u_8 , on a : $u_i = u_{i-1} + u_{i-2} + ... + u_{i-8}$

Ainsi,

> La suite associée au au nombre métallique de degré n est définie par :
>
> $u_0 = 0$; $u_1 = 1$
>
> si $2 \leqslant i < n$, $u_i = 2^{i-2}$
>
> si $i \geqslant n$, $u_i = u_{i-1} + u_{i-2} + \ldots\ldots + u_{i-n}$

On peut donc créer un programme en python qui affiche un élément u_i d'une suite associée à un nombre métallique de degré n .

Ci dessous, la programmation de la fonction u avec deux paramètres n et i tel que : $u_i = u(n, i)$

Programme Python: affiche un nombre métallique γ_n de degré n axec une approximation i où $\gamma_n = \frac{u_i}{u_{n-1}}$

```
from math import *
# fonction qui affiche u(i) pour la suite associée au nombre métallique de degré n
def u(n,i):
    if i==0
        return 0
    elsif i==1
        return 1
    else:
        If 2 <=i<n:
            return 2**((i−2))
        else:
            s=0
            for j in range (i−n,i):
                s = s + u(n,j)

    n= int(input("n : "))
    i= int(input("i : "))
    print(u(n,i))
```

Ainsi, pour i suffisamment grand, on peut approximer tous les nombres métalliques de degré n en affichant $\frac{u(n, i)}{u(n, i-1)}$ On obtient donc:

approximation et limite des nombres métalliques

DEGRE	NOMBRE	approximation	équation
1	d'unité	1	$x^1 = 1$
2	d'or	1,6180339887499	$x^2 = x+1$
3	d'argent	1,8392867552146	$x^3 = x^2+x+1$
4	de cuivre	1,9275619754829	$x^4 = x^3+x^2+x+1$
5	de nickel	1,9659482366450	$x^5 = x^4+x^3+\ldots+1$
6	de cobalt	1,9835828434243	$x^6 = x^5+x^4+\ldots+1$
7	de fer	1,9919641960500	$x^7 = x^6+x^5+\ldots+1$
8	de manganèse	1,9960311797340	$x^8 = x^7+x^6+\ldots+1$
9	de chrome	1,9980294702622	$x^9 = x^8+x^7+\ldots+1$
10	de vanadium	1,9990186327100	$X^{10} = x^9+x^8+\ldots+1$
11	de titane	1,9995104019783	$x^{11} = x^{10}+x^9+\ldots+1$

1° constatation : **les nombres métalliques tendent vers 2** !!!

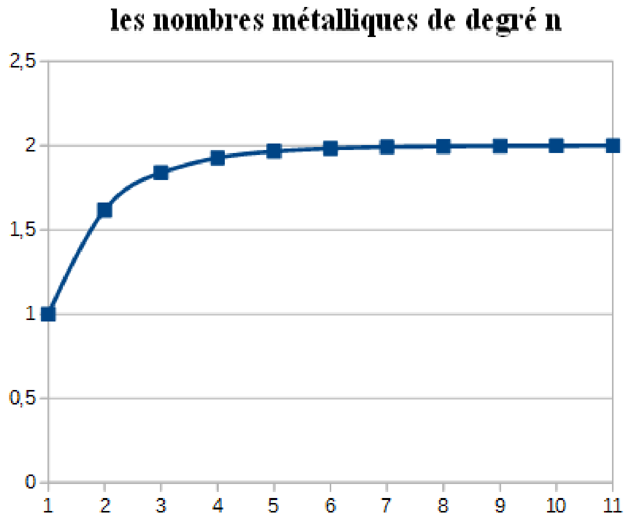
Comme les nombres métalliques de degré $n>1$ a pour équation caractéristique $x^n = x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots\cdot x^2+x+1$

et que le nombre d'or est de degré 2, nous pouvons rajouter le nombre métallique de degré 1 qui est 1.

En effet, en appliquant la formule pour $n=1$, on a bien $x^1 = x^{1-1}$ soit $x^1 = x^0 = 1$.

J'appelle donc le nombre métallique de degré 1 "*le nombre d'unité*".

DEGRE	NOMBRE	approximation
1	d'unité	1
2	d'or	1,6180339887499
3	d'argent	1,8392867552146
4	de cuivre	1,9275619754829
5	de nickel	1,9659482366450
6	de cobalt	1,9835828434243
7	de fer	1,9919641960500
8	de manganèse	1,9960311797340
9	de chrome	1,9980294702622
10	de vanadium	1,9990186327100
11	de titane	1,9995104019783



Preuve : faite par Dominique Tournès, directeur de l'Irem de la Réunion de 2000 à 2020.

Un nombre métallique de degré $n>1$ a pour équation caractéristique $x^n = x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots\cdot x^2+x+1$.

$x^n = x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots\cdot x^2+x+1$ donc $x^{n+1} = x^n+x^{n-1}+\ldots\cdot x^2+x$.

Ainsi, $x^{n+1}-x^n = x^n+x^{n-1}+\ldots\cdot x^2+x-\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots\cdot x^2+x+1\right) = x^n-1$

donc $x^{n+1}-x^n = x^n-1$ soit $x^{n+1}-2x^n+1 = 0$.

Les nombres métalliques sont les solutions positives de l'équation (E_n) définie par $x^{n+1}-2x^n+1 = 0$

On pose $f_n(x)=x^{n+1}-2x^n+1$ donc $f_n'(x) = (n+1)x^n-2nx^{n-1} = x^{n-1}[(n+1)x-2n]$

$f_n'(x) = x^{n-1}[(n+1)x-2n]$ comme les nombres métalliques x sont positifs, donc x^{n-1} est positif .

$f_n'(x)>0$ si $(n+1)x-2n>0$ donc si $x>\dfrac{2n}{n+1}$

donc $f_n'(x)>0$ si $x>\dfrac{2n}{n+1}$ d'où le tableau de variation :

x	0		1		$\frac{2n}{n+1}$		2		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		0		$+$		
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$f\left(\frac{2n}{n+1}\right)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	?

D'après ce tableau de variation, $f_n(\frac{2n}{n+1})<0$

car f est décroissante sur $\left[1;\dfrac{2n}{n+1}\right]$ donc $f_n(x)<0$ *si* $x\in[1;2]$

$f_n(x)=0$ *si* $x=1$ *ou si* $x=c_n$ *avec* $\dfrac{2n}{n+1}<c_n<2$. Or 1 n'est pas solution de l'équation caractéristique $x^n = x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots\cdot x^2+x+1$ car $1^n \neq 1^{n-1}+1^{n-2}+\ldots\cdot 1^2+1+1$

Le nombre métallique est donc c_n , solution positive de l'équation $f_n(x)=0$ différente de 1.

D'après le T.H.V.I, les nombres métalliques de degré n, notés c_n vérifient $\dfrac{2n}{n+1}<c_n<2$

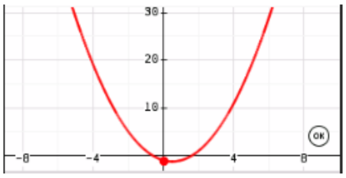
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{1+\frac{1}{n}} = 2$

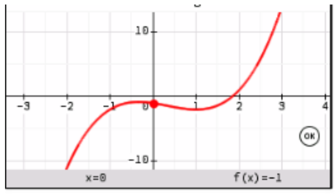
on a $\dfrac{2n}{n+1}<c_n<2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n}{n+1} = 2$, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 2$

Les nombres métalliques tendent bien vers 2 ! C.Q.F.D.

2° constatation : **Tout nombre métallique est l'unique racine positive de son équation caractéristique.**

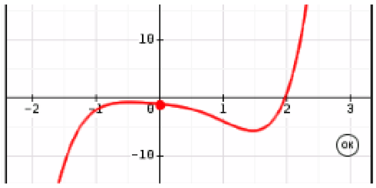
Le **nombre d'or** est la racine positive
de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 1$
$\rightarrow$ c'est la racine positive de $x^2 = x + 1$





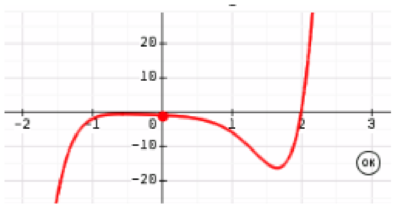
Le **nombre d'argent** est la racine positive
de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$
$\rightarrow$ c'est la racine positive de $x^3 = x^2 + x + 1$

Le **nombre de cuivre** est la racine positive
de la fonction f définie par $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$
$\rightarrow$ c'est la racine positive de $x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$



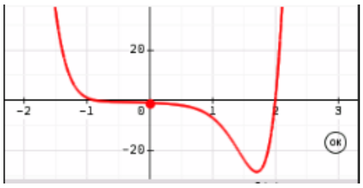
Le **nombre de nickel** est la racine positive
de la fonction f définie par $f(x) = x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$
$\rightarrow$ c'est la racine positive de $x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

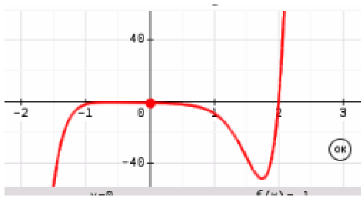
Le **nombre de cobalt** est la racine positive
de la fonction f définie par $f(x) = x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$
$\rightarrow$ c'est la racine positive de $x^6 = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$



Le **nombre de fer** est la racine positive
de la fonction f définie par $f(x) = x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$
$\rightarrow$ c'est la racine positive de $x^7 = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

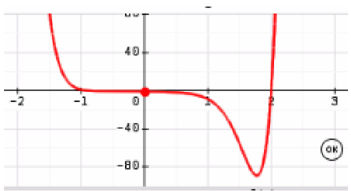
Le **nombre de manganèse** est la racine positive
de la fonction f définie par $f(x) = x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$
$\rightarrow$ c'est la racine positive de $x^8 = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

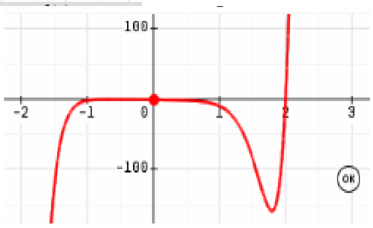




Le **nombre de chrome** est la racine positive
de la fonction f définie par $f(x) = x^9 - x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$
$\rightarrow$ c'est la racine positive de $x^9 = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Le **nombre de vanadium** est la racine positive
de la fonction f définie par
$f(x) = x^{10} - x^9 - x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$
$\rightarrow$ c'est la racine positive de $x^{10} = x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$





Le **nombre de titane** est la racine positive
de la fonction f définie par $f(x) = x^{11} - x^{10} - x^9 - x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$
$\rightarrow$ c'est la racine positive de $x^{11} = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$